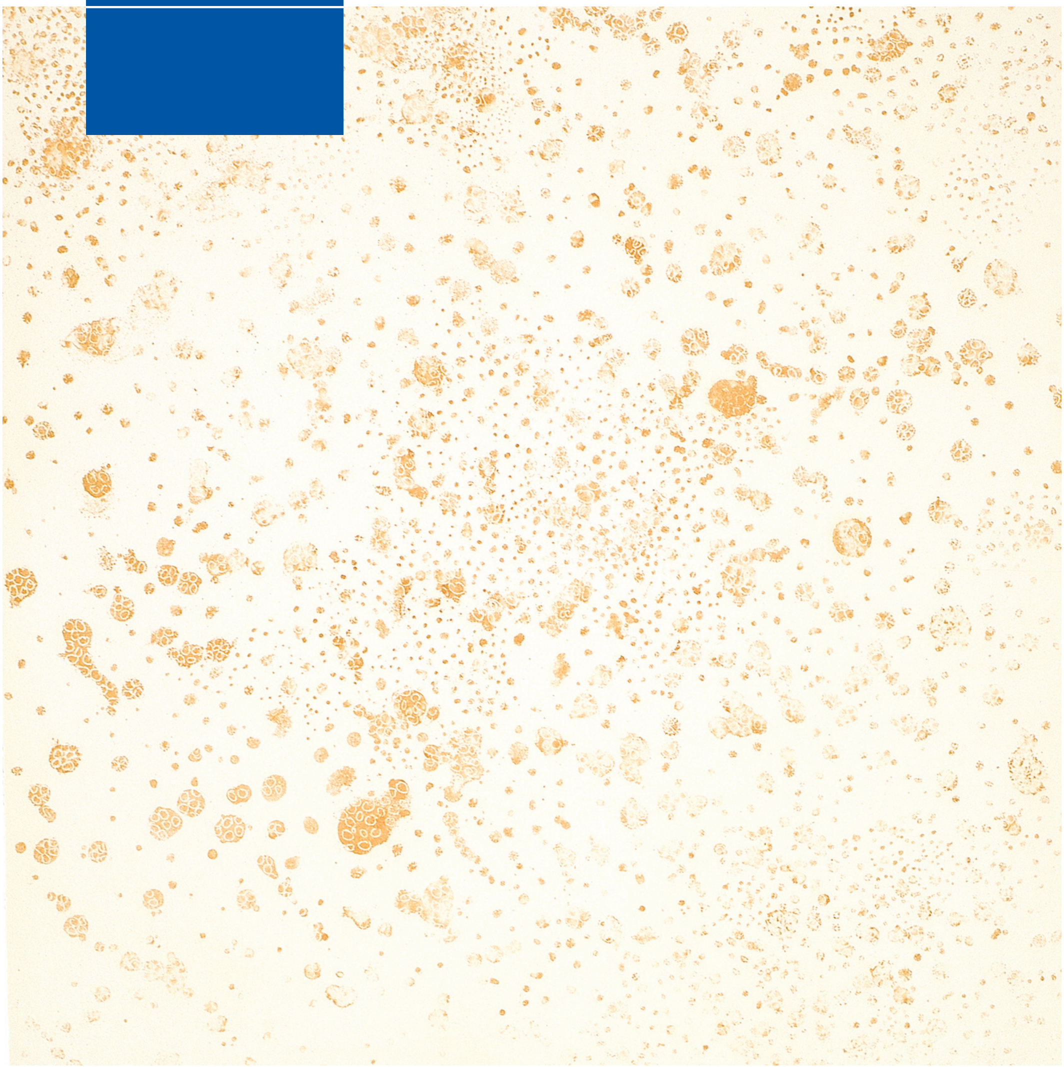
DESIGUALDAD Y BIENESTAR SOCIAL

De la teoría a la práctica

Francisco J. Goerlich
Antonio Villar

Fundación BBVA



DESIGUALDAD Y BIENESTAR SOCIAL

Desigualdad y bienestar social

De la teoría a la práctica

Francisco J. Goerlich
Antonio Villar

Prólogo de:
Javier Ruiz-Castillo

Fundación BBVA

DATOS INTERNACIONALES DE CATALOGACIÓN

Goerlich, Francisco J.
Desigualdad y bienestar social : de la teoría a la práctica / Francisco J. Goerlich, Antonio Villar ; prólogo de Javier Ruiz-Castillo. — 1.ª ed. — Bilbao : Fundación BBVA, 2009.
618 p. ; 24 cm
ISBN: 978-84-96515-72-7
1. Desigualdad social. 2. Bienestar social. I. Villar, Antonio. II. Ruiz-Castillo, Javier, prol. III. Fundación BBVA, ed.
364.144
364.658

Primera edición, 2009

ISBN: 978-84-96515-72-7
DEPÓSITO LEGAL: V-387-2009

EDICIÓN Y PRODUCCIÓN: Martín Impresores, S.L.
COMPOSICIÓN Y MAQUETACIÓN: Martín Impresores, S.L.
IMPRESIÓN Y ENCUADERNACIÓN: Martín Impresores, S.L.

Impreso en España – *Printed in Spain*

Los libros editados por la Fundación BBVA están elaborados sobre papel con un 100% de fibras recicladas, según las más exigentes normas ambientales europeas.

Í N D I C E

Prólogo

La obra pretende un tratamiento completo, aunque no exhaustivo, del paradigma vigente sobre desigualdad y bienestar, incluyendo aplicaciones prácticas con datos españoles. El paradigma en cuestión se ha desarrollado desde 1970 hasta la fecha. Puede decirse que, en la actualidad, los fundamentos teóricos de esa construcción están completos en lo esencial. Las aplicaciones prácticas se cuentan por centenares. En este sentido, es muy útil disponer de un texto que ponga esta literatura mixta al alcance del lector en castellano.

En mi opinión, uno de los rasgos favorables de la obra es incluir, junto a la desigualdad, el estudio del bienestar al que se suele prestar una atención casi marginal. Otro de los aspectos destacables es el esfuerzo por abordar tanto los aspectos teóricos como los prácticos, incluyendo la discusión (inevitable) de las convenciones metodológicas que la profesión ha adoptado para tender el puente entre la teoría de la medición y los datos disponibles en el mundo real. Las aplicaciones elegidas tienen interés sustantivo y cumplen bien el papel de ilustrar la discusión teórica que les precede.

El texto anuncia una *presentación unificada* de estas materias, tanto en lo que a la notación se refiere como a la presentación sucesiva de los distintos conceptos. En lo esencial, este propósito se consigue, lo cual dota de claridad y continuidad a un texto bastante extenso. No obstante, siempre cabe alguna objeción. Por mi parte, destacaré únicamente que la propiedad de descomponibilidad de los índices de desigualdad se haya incluido como una propiedad básica en el capítulo 1. Esta propiedad, de tan fuertes implicaciones (véase el teorema 1.1), no se encuentra entre las necesarias para caracterizar los índices consistentes con el criterio de Lorenz (v. el teorema 5.3) y tiene objetores de nota (como

Sen y Foster, 1997, por ejemplo). A cambio, como si dijéramos, sorprende favorablemente el tratamiento tan completo de la descomponibilidad que se ofrece en los capítulos 6 y 7.

El texto es una obra de síntesis, por lo que no contiene apenas material original. No obstante, se aprecia por doquier que los autores no solo son competentes en la materia, sino que han realizado contribuciones relevantes al desarrollo y/o aplicación del paradigma que se discute. Así, tanto la discusión del bienestar como las aplicaciones se benefician de la experiencia personal que los autores han destilado a través de los cauces especializados habituales. A título de ejemplo, en el plano teórico mencionaremos cómo el planteamiento en términos de funciones de evaluación social brinda, entre otras cosas, la posibilidad de entender algunos rasgos paradójicos de algunos índices de desigualdad convencionales, como sea que la mayor aversión a la desigualdad puede resultar incompatible con el principio de dar más peso en la valoración social a los individuos con menores rentas (capítulo 9). En el plano de las aplicaciones empíricas con datos españoles, destaca la reducida pérdida porcentual de bienestar atribuible a la desigualdad de oportunidades salariales que sufren las mujeres respecto de los hombres, estimada en menos del 2%. Lo que conduce a pensar que, más que en los salarios, la discriminación por género está en otros ámbitos, como la educación, el tipo de ocupación o la rama de actividad.

Por su amplitud y rigor, el texto se dirige al estudioso que quiera comprobar por sí mismo en un solo volumen en qué ha quedado una extensa literatura que, como hemos dicho, ha cumplido esencialmente su objetivo original. Por otro lado, el libro es una obra de referencia para estudiantes e interesados de todo tipo. El nivel técnico es adecuado, y se agradece que se releguen a apéndices algunos detalles que, al no ser esenciales para el argumento general, podrían distraer al lector menos interesado en cuestiones técnicas. El texto es extenso, pero no solo por las materias que cubre, sino porque está lleno de comentarios felices que facilitan el entendimiento de los aspectos más sutiles de cualquiera de los asuntos que se abordan. Esto lleva tiempo, es decir, espacio. Pero el lector inteligente apreciará que se le conduzca siempre de principio a fin de lo que hay. También ayuda que, a pesar del carácter técnico del material cubierto, todo esté escrito en un buen castellano.

Así pues, no queda sino felicitar a los autores por el trabajo realizado y animar al lector a que se acerque a la totalidad, a los aspectos más clásicos o a los más novedosos de un libro que será útil para una variedad de audiencias.

JAVIER RUIZ-CASTILLO
Universidad Carlos III de Madrid

Introducción

1. Generalidades

La preocupación por la igualdad constituye un tema recurrente en el pensamiento social moderno aunque sus orígenes podrían remontarse, al menos, hasta los griegos (Saunders 1970), y abarca multitud de facetas: igualdad frente a la ley, igualdad de oportunidades, igualdad en la distribución de la riqueza, etc. La desigualdad económica es una parte muy significativa de la desigualdad social, tanto más en aquellas sociedades que poseen constituciones democráticas, que protegen los derechos básicos de los ciudadanos y garantizan la igualdad frente a la ley. De hecho, la equidad en la distribución de la riqueza es un objetivo declarado de la mayoría de los Gobiernos democráticos, sean del signo político que fueren.

Dentro de la preocupación por la desigualdad económica, el estudio de la desigualdad en la distribución de la renta, como resultado económico fácilmente observable, ocupa sin duda un lugar preeminente.[1] Las razones para ello son varias. En primer lugar, porque la renta personal es el determinante básico de las oportunidades de consumo de los individuos y, en consecuencia, es un indicador indiscutible de bienestar material, entendido este en un sentido amplio. En segundo lugar, porque la distribución de la renta puede ser afectada directamente mediante los instru-

[1] En general por *distribución de la renta* podemos entender alguno de los siguientes aspectos: a) la distribución funcional de la renta, que se refiere a la determinación de la remuneración de los factores; b) la proporción de los diversos tipos de renta (salariales, empresariales, etc.) en el producto nacional; y c) la *distribución personal de la renta,* que se refiere a la distribución de la renta entre individuos (o familias). A lo largo de este trabajo identificaremos distribución de la renta con distribución personal de la renta, a menos que se indique lo contrario.

mentos habituales de la política económica, como son los impuestos y las transferencias. Y, finalmente, porque la renta constituye una magnitud acerca de la cual se dispone de información estadística recogida de forma regular y relativamente fiable.

El presente trabajo tiene por objeto analizar, de modo sistemático, las diversas formas de abordar la medición de la desigualdad en la distribución de la renta, al tiempo que proponer algunas aplicaciones. Dicha medición se realiza habitualmente, aunque no de forma exclusiva, mediante los denominados *índices de desigualdad*, unos indicadores numéricos que estiman, con diferentes criterios, el grado de dispersión en las rentas en una sociedad y momento dados.

No pretendemos, en modo alguno, ser exhaustivos. La literatura, tanto teórica como aplicada, es tan abundante que esto carecería de sentido y un intento de esta naturaleza estaría necesariamente abocado al fracaso. Existen numerosos libros que cubren, de forma magistral, amplios espectros de la temática que aquí abordamos. El lector puede consultar, entre otros, los excelentes libros de Sen (1973, 1992), Love y Wolfson (1976), Cowell (1977, 1995), Kakwani (1980a), Nygård y Sandström (1981), Osmani (1982), Anand (1983), Atkinson (1983), Chakravarty (1990), Lambert (1993), Temkin (1993), Sen y Foster (1997), Silber (1999), Atkinson y Bourguignon (2000a) o Duclos y Araar (2006), entre muchos otros. La selección temática recoge, por una parte, los aspectos esenciales de esta literatura y, por otra, una problemática cercana a nuestros propios intereses de investigación. En particular con relación a la vinculación entre desigualdad y bienestar. En todo caso, hay un intento de proporcionar una exposición unificada, articulada en un desarrollo lógico y dotada de una notación consistente.

Entre las principales aplicaciones de los índices de desigualdad cabe mencionar las siguientes:

1) Permiten comparar cómo evoluciona la desigualdad a lo largo del tiempo en una determinada sociedad, así como evaluar el impacto que sobre la distribución de la renta ejercen las diversas medidas de política económica y, específicamente, aquellas destinadas a reducir la desigualdad o la lucha contra la pobreza.

2) Proporcionan criterios de comparación entre diferentes sociedades, desde el punto de vista de la igualdad, y permiten hacer evaluaciones del bienestar colectivo que van más allá de la mera contraposición de niveles de renta per cápita.
3) Facilitan el análisis del origen y la naturaleza de la desigualdad, dado que nos permiten: a) descomponer la desigualdad social en desigualdad atribuible a las diferencias entre diversos grupos sociales (desigualdad *intergrupos*) y desigualdad total atribuible a la desigualdad dentro de estos grupos (desigualdad *intragrupos*); b) descomponer la desigualdad en términos de los factores que generan la renta; y c) separar la desigualdad observada entre desigualdad relativa a diferencias en las oportunidades y desigualdad derivada de las decisiones de los individuos. Estas posibilidades de análisis resultan esenciales a la hora de diseñar medidas de política económica encaminadas a reducir o contener la desigualdad.
4) Posibilitan la construcción de indicadores de bienestar que incorporan aspectos distributivos. Un ejemplo relevante, en un contexto multidimensional, es el caso de los Índices de Desarrollo Humano propuestos por Naciones Unidas, en el contexto de sus Programas para el Desarrollo, y que combinan datos de renta, salud y educación (United Nations Development Programme [UNDP] 1990).[2]

La importancia de estas aplicaciones hace que debamos ser cuidadosos a la hora de elegir un indicador de desigualdad. Más aún si tenemos en cuenta que, frente a una serie de distribuciones de renta, los diferentes indicadores no solo asignarán valores numéricos distintos sino que pueden ordenar de diverso modo estas distribuciones de renta. Así podemos encontrarnos que, al comparar dos distribuciones de renta, un cierto índice nos diga que la primera es más igualitaria que la segunda, mientras que otro nos lleve a la conclusión contraria.

[2] El Programa para el Desarrollo de las Naciones Unidas publica anualmente, desde 1990, un Informe sobre el Desarrollo Humano que, desde un punto de vista eminentemente práctico y pragmático, incorpora muchos de los elementos de análisis que aquí trataremos. Dichos informes están accesibles en Internet: http://hdr.undp.org/.

Desde un punto de vista expositivo resulta útil agrupar las diversas formas de aproximarse a la medición de la desigualdad en dos grandes enfoques:

1) Un *enfoque positivo*, que se caracteriza por proceder a la medición de la desigualdad mediante alguna medida estadística de dispersión. Este enfoque es tan antiguo como la propia estadística descriptiva, como así lo atestiguan algunas de sus contribuciones fundamentales, tales como la curva de Lorenz (1905) y el índice de Gini (1912). Englobamos aquí la aproximación a la desigualdad que se desarrolla desde la teoría de la información (Khinchin 1957; Kullback 1959) y que se centra en el análisis de la desigualdad, a partir del contenido informativo en la estructura de la distribución de la renta (Theil 1967).
2) Un *enfoque normativo* que parte de la interpretación de la desigualdad como una pérdida en el bienestar colectivo potencial (Dalton 1920; Atkinson 1970; Sen 1973). Los índices normativos de desigualdad se basan así en el uso de funciones de bienestar social que reflejan los juicios de valor implícitos acerca de la relación entre desigualdad y bienestar. Incluimos dentro de este enfoque tanto la aproximación multidimensional basada en la consideración de las capacidades de los individuos, más que en sus realizaciones (Sen 1985; Roemer 1998), como la que explota la analogía con el análisis del riesgo para la evaluación del bienestar (Harsanyi 1953, 1955; Rothschild y Stiglitz 1973).

Adviértase que, aunque esta distinción entre el enfoque positivo y normativo facilita la exposición, existen numerosos puntos en común entre ambos enfoques y las diferencias son, en ocasiones, más aparentes que reales. Así por ejemplo, si hemos de seleccionar entre varias medidas estadísticas de dispersión, tendremos que introducir juicios de valor para determinar cuál de ellas es mejor. Por otra parte, los índices normativos deben necesariamente poseer algún contenido descriptivo del grado de dispersión de la renta. Por tanto, en todos los índices podemos encontrar elementos característicos de estos dos enfoques. En parte por ello surge el tratamiento axiomático de los indicadores mediante el que se procede a la obtención y, en muchos casos a la caracterización, de los índices a partir de juicios de valor precisos y explícitos. De esta forma, cuando se fijan los juicios de valor que el analista o el político adoptan se obtiene el índice de desigualdad preciso que resulta de tales juicios.

Hay dos cuestiones preliminares a las que debemos referirnos porque resultan esenciales a la hora de desarrollar estudios empíricos: a) la elección de una noción apropiada de renta, es decir, el problema de definir en términos precisos y operativos la variable cuya dispersión queremos analizar y b) la especificación del receptor de esa renta.[3] Solo entonces podremos hablar de forma inequívoca de la distribución de la renta.

Desde un punto de vista teórico, la renta de un individuo durante un periodo dado consiste en el aumento de la capacidad de consumo del individuo en dicho periodo, es decir, la suma del valor de mercado de los derechos ejercidos en el consumo más el cambio en el valor de su riqueza entre el comienzo y el final de ese periodo. A la hora de hacer operativa esa definición, así como determinar el receptor último de esa renta, generada muchas veces en un contexto familiar y no individual, surge una serie de complicaciones prácticas a las que todo investigador aplicado debe enfrentarse. Nos referiremos brevemente a las principales de estas *complicaciones*, sobre las que volveremos en la tercera parte de este trabajo.

— En primer lugar observemos que, en tanto que la renta es una *magnitud flujo*, es decir, una magnitud relativa a un periodo de tiempo dado, la elección del periodo tomado como referencia resulta sustancial. Para entender la importancia del periodo considerado, adviértase que la estructura de la pirámide de población va a afectar a la distribución aparente de la renta, por el mero hecho de que los más jóvenes o los más viejos poseen en general rentas inferiores, simplemente debido a que aún no se han integrado plenamente en

[3] Dicho en otras palabras, qué hay que distribuir y entre quiénes.

la actividad productiva, o bien ya la han abandonado. Por tanto, si medimos la renta en un ciclo corto de tiempo, por ejemplo un año, podemos estar incorporando un sesgo importante sobre el significado de la dispersión de la misma, ya que esta se verá seriamente afectada por la particular estructura poblacional en ese año. Para proceder correctamente en la estimación de la desigualdad deberíamos utilizar algunas medidas de *renta permanente*, como valor actual medio de las rentas futuras esperadas. Si bien una medición de tal naturaleza resulta difícilmente alcanzable, existen algunos procedimientos tendentes a paliar este efecto de la estructura poblacional (Paglin 1975; Lam 1986, 1988).

Obsérvese que el argumento anterior da por supuesto que la variable de referencia en la que estamos interesados es la renta. Pero es habitual considerar que el consumo es un mejor indicador de nivel de vida y bienestar que la propia renta, dado que su medición suele ser más fiable y su comportamiento resulta menos volátil que el de la renta a lo largo del ciclo vital. Por lo tanto ni siquiera a este nivel existe un acuerdo sobre la variable objeto de estudio.[4]

— En segundo lugar, conviene advertir sobre la complicación derivada de la utilización de los índices de desigualdad para efectuar comparaciones intertemporales o analizar el efecto de medidas de política económica. Es obvio que, en estos casos, las comparaciones relevantes son entre distribuciones de renta real y no de renta nominal. Ello requiere la utilización de unos índices complementarios que permitan *descontar* el efecto de cambios en el nivel de precios, lo que exige la estimación de una *cesta de consumo* representativa, que sirva para la elaboración de índices del coste de la vida. Y, por lo general, estos patrones de consumo presentarán diferencias relevantes dentro de la propia unidad de análisis (diferencias territoriales, diferencias por grupos

[4] Téngase en cuenta que el concepto de *consumo* no es equivalente al de *gasto en consumo*, medido habitualmente por las Encuestas de Presupuestos Familiares. La diferencia radica esencialmente en el uso de servicios derivados de bienes de capital o de consumo duradero.

sociales, etc.). Análogas complicaciones surgen a la hora de establecer comparaciones internacionales de distribuciones de renta (Sen 1973).

— En tercer lugar, la organización social y la biología hacen que las decisiones de renta, consumo y ocio no se tomen de forma totalmente individual, sino en el contexto de unidades más amplias que normalmente son las familias. Debemos especificar, por tanto, si nuestro interés se centra en las familias o en los individuos y, en el caso de que nuestra unidad de análisis sea esta última, cómo transformar la renta familiar en renta individual. Se trata de identificar al perceptor de la renta. El problema no es trivial, ya que hay que tomar en consideración las diferencias de tamaño familiar, las posibles economías de escala, generadas como consecuencia de la vida en común, así como ponderar adecuadamente por la composición familiar, por ejemplo, la proporción de adultos sobre el total. Esta cuestión es conocida en la literatura como el diseño de escalas de equivalencia (McClements 1977; Pollak y Wales 1979; Buhmann et al. 1988; Coulter, Blundell y Lewbel 1991; Coulter, Cowell y Jenkins 1992a, 1992b; Banks y Johnson 1994; Jenkins y Cowell 1994; Ruiz-Castillo 1995a; Cowell y Mercader-Prats 1999; Ebert y Moyes 2003).

— En cuarto lugar, hay que advertir que la desigualdad observada en la distribución de la renta, en realidad, puede reflejar tanto una falta de equidad en asignación de capacidades de ingreso o consumo, como grados diversos de esfuerzo para la consecución de dichas capacidades. Las rentas individuales son un resultado que se deriva tanto de las oportunidades disponibles para los agentes como de las decisiones que estos toman. Lo que debiera preocuparnos, desde el punto de vista de la justicia distributiva, son las diferencias de renta, debidas a las distintas oportunidades con que se enfrentan los individuos de una sociedad, y no aquellas que se derivan de las decisiones autónomas de los mismos.[5]

[5] Para ilustrar este punto imaginemos una sociedad con dos individuos idénticos, uno de los cuales trabaja el doble de horas que el segundo y obtiene con ello el doble de ingresos. ¿Diríamos que hay desigualdad social en este caso?

Este es un aspecto particular de un problema mucho más general, que se refiere a la valoración de las circunstancias que rodean a los perceptores de renta y que pueden resultar relevantes para la estimación de la desigualdad. Consideremos, por ejemplo, el caso de dos familias españolas de igual tamaño y composición que disfrutan de la misma renta. Estos datos pueden esconder la presencia de desigualdad cuando estas familias viven en comunidades diferentes con diversos niveles de vida, distintos sistemas impositivos locales o regionales y diferentes prestaciones de servicios públicos por parte de la Administración (colegios, hospitales, transporte, etc.).

— Finalmente, nos referiremos a una complicación sustancial siempre presente: la disponibilidad de datos con los que aplicar el instrumental analítico. Si en general se dispone de estadísticas desagregadas de ingresos y gastos de consumo, resulta mucho más difícil, por no decir imposible, obtener información acerca de las variaciones patrimoniales, incluyendo el ahorro, así como del valor de las transferencias de las que, directa o indirectamente, los individuos disfrutan.

No obstante vale la pena señalar que, en el caso de España, las estadísticas de base para estos estudios, fundamentalmente las Encuestas de Presupuestos Familiares (EPF) del Instituto Nacional de Estadística (INE), contienen cuantiosa información adicional a la de los gastos de consumo, que se refiere a la posesión de bienes de consumo duradero; ello debería permitir obtener aproximaciones de renta bastante mejores que la mera computación de niveles de gasto agregados.[6]

[6] Además de las EPF, de gran tradición en nuestro país y de las que existen varias versiones, hay otras fuentes de información, de ámbito nacional, que permiten análisis sobre distribución de la renta. En concreto, por parte del INE, se dispone también de las Encuestas de Estructura Salarial de 1995 y 2002, muy útiles en el análisis de la distribución de las ganancias salariales, o del Panel de Hogares de la Unión Europea (PHOGUE), para el periodo 1994-2001, de metodología armonizada con diferentes países europeos. Existen, además, otras bases de datos de origen administrativo y tributario, así como otras fuentes de información de ámbito regional.

2. Avance de contenidos

El trabajo está estructurado en tres partes. La primera de ellas presupone que las cuestiones prácticas que acabamos de mencionar han sido resueltas de forma satisfactoria: partimos de la existencia de un consenso sobre la definición del concepto de renta, así como sobre el perceptor de la misma. Sobre estos temas volveremos en la última parte. En el capítulo 1, formalizamos el concepto de índice de desigualdad y establecemos un conjunto de propiedades básicas que nos servirán como referencia para la discusión de los índices concretos. En los capítulos 2, 3 y 4 presentamos los índices de desigualdad más habituales en la literatura, agrupados según los enfoques positivo y de la teoría de la información, capítulos 2 y 3, y normativo, capítulo 4. Prestaremos especial atención a la curva de Lorenz (1905), al índice de Gini (1912), a los índices de Theil (1967) y a la familia de índices de Atkinson (1970). Junto con la definición de los diversos índices, se discuten sus limitaciones en términos de las valoraciones implícitas que comportan y se presentan sus propiedades básicas. A continuación, capítulo 5, se analiza hasta qué punto y en qué condiciones los diversos índices de desigualdad ordenan de igual forma distribuciones de renta alternativas. Veremos que es posible precisar en qué casos sucede esto y que, en general, diversos índices ordenan las distribuciones de renta dadas de forma distinta. En los capítulos 6 y 7, últimos de la primera parte, se analiza una propiedad importante y útil de los índices de desigualdad, la descomponibilidad según diferentes criterios.

En la segunda parte se analiza, con mayor detalle, la relación entre desigualdad y bienestar. El capítulo 8 nos introduce en el estudio de dicha relación, mientras que el capítulo 9 presenta una familia importante de funciones de evaluación social y examina su conexión con muchos de los índices de desigualdad estudiados en la primera parte. El capítulo 10 contiene la caracterización de un tipo particular de función de evaluación social asociada al índice de Theil (1967) que presenta propiedades de descomponibilidad, especialmente interesantes. Finalmente el capítulo 11, último de la segunda parte, trasciende el análisis de la distribución de la renta para abordar el estudio de su relación con la igualdad de oportunidades.

Dado este marco teórico de referencia, la tercera parte del trabajo retorna a cuestiones de índole más práctico. El capítulo 12 vuelve sobre la cuestión de la elección de una noción apropiada de renta, tanto desde un aspecto filosófico, renta como indicador de nivel de vida, como desde aspectos puramente prácticos, ingresos frente a gastos. En el camino se estudian algunas cuestiones relacionadas con la disponibilidad y fiabilidad de los datos. Se abordan también aspectos relacionados con la dependencia de la estructura de la población y las alteraciones en los precios relativos. Adicionalmente se indaga la cuestión de la especificación del perceptor de renta y se considera el problema de la determinación de las escalas de equivalencia. Los capítulos 13 y 14 presentan algunas aplicaciones prácticas a partir de datos reales que ilustran parte de los contenidos teóricos expuestos en las dos primeras partes. En concreto, el capítulo 13 ofrece una panorámica general sobre la desigualdad y el bienestar en España, a partir de las EPF, haciendo especial énfasis en aspectos regionales. Finalmente, el capítulo 14 realiza una evaluación de la discriminación en razón de género, a partir del principio de igualdad de oportunidades y los datos de la Encuesta de Estructura Salarial del año 2002.

Antes de pasar al capítulo 1, dedicaremos la sección siguiente a cuestiones terminológicas y de notación, así como a presentar ciertas herramientas básicas para la descripción de la distribución de la renta. Conceptos adicionales serán presentados conforme se necesiten.

3. Conceptos preliminares

Tomamos como referencia una sociedad $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ compuesta por n individuos. La renta del individuo i es un número real positivo[7] que designamos genéricamente como $y_i \in \mathbb{R}_{++}$, para todo

[7] Muchos de los índices que presentaremos son incapaces de acomodar rentas negativas o incluso nulas, por lo que preferimos excluirlas del análisis a priori. Este es básicamente un problema de la especificación del soporte sobre el que está definida la distribución de la renta, algunas interpretaciones del concepto de *renta* solo consideran explícitamente valores positivos, como por ejemplo el gasto agregado o los salarios por hora trabajada. Otras interpretaciones permiten dichos valores como, por

$i \in N$. Como hemos señalado con anterioridad, supondremos que las cuestiones relativas a la definición operativa de renta así como la especificación del perceptor de la misma ya han sido solucionadas con anterioridad. De esta forma entendemos por *renta* el indicador apropiado de nivel de vida o bienestar del perceptor de la misma. Además suponemos, implícitamente, que esta renta resume adecuadamente todo aquello que deseamos conocer acerca del estatus económico del individuo, mientras no se indique lo contrario. Nuestro enfoque de la desigualdad es, pues, esencialmente unidimensional.

La distribución de la renta en esta sociedad N puede ser representada como un vector de n componentes,

$$\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \tag{1}$$

Supondremos con frecuencia que el vector de rentas está ordenado de forma no decreciente, $y_1 \leq y_2 \leq y_3 \leq \ldots \leq y_{n-1} \leq y_n$. Este supuesto no resulta restrictivo y facilita el análisis.

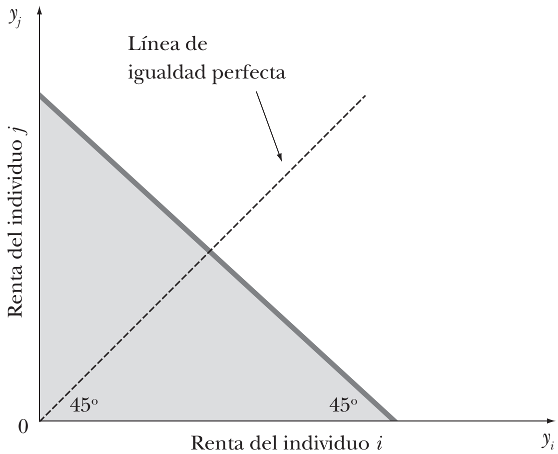
De forma alternativa también escribiremos,

$$\mathbf{y} = \left(y_i\right)_{i \in N} \tag{2}$$

En el caso de $n = 2$ el conjunto de todas las distribuciones posibles para un monto de renta dada viene representado en el gráfico 1 por el área sombreada limitada por la línea gruesa de 45°. Si el total de renta debe repartirse entre el total de población, debemos situarnos sobre esta línea, de otra forma desperdiciamos parte de la renta agregada. Cualquier punto sobre esa línea representa una posible distribución eficiente de la renta total. En particular, la intersección de la línea gruesa con la bisectriz identifica la distribución igualitaria en la que todos los individuos disponen de la misma cantidad de renta.

ejemplo, el valor patrimonial de un individuo. Desde el punto de vista teórico esto representa una restricción que debe ser tenida en cuenta (Stich 1996), aunque desde el punto de vista práctico los datos de base suelen ser modificados para eliminar valores negativos o incluso nulos (Jenkins 1997).

GRÁFICO 1: Distribución de la renta en una sociedad con dos individuos



Fuente: Elaboración propia.

Si además de y deseáramos tomar en consideración en nuestro análisis otras características de los individuos, digamos un atributo a, entonces la distribución de la renta vendría dada por la lista de pares,

$$((y_1, a_1), (y_2, a_2), \ldots, (y_n, a_n)) \tag{3}$$

que podríamos representar mediante una matriz de dimensión n x 2. Claramente podemos extender nuestro análisis a situaciones multidimensionales, no sin añadir complejidad a los desarrollos, por ejemplo obsérvese que el tema de la ordenación de rentas no es trivial en este caso si el atributo a es de naturaleza cuantitativa. Por otra parte a puede ser a su vez un vector de atributos que incluya aspectos cualitativos y cuantitativos.[8]

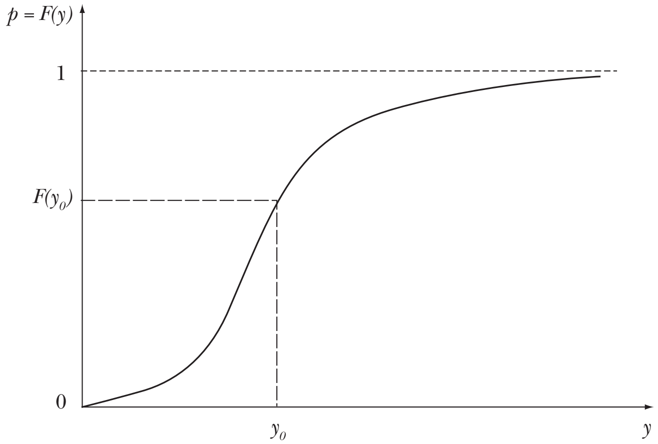
Aunque esta es una forma estándar de analizar la distribución de la renta (Dasgupta, Sen y Starrett 1973), de forma complementaria podemos tomar prestados algunos aspectos conceptuales de

[8] Hay una incipiente literatura sobre el análisis de la desigualdad desde un punto de vista multidimensional, que va desde los trabajos iniciales de Atkinson y Bourguigon (1982, 1987), Maasoumi (1986, 1989) o Rietveld (1990), hasta el reciente trabajo de Savaglio (2006).

la estadística, lo que en la práctica se ha revelado muy útil. En concreto, utilizaremos el concepto básico de *función de distribución acumulativa (cdf)* y aspectos relacionados con la misma. Sea $\Im$ el espacio de todas las funciones de distribución acumulativas univariantes válidas para nuestro análisis, la distribución de la renta viene dada por $F \in \Im$, donde F tiene soporte $\mathbb{R}_{++}$, el intervalo estrictamente positivo de la renta real.[9] En este contexto, $y \in \mathbb{R}_{++}$ es un valor particular para la renta y $F \in \Im$ es una posible distribución de renta en nuestra sociedad N de tamaño n; de esta forma $p=F(y)$ representa la proporción de población en la sociedad con una renta igual o inferior a y. Obviamente F es una función $F:\mathbb{R}_{++} \mapsto [0,1]$, no-negativa y no-decreciente en y, con $\lim_{y\to 0^+} F(y)=0$ y $\lim_{y\to +\infty} F(y)=1$.

El gráfico 2 muestra dicha función en el caso de que la renta sea una variable continua.

GRÁFICO 2: Función de distribución acumulativa de la distribución de la renta, *F*



Fuente: Elaboración propia.

[9] Aunque suponemos que la renta tiene una cota inferior, $y > 0$, no imponemos ninguna cota superior, de forma que $y \in (0,+\infty)$. Para un análisis en los que y está acotada superior e inferiormente véase Cowell y Victoria-Feser (1998, 1999).

En el caso discreto la función dibujada en el gráfico 2 es una *función escalón*, que en general presenta n discontinuidades en los elementos del vector de rentas, **y**, aunque es continua por la derecha en dichos puntos.[10]

En este caso, recordando que suponemos que los elementos del vector y están ordenados de forma no decreciente, podemos definir F como

$$F(y) = \frac{i}{n} \quad \text{si} \quad y \geq y_i \tag{4}$$

puesto que y_i representa el elemento i-ésimo más pequeño del vector $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$.

Aunque adoptaremos generalmente una aproximación discreta al estudio de la desigualdad, recurriremos a la formulación continua cuando así lo aconseje la conveniencia matemática (en especial en las aproximaciones de naturaleza más estadística). Por otra parte, la consideración de la renta como una variable continua es un supuesto razonable desde el punto de vista de la descripción del proceso que genera las distribuciones de renta, que efectivamente observamos en el mundo real, es decir el vector $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$.

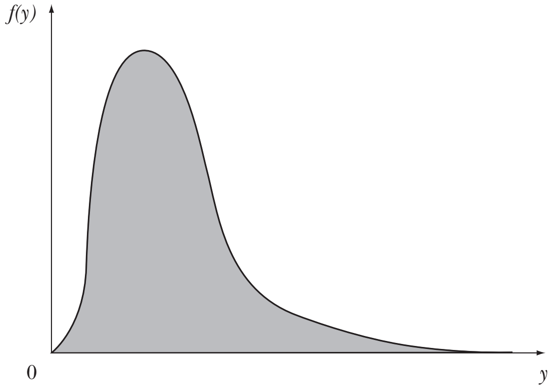
Si F es continua y diferenciable, entonces es posible definir la *función de densidad* como la derivada de F,

$$f(y) = \frac{dF(y)}{dy} \tag{5}$$

En algunas ocasiones es más sencillo, e incluso más intuitivo, trabajar con f en lugar de con la correspondiente función F, si bien ambas contienen la misma información y siempre es posible obtener una de la otra y viceversa (Mood, Graybill y Boes 1974). En el caso continuo y diferenciable, una forma típica de la función de densidad de la distribución de la renta encontrada en el mundo real, viene ilustrada en el gráfico 3. En este caso son las áreas bajo dicha curva las que representan proporciones de población entre dos niveles de renta.

[10] Suponemos implícitamente que los elementos del vector de rentas, **y**, son todos ellos diferentes.

GRÁFICO 3: Función de densidad de la distribución de la renta, *f*



Fuente: Elaboración propia.

La propiedad de *diferenciabilidad* permite ganar operatividad cuando consideremos la renta como una variable continua, por lo que la utilizaremos en este caso. Sin embargo, nuestro marco de análisis es, en la mayoría de las ocasiones, suficientemente flexible para manejar casos en los que F no es ni diferenciable ni continua.

Cuando F es discreta también es posible definir una función de densidad discreta para nuestro vector de rentas $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$. Suponiendo que todos los elementos de dicho vector son diferentes, podemos escribir,

$$dF(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{n} & \text{si} \quad y = y_i\,, \quad \forall i \in N \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases} \tag{6}$$

Una distribución consistente en n puntos, cada uno representando a un individuo y, en consecuencia, cada uno de estos puntos representa una proporción $1/n$ del total de la sociedad.[11] Obsérvese que en el caso continuo $dF(y) = f(y).dy$.

La función F es uno de los conceptos fundamentales para el análisis económico y estadístico de la distribución de la renta. Una de sus principales ventajas es que diversos aspectos de dicha dis-

[11] En términos más estadísticos diríamos que cada punto representa una masa de probabilidad de $1/n$. En nuestro análisis de la distribución de la renta entre los individuos de una sociedad en lugar de probabilidades tenemos proporciones de población.

tribución pueden ser resumidos de forma sencilla en términos de la función *F*.

Por ejemplo la *media* de la distribución de la renta es una función $\mu : \Im \mapsto \mathbb{R}_{++}$, que viene dada por,

$$\mu(F) = \int_{\mathbb{R}_{++}} y dF(y) \tag{7}$$

en el caso continuo o por,

$$\mu(N, \mathbf{y}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} y_i \tag{8}$$

en el caso discreto.

Aunque, como ya hemos mencionado, utilizaremos preferentemente la notación discreta, ambas fórmulas sirven para ver la conexión entre ambos tipos de formulación. Obsérvese que podemos pasar de (7) a (8) simplemente con reemplazar la integral por el sumatorio y utilizando (6).

La notación anterior también deja clara la dependencia de μ respecto a la distribución de renta particular de la que estamos hablando, *F*, que en el caso discreto especificamos de forma alternativa como el vector de rentas, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, de dimensión *n*, en la sociedad *N*. En general se dará por supuesto esta dependencia, de forma que escribiremos (8) simplemente como $\mu = \left(1/n\right) \Sigma_{i=1}^{n} y_i$.

De igual forma que la media, μ, los índices de desigualdad de la distribución de la renta, que hemos mencionado al principio de este capítulo, no son más que funciones, $I : \Im \mapsto \mathbb{R}$, cuyo significado vendrá dado por el enfoque particular adoptado en la medición de la desigualdad y, en concreto, por los axiomas que introduciremos en el capítulo siguiente, derivados de principios éticos, simple intuición y conveniencia matemática.

La proporción de renta del individuo *i* en la renta total viene dada por

$$s_i = \frac{y_i}{\Sigma_{j=1}^{n} y_j} = \frac{y_i}{n\mu} \tag{9}$$

Si como ya hemos indicado, $p_i = F(y_i)$ representa la proporción de población en la sociedad con una renta igual o inferior a y_i, la proporción de renta acumulada por dicha población viene dada por $r_i = \Sigma_{j=1}^{i} s_j$, dado que nuestra distribución de rentas $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ ya está ordenada de forma no decreciente. Veremos, en el capítulo 2, que estas proporciones juegan un papel muy importante en el instrumental analítico sobre medición de la desigualdad.

Una función que también juega un papel importante en el análisis de la distribución de la renta es la *función cuantil.* La utilización de *cuantiles* simplifica en muchas ocasiones la exposición de algunas cuestiones y además los cuantiles se utilizan directamente como medidas para el análisis y comparación de distribuciones. La función cuantil, Q, se define implícitamente como $F(Q(p)) = p$, o utilizando la inversa de la función de distribución, F, como $Q(p) = F^{-1}(p)$. Es decir, $Q(p)$ representa el nivel de renta tal que, una proporción de población $p \in [0,1]$, disfruta de dicho nivel de renta o uno inferior.

De forma algo más técnica, para cualquier $F \in \Im$ y para todo $0 \leq p \leq 1$, definimos la función cuantil como

$$Q(F;p) = \inf\{y \mid F(y) \geq p\} \tag{10}$$

donde inf es el ínfimo del conjunto y de nuevo incluimos a F como argumento de Q para subrayar la dependencia de la función respecto a la distribución de renta concreta.

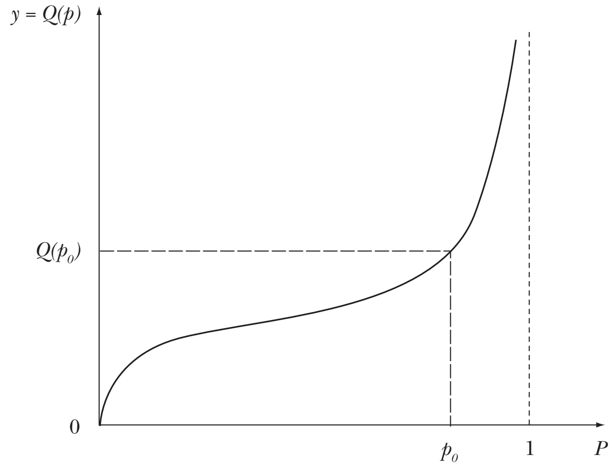
En la práctica, la definición (10) implica que, dado nuestro vector ordenado de rentas, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, asociamos n cuantiles discretos sobre el intervalo de $p \in (0,1]$, de forma tal que para

$$\frac{i-1}{n} < p \leq \frac{i}{n}, \text{ entonces } Q(p_i) = y_i, \ \forall i \in N$$ [12]

[12] Por otra parte, los cuantiles pueden ser definidos en forma de una correspondencia (Gastwirth 1971; Kendall y Stuart 1977). En el caso en que F es discreta, los cuantiles son simplemente un conjunto de valores de renta tales que $Q(p) = \{y \mid F(y) = p\}$. El conjunto completo de dichos cuantiles se corresponde con el vector de rentas, $\mathbf{y}$ en (1), y que se corresponde con las proporciones de población en (4), $p_i = i/n \quad \forall i \in N$.

Si a partir de una distribución discreta se desean cuantiles continuos, lo que es habitual en la práctica, estos pueden ser obtenidos por procedimientos estándares de interpolación (Kendall y Stuart 1977; Goerlich 2000).

GRÁFICO 4: **Función percentil de la distribución de la renta, *F***



Fuente: Elaboración propia.

Alternativamente, si la variable renta es continua, entonces $Q(p)$ es el nivel de renta de aquel individuo cuyo ranking en la distribución es exactamente p. De esta forma una proporción p de individuos en la sociedad es más pobre que él, y una proporción $1 - p$ es más rico que él.

El gráfico de la función cuantil no es sino una simple rotación y reflexión del gráfico de la función de distribución acumulativa, F. El gráfico 4 muestra dicha función para el caso continuo, obtenida directamente del gráfico 2.

Puesto que en el gráfico 4 la población está en el eje de abscisas, ordenada según niveles de renta, y las rentas correspondientes a dicha población se representan en el eje de ordenadas, es posible parodiar el gráfico como un «desfile de enanos y gigantes» (Pen 1971), en el que la renta de cada individuo vendría representada de forma figurada por su altura física. De esta forma la desigualdad y el bienestar en una sociedad podrían ser expresados en términos del *perfil de rentas* de los individuos de dicha sociedad.

La comparación de los gráficos 2 y 4 revela que la función Q no ofrece más información que la contenida en la función F, pero representa una forma útil y complementaria de analizar los problemas relacionados con la distribución de la renta. Por ejemplo, $Q(0{,}50)$ representa la *mediana* de F, es decir el nivel de renta que divide la distribución en dos partes iguales, superiores e inferiores a dicho nivel y, en cada parte, tenemos a la mitad de la sociedad, $Q(0{,}25)$ representa el nivel de renta que divide la distribución en dos partes, por debajo de dicho nivel encontramos el 25% más pobre de la sociedad y por encima del mismo el 75% más rico, de idéntica forma $Q(0{,}75)$ representa el nivel de renta que divide la distribución en dos partes, por debajo de dicho nivel encontramos el 75% más pobre de la sociedad y por encima del mismo el 25% más rico. $Q(0{,}25)$ y $Q(0{,}75)$ son denominados también el primer y el tercer cuartil respectivamente. El segundo cuartil coincide con la mediana, $Q(0{,}50)$.

A partir de esta interpretación resulta obvio cómo la comparación de cuantiles entre los extremos de la distribución puede ayudarnos a completar nuestra visión de la distribución de la renta en la sociedad.

Una última observación con respecto a la función Q. Considerando el vector ordenado de rentas $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, como los cuantiles correspondientes a $p_i = i/n$, entonces $Q(p_i) = y_i$, $\forall i \in N$, por lo que la media de F, (8), puede ser escrita alternativamente como

$$\mu(N, \mathbf{y}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} Q(p_i) \tag{11}$$

en el caso discreto, o

$$\mu(F) = \int_0^1 Q(p)dp \tag{12}$$

en el caso continuo. El área bajo la función cuantil en el gráfico 4 es pues la media de la distribución F.

Esta dualidad entre (8) y (11), o alternativamente entre (7) y (12), significa que los índices de desigualdad, $I : \Im \mapsto \mathbb{R}$, que analizaremos a continuación podrán ser expresados directamente en términos de F o alternativamente en términos de Q.

Antes de abandonar esta sección sobre notación y terminología, debemos comentar brevemente la cuestión de la comparación entre índices de desigualdad, un tema que aparecerá con frecuencia durante la discusión que sigue.

Como veremos a continuación en el capítulo 1, un índice de desigualdad, $I : \Im \mapsto \mathbb{R}$, es una *representación numérica escalar* de un fenómeno complejo y multidimensional como es la distribución de la renta en una sociedad determinada. Lamentablemente, como veremos en el capítulo 5, es cierto que las comparaciones entre distribuciones son sensibles a la elección del índice elegido, ya que las diferentes medidas de desigualdad tienden a enfatizar de forma distinta la desigualdad en distintas partes de la distribución de la renta, *F*. Por ello resulta útil examinar algunos conceptos relacionados con la cuestión de la comparación entre índices.

Dados dos índices de desigualdad diremos que son *ordinalmente equivalentes* si proporcionan la misma ordenación sobre diferentes vectores de renta, **y**. Por tanto ante la pregunta: si la distribución $\mathbf{y}_A$ es más desigual que la distribución representada por $\mathbf{y}_B$, todos aquellos índices que sean ordinalmente equivalentes proporcionarán la misma respuesta. En este sentido el concepto de representación numérica asociada al índice hace referencia al concepto de ranking.

Diremos que dos índices de desigualdad son *cardinalmente equivalentes* si un índice es una transformación proporcional del otro. De esta forma, además de generar la misma ordenación sobre diferentes vectores de renta, **y**, muestran el mismo porcentaje de variación al comparar dos situaciones diferentes. Es decir, si comparamos la distribución $\mathbf{y}_A$ con la representada por $\mathbf{y}_B$, todos aquellos índices que sean cardinalmente equivalentes nos indicarán el mismo porcentaje de variación en la desigualdad entre ambas situaciones. Obviamente equivalencia cardinal implica equivalencia ordinal, pero no a la inversa.

Por ello hemos de ser muy cuidadosos a la hora de interpretar el significado de las variaciones que experimenta la desigualdad. Porque, salvo que los indicadores resulten cardinalmente equivalentes, la variación observada dependerá del índice considerado.

PRIMERA PARTE

ÍNDICES DE DESIGUALDAD

En esta parte del estudio estudiamos con detalle los índices de desigualdad tanto desde un enfoque positivo como normativo, si bien dejamos para la segunda parte un análisis más detallado de esta segunda vía. Presentamos de forma sistemática una serie de resultados que, si bien son ampliamente conocidos, se encuentran muy dispersos en literatura. Hemos elaborado la exposición unificando la notación e introduciendo los diversos conceptos de modo progresivo y articulado.

Con carácter preliminar y con objeto de fijar un marco de referencia, dedicamos el capítulo 1 a formalizar el concepto de índice de desigualdad y a presentar un conjunto de propiedades que identifican una familia de índices que servirá como elemento de contraste con los distintos indicadores que vamos analizando. Los tres capítulos siguientes (capítulos 2, 3 y 4), discuten los índices de desigualdad habitualmente utilizados en la literatura, tanto teórica como aplicada. Los capítulos 2 y 3 adoptan un enfoque positivo, incluyendo aquí el estudio de los índices generados desde la teoría de la información. Desde un punto de vista histórico estos son los índices que aparecieron inicialmente y que, en su mayoría, proceden de la estadística descriptiva. Prestamos especial atención al índice de Gini, omnipresente en el análisis de la desigualdad, y su relación con la curva de Lorenz, así como a los índices de Theil, que aparecerán posteriormente. Por su parte, el capítulo 4 adopta un enfoque normativo y se centra en la familia de índices de Atkinson. Aparecen aquí algunos de los conceptos clave que articulan la segunda parte. Junto con la definición de los diversos índices, se estudia sus principales propiedades y limitaciones, lo que sirve para descartar algunos de los índices habitualmente utilizados.

El capítulo 5 analiza hasta qué punto y en qué condiciones los diversos índices de desigualdad van a ordenar de igual forma distribuciones de renta alternativas. Introducimos aquí un concepto importante en la literatura sobre medición de la desigualdad, la dominancia de Lorenz. También aquí asoman algunos de los temas básicos del análisis del bienestar que serán retomados en la segunda parte del estudio.

Los dos últimos capítulos de esta primera parte (capítulos 6 y 7) analizan una propiedad importante de los índices de desigualdad, la descomponibilidad según diferentes criterios. Esta propiedad se ha revelado tremendamente útil en la práctica. Aunque la descomponibilidad aditiva es introducida ya en el capítulo 1, como una propiedad deseable de los índices de desigualdad, el principio general de descomponibilidad es mucho más amplio de lo que se menciona en dicho capítulo. Al mismo tiempo la literatura reciente ha generado nuevas familias de índices de desigualdad a partir de la imposición de diversas formas alternativas de descomponibilidad. Todo ello es examinado en estos dos capítulos que cierran la primera parte del estudio.

1. Propiedades básicas de los índices de desigualdad

1.1. Planteamiento

El problema fundamental del que queremos ocuparnos puede expresarse en los siguientes términos. Sean $N=\{1,2,\ldots,n\}$ y $M=\{1,2,\ldots,m\}$ dos sociedades con n y m individuos respectivamente, y sean $\mathbf{y}=(y_i)_{i\in N}=(y_1,y_2,\ldots,y_n)$, $\mathbf{z}=(z_i)_{i\in M}=(z_1,z_2,\ldots,z_m)$ dos distribuciones de renta correspondientes a cada una de estas sociedades. ¿Podemos decir si $\mathbf{y}=(y_i)_{i\in N}$ es más o menos igualitaria que $\mathbf{z}=(z_i)_{i\in M}$?

Para poder contestar a esta pregunta necesitamos disponer de un criterio de valoración que nos permita comparar distribuciones de renta de distinta dimensionalidad, correspondientes a sociedades diferentes.[13] Idealmente buscamos un *criterio de ordenación* que resulte aplicable a cualquier par de situaciones distributivas, es decir, una relación binaria transitiva y completa vinculada a la noción de *ser más desigual que.*

Un modo natural, aunque no el único, de establecer dicha relación es mediante una función *I*, definida sobre el espacio de distribuciones, $\Im$, que asigne un número real a cada posible distribución de renta, $I:\Im\mapsto\mathbb{R}$. Es decir, a cada posible distribución de renta $\mathbf{y}=(y_i)_{i\in N}$, para cada posible sociedad *N*, la función $I:\Im\mapsto\mathbb{R}$ asigna un número real que representa la desigualdad de dicha distribución. Dicha función deberá tener propiedades que hagan que la

[13] Adviértase, no obstante, que un caso particular de especial relevancia es aquel en que comparamos las distribuciones de renta de una misma sociedad en dos situaciones diferentes, es decir, cuando $N = M$. Por ejemplo, en el caso de analizar el impacto de una medida de política económica, como un análisis de la redistribución impositiva, o cuando se trata de analizar la evolución en la distribución de la renta en una determinada sociedad que no presenta crecimiento en su población.

medida de desigualdad sea consistente con nuestras intuiciones básicas y principios éticos sobre lo que es desigualdad. De este modo, ser más desigual se traducirá en un *valor mayor de la función* $I : \Im \mapsto \mathbb{R}$.

En este capítulo presentamos un conjunto de propiedades que suelen ser consideradas *deseables* y que verifican la mayor parte de los índices de desigualdad habituales utilizados tanto en trabajos teóricos como empíricos. Estas propiedades nos servirán como elemento de referencia a la hora de analizar los diferentes índices, confrontando cuáles de dichas propiedades satisface cada uno. Más concretamente, presentamos a continuación *siete propiedades* o *axiomas* que resulta razonable exigir para que una función pueda considerarse como un índice de desigualdad. Dichos requisitos constituyen un test al que someteremos cualquier función que se quiera utilizar como medida de desigualdad. Es interesante subrayar que, aunque estas siete propiedades no consiguen identificar unívocamente una única forma de medir la desigualdad, sí determinan una familia importante de índices de desigualdad.

De forma general un índice de desigualdad puede definirse como una función $I : \Im \mapsto \mathbb{R}$, donde $\Im$ es el espacio de todas las funciones de distribución de renta posibles; en nuestro mundo discreto, el conjunto de todos los pares $(N, \mathbf{y})$ que describen una cierta sociedad y una distribución de renta. Con esta formulación subrayamos el hecho de que la forma de medir la desigualdad puede depender tanto de la distribución específica, como de la sociedad en la que ocurra; en particular puede depender del tamaño de la sociedad (el número de individuos de N). Cuando las posibles sociedades que consideramos tienen un número finito de individuos y, en consecuencia, tratamos con distribuciones de renta discretas, es frecuente formular la noción de índice de desigualdad como una función $I(n, \mathbf{y})$, donde n es el cardinal (número de individuos) de N. En lo sucesivo, haremos uso de esta formulación específica, es decir, supondremos implícitamente que la función $I : \Im \mapsto \mathbb{R}$ depende solo del número de individuos de N y no de otras posibles características de la sociedad.

Cuando la discusión se centra en una sociedad dada con n individuos, o se refiere a sociedades con el mismo número n de individuos, bajo el supuesto de que este número es el único aspecto relevante de las distintas sociedades que debe tomar en cuenta el índice, entonces suele definirse el índice de desigualdad simplemente como una función $I:\mathbb{R}^n_{++} \to \mathbb{R}$, donde $I(\mathbf{y})$ es el valor del índice con $\mathbf{y}=(y_1, y_2, \ldots, y_n)$. Recuérdese que tomamos la distribución de renta ya ordenada, es decir, $y_1 \leq y_2 \leq y_3 \leq \ldots \leq y_{n-1} \leq y_n$.

1.2. Propiedades de referencia

Consideraremos ahora algunas propiedades o axiomas que requerimos para que una función de esta naturaleza pueda ser considerada como un índice de desigualdad.

La primera propiedad que formulamos es muy simple. Establece que la desigualdad es cero cuando todas las rentas son iguales, mientras que es positiva en todos los demás casos. Formalmente:

Propiedad (1.1): Normalización

Dada una sociedad *N*, si $y_i = \mu \ \forall i$, donde

$$\mu = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$$

representa la renta media de esta sociedad, entonces $I(n,(\mu,\mu,\ldots,\mu))=0$. En caso contrario, $I(n,\mathbf{y})>0$.

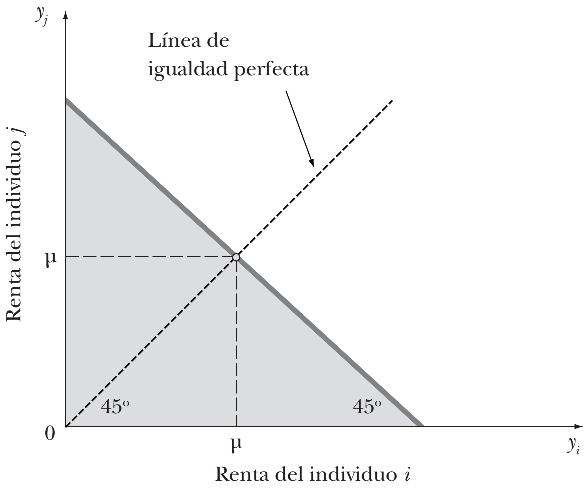
La propiedad (1.1) es pues una restricción de normalización, que establece que la desigualdad es cero en aquellas distribuciones donde todos los individuos perciben la misma renta. En términos del gráfico 1.1 distribuciones de renta a lo largo de la *línea de igualdad* (bisectriz) proporcionan un valor de *I* igual a 0.

Denominamos *distribuciones igualitarias* a aquellas distribuciones en las que cada individuo recibe idéntica renta. La función de distribución acumulativa, *F*, para una distribución de renta igualitaria, que designaremos por *H*, es una distribución degenerada que viene dada por

$$H(y)=\begin{cases}1 & \text{si } y \geq \mu \\ 0 & \text{en caso contrario}\end{cases} \tag{1.1}$$

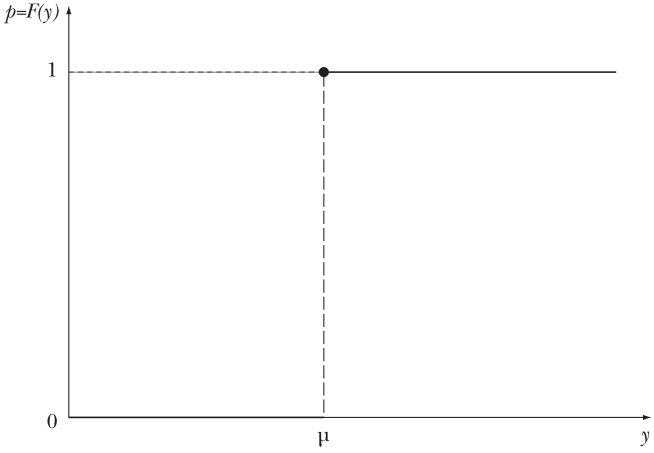
Por tanto, toda la población de la sociedad se concentra en un solo punto. El gráfico 1.2 ilustra esta situación. La propiedad (1.1) indica que $I(H) = 0$.

GRÁFICO 1.1: **Distribución de la renta igualitaria en una sociedad con dos individuos**



Fuente: Elaboración propia.

GRÁFICO 1.2: **Función de distribución acumulativa de la distribución de la renta igualitaria, *H***



Fuente: Elaboración propia.

Observación (1.1): La normalización impuesta por la propiedad (1.1) siempre puede conseguirse de forma trivial mediante un cambio de origen. Para cualquier índice $I(F)$, siempre es posible conseguir un índice normalizado ordinalmente equivalente como $I(F) – I(H)$.

Observación (1.2): Aunque la propiedad (1.1) impone una cota inferior al índice de desigualdad, independiente del tamaño de la población, no impone ninguna cota superior. En general no tiene, necesariamente, por qué estar acotado superiormente. Encontraremos, no obstante, que muchos índices con propiedades interesantes están acotados en el intervalo [0, 1]. Además, cuando este no sea el caso, muchas veces es posible encontrar un índice ordinalmente equivalente a *I(F)* que esté acotado entre [0, 1] mediante un cambio de escala. En concreto, cuando el índice original tenga un máximo finito siempre es posible la normalización sin afectar las propiedades ordinales del índice, simplemente dividiendo por dicho valor máximo. Adviértase, no obstante, que con este proceso de normalización, podemos perder algunas de las propiedades cardinales del índice.

La segunda propiedad es también muy natural, aunque incorpora un juicio de valor muy relevante. Se trata de la propiedad de *simetría*, también conocida como *anonimato*, que establece que la medida de desigualdad toma en cuenta la distribución de la renta pero no quién es el individuo que la detenta. Por ello, dos vectores de distribuciones de renta correspondiente a una sociedad de n miembros que contengan idénticos números pero ordenados de forma diferente, deben dar lugar al mismo valor de la función. Más formalmente:

Propiedad (1.2): Simetría

Dada una sociedad *N*, sean $\left(y_i\right)_{i\in N}$ y $\left(y_i'\right)_{i\in N}$ dos distribuciones de renta tales que $\left(y_i'\right)_{i\in N}$ se obtiene como una permutación[14] de $\left(y_i\right)_{i\in N}$. Entonces, $I\left(n,\left(y_i\right)_{i\in N}\right)=I\left(n,\left(y_i'\right)_{i\in N}\right)$.

La propiedad (1.2) requiere que el criterio de ordenación utilizado, solo tenga en cuenta información acerca de la variable renta

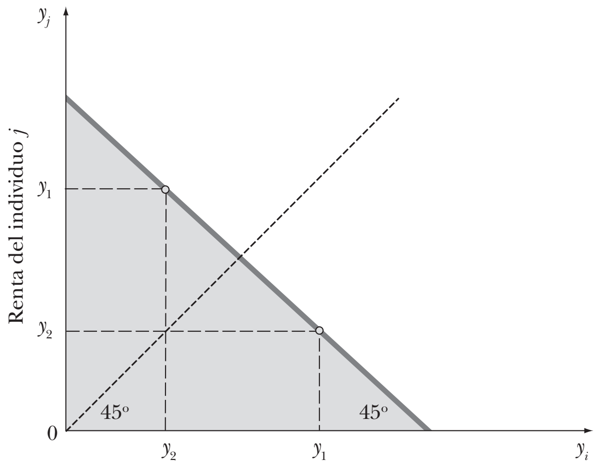
[14] Por ejemplo $\mathbf{y}=(y_1,y_2,\dots,y_n)$ y $\mathbf{y}'=(y_2,y_1,\dots,y_n)$. La propiedad (1.2) implica que $I(n,\mathbf{y})=I(n,\mathbf{y}')$. Puesto que los vectores de renta los tomamos ordenados, la permutación de los sub-índices en $\mathbf{y}$ índica una permutación de los individuos que ostentan determinadas rentas, es decir, en $\mathbf{y}'$ los individuos etiquetados como 1 y 2 han intercambiado sus rentas, pero los valores numéricos de ambos vectores son idénticos.

y no de otras características del individuo.[15] Como ya mencionamos en la introducción adoptamos un enfoque unidimensional, en el que todo aquello que afecta al nivel de vida del individuo ha quedado resumido en y.

En términos gráficos la propiedad (1.2) requiere que las dos distribuciones mostradas en el gráfico 1.3 proporcionen el mismo valor del índice de desigualdad.

Observación (1.3): Para ciertas cuestiones relacionadas con el análisis de la distribución de la renta puede ser interesante prescindir de la propiedad de simetría. Por ejemplo, en un contexto dinámico en el que se dispone de información sobre la distribución de la renta en dos periodos de tiempo, el análisis de la distribución corriente que invoque la propiedad de simetría ignora cualquier relación con la distribución anterior. Un tema relacionado con la movilidad intradistribucional que no analizaremos.

GRÁFICO 1.3: Simetría en la distribución de la renta en una sociedad con dos individuos



Fuente: Elaboración propia.

[15] Cuando dichas características afectan a su nivel de vida o bienestar entonces sería más apropiado utilizar una versión más general de la propiedad de simetría, aplicable a comparaciones multidimensionales (Atkinson y Bourguignon 1982).

La tercera propiedad hace referencia a la relación entre índices correspondientes a sociedades con distinto número de individuos. Para motivarla supongamos que tenemos dos sociedades A y B que son idénticas en todos los aspectos relevantes. Esto es, A y B tienen la misma población y la misma distribución de renta. La desigualdad en A y B es, por tanto, la misma. Si A y B se fusionan en una sola comunidad, C, tanto el tamaño de la población total como el número de individuos en cada nivel de renta se duplicará. Parece natural requerir que la desigualdad en la comunidad C sea la misma que la que tenían las sociedades A o B por separado. Esta propiedad fue introducida por Dalton (1920) y recibe el nombre de *principio de réplica de las poblaciones*. Se formula como sigue:

Propiedad (1.3): Principio de réplica de las poblaciones (Dalton 1920)

Dada una sociedad N con una distribución de renta $(y_i)_{i\in N}$. Consideremos una nueva sociedad N^k que consiste en una réplica de k veces la sociedad N con su correspondiente distribución de renta, $(y_i)_{i\in N^k}$. Es decir,

$$N^k = (\underbrace{N, N, \ldots, N}_{k}) = \{\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{k}, \underbrace{2, 2, \ldots, 2}_{k}, \ldots, \underbrace{n, n, \ldots, n}_{k}\}$$

y la distribución de renta correspondiente,

$$\begin{aligned}(y_i)_{i\in N^k} &= \Big(\underbrace{(y_i)_{i\in N}, (y_i)_{i\in N}, \ldots, (y_i)_{i\in N}}_{k}\Big) \\ &= \Big(\underbrace{y_1, y_1, \ldots, y_1}_{k}, \underbrace{y_2, y_2, \ldots, y_2}_{k}, \ldots, \underbrace{y_n, y_n, \ldots, y_n}_{k}\Big)\end{aligned}$$

Entonces, $I\left(n, (y_i)_{i\in N}\right) = I\left(n^k, (y_i)_{i\in N^k}\right)$.

La propiedad (1.3) implica que la unión de poblaciones idénticas entre sí no altera la desigualdad. Aunque es una propiedad razonable e intuitiva, el siguiente ejemplo (Cowell 1995) muestra que esta propiedad puede no ser siempre deseable. Supongamos una sociedad con dos individuos, uno recibe toda la renta y otro nada. Dupliquemos esta sociedad, de forma que ahora tenemos cuatro individuos, dos comparten toda la renta de la sociedad a partes iguales y los otros dos no disponen de nada. ¿Diríamos que la desigualdad en ambas sociedades es idéntica? El principio de réplica de las poblaciones afirma que sí.[16]

Puesto que el principio de réplica de las poblaciones implica que el número de individuos en cada nivel de renta se ve alterado en la misma proporción, el índice de desigualdad que satisfaga esta propiedad dependerá solo de las frecuencias de población relativas en cada nivel de renta, no de las frecuencias de población absolutas.[17] Este supuesto juega también un papel relevante de cara a poder efectuar comparaciones entre poblaciones con distinto número de individuos, mediante el recurso de buscar el mínimo común múltiplo de ambas y efectuar así comparaciones entre poblaciones replicadas con igual número de individuos. Para comprobarlo consideremos el siguiente ejemplo de dos sociedades, A y B, con dos y tres miembros, respectivamente. La distribución de la renta en la sociedad A es: $\mathbf{y}_A = (y_{A1}, y_{A2})$; en la sociedad B es: $\mathbf{y}_B = (y_{B1}, y_{B2}, y_{B3})$. Si ahora replicamos tres veces la sociedad A y dos la sociedad B, tendremos:

$$\mathbf{y}_A^3 = (y_{A1}, y_{A2}, y_{A1}, y_{A2}, y_{A1}, y_{A2}),\ \mathbf{y}_B^2 = (y_{B1}, y_{B2}, y_{B3}, y_{B1}, y_{B2}, y_{B3})$$

que corresponden a dos distribuciones de renta de las mismas dimensiones. Puesto que $I(\mathbf{y}_A) = I(\mathbf{y}_A^3)$, $I(\mathbf{y}_B) = I(\mathbf{y}_B^2)$, según el principio de réplica de poblaciones, tendremos que $I(\mathbf{y}_A) \geq I(\mathbf{y}_B)$ $\Leftrightarrow$ $I(\mathbf{y}_A^3) \geq I(\mathbf{y}_B^2)$. Es decir, podemos comparar A y B a partir de las poblaciones replicadas convenientemente.

Para introducir la siguiente propiedad comenzaremos por definir el concepto de transferencia de Dalton, introducido por Dalton (1920) siguiendo una idea de Pigou (1912).[18] Dada una sociedad compuesta por n individuos con una distribución de renta $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, denominamos transferencia de Dalton a una transferencia de renta de un individuo rico a un individuo pobre,

---

[16] Sobre la comparación de distribuciones en términos de desigualdad entre poblaciones diferentes véase Salas (1998).

[17] En el caso de distribuciones continuas esto es equivalente a que el índice pueda ser calculado sólo a partir de la función de densidad.

[18] Por ello se las suele denominar transferencias de Pigou-Dalton.

sin que su posición relativa cambie, es decir, sin que el ranking de ambos individuos se vea alterado en la distribución.[19] Considérense dos individuos con rentas $y_j < y_i$, y un número real $\delta > 0$, una transferencia de Dalton consiste en una reducción de δ unidades de renta del individuo *i*, con renta y_i, al tiempo que se incrementa en δ unidades la renta del individuo *j*, con renta y_j, de modo que $y_j + \delta \leq y_i - \delta$, por tanto $0 < \delta \leq \left(y_i - y_j\right)/2$. Obsérvese que una transferencia de Dalton no afecta a la media, μ, de la distribución.[20]

Observación (1.4): Tal y como ha sido definida, una transferencia de Dalton no tiene porqué tener lugar entre dos individuos consecutivos en el ranking. La única restricción es que el individuo *j* no sea más rico que el individuo *i* a consecuencia de la transferencia, aunque puede ser igualmente rico. En ocasiones es útil considerar una transferencia de Dalton especial en la que la transferencia tiene lugar entre individuos consecutivos en el ranking, de forma que $j = i - 1$ y $0 < \delta \leq \left(y_i - y_{i-1}\right)/2$. Llamaremos a esta operación transferencia de Dalton elemental. Es posible demostrar con facilidad que cualquier transferencia de Dalton es equivalente a una sucesión finita de transferencias elementales de Dalton y permutaciones entre individuos (Arnold 1987, cap. 2).

La cuarta propiedad establece que toda transferencia de Pigou-Dalton reduce la desigualdad. Formalmente:

Propiedad (1.4): Principio de las transferencias de Dalton (1920)
Dada una sociedad *N*, sean $\mathbf{y}_A$ e $\mathbf{y}_B$ dos distribuciones de renta tales que $\mathbf{y}_B$ se obtiene mediante una transferencia de Dalton a partir de $\mathbf{y}_A$. Entonces, $I(n, \mathbf{y}_B) < I(n, \mathbf{y}_A)$.

En términos del gráfico 1.3 la propiedad (1.4) implica que, partiendo de una distribución dada, una transferencia de Dalton nos

[19] La transferencia puede, sin embargo, igualarlos, pero no alterar su ranking en la distribución.

[20] En ocasiones, este tipo de transferencias también se las conoce como transferencias progresivas. Obviamente es posible definir el concepto de transferencia de Dalton como una transferencia de renta de pobres a ricos, en este caso hablamos de transferencias regresivas.

acerca a la línea de igualdad sin sobrepasarla y, en consecuencia, la desigualdad se reduce. Si el ranking se altera, es decir, sobrepasamos la línea de igualdad, entonces no es posible saber qué sucede con la desigualdad. Así la propiedad de simetría indica que si los individuos permutan sus posiciones, la desigualdad permanece constante. La permutación de posiciones no constituye una transferencia de Dalton, puesto que el ranking entre los individuos se altera.[21]

Adviértase que esta propiedad puede aplicarse de forma reiterada, es decir, si $\mathbf{y}_B$ es una distribución de renta que se obtiene de $\mathbf{y}_A$ mediante una serie de transferencias de Dalton, entonces $I(n,\mathbf{y}_B) < I(n,\mathbf{y}_A)$.

Observación (1.5): Obsérvese que la propiedad (1.4) exige que una transferencia de Dalton reduzca de forma inequívoca la desigualdad, $I(n,\mathbf{y}_B) < I(n,\mathbf{y}_A)$. Sería posible relajar esta condición exigiendo que dicha transferencia simplemente no incremente la desigualdad, es decir que $I(n,\mathbf{y}_B) \leq I(n,\mathbf{y}_A)$. Algunos de los índices que examinaremos en los capítulos siguientes cumplen esta última propiedad, pero no la propiedad (1.4); otros ni siquiera cumplen esta propiedad más débil. Puesto que relajar el principio de las transferencias de Dalton no ayuda a resolver nuestra principal cuestión de interés, en términos de la ordenación de distribuciones de renta, no insistiremos en él.

Observación (1.6): Tal y como ha sido enunciada, la propiedad (1.4) se la conoce en ocasiones como el principio débil de las transferencias de Dalton. La razón es que todo lo que exige es que, dada una transferencia de Dalton, la desigualdad se reduzca. Sin embargo, no nos dice nada acerca de cuánto debe reducirse. Existen varias formas de fortalecer la propiedad (1.4). Por ejemplo, es posible enunciar un principio más fuerte si introducimos el requisito de que la reducción en la desigualdad, para una trans-

[21] La inspección del gráfico 1.3 muestra que, suponiendo simetría, el factor clave para que la desigualdad se reduzca es que la distancia entre los individuos entre los que tiene lugar la transferencia (medida por su renta) disminuya a consecuencia de ella. Por tanto, la transferencia nos sitúa en un punto intermedio entre las dos distribuciones mostradas en el gráfico, o dicho con otras palabras, la transferencia genera una nueva distribución que es una combinación convexa de las dos mostradas.

ferencia de Dalton dada, dependa solamente de la distancia entre las proporciones de renta del individuo rico y del individuo pobre, medidas según una función de evaluación de rentas determinada (Cowell y Kuga 1981b; Cowell 1995).

La continuidad de la función, $I : \Im \mapsto \mathbb{R}$, con respecto a cambios en la renta será nuestra quinta propiedad. Aunque aparentemente se trata de un requisito meramente analítico, una propiedad operativa, su significado es importante también desde un punto de vista sustantivo: la continuidad de $I(\mathbf{y})$ establece que pequeños cambios en la distribución generan pequeños cambios en el valor del índice. Excluye por tanto la presencia de saltos en la valoración de distribuciones de renta arbitrariamente próximas. Puesto que suponemos rentas estrictamente positivas, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n_{++}$, expresamos este requisito con respecto a distribuciones en el interior del ortante positivo del espacio correspondiente. Es decir,

Propiedad (1.5): Continuidad

La función $I(n, \mathbf{y})$ es continua en $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n_{++}$.

De esta forma, como ya indicamos en la introducción, aunque suponemos un mundo discreto y finito en el que observamos la distribución de renta $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, consideramos que dicha distribución de renta proviene de un proceso generador de datos con soporte continuo. Es decir, para cada individuo la renta que puede obtener constituye una variable continua, el ortante positivo de la recta real o un intervalo de la misma. Este es un supuesto razonable tal y como se obtienen los datos en el mundo real. Dado que se trata de un requisito de naturaleza similar, aunque obviamente más exigente, la incluimos en la propiedad (1.5) y escribimos:

Propiedad (1.5*): Diferenciabilidad

La función $I(n, \mathbf{y})$ es diferenciable en $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n_{++}$.

En ocasiones, para ganar operatividad analítica, se adopta una propiedad más fuerte que la continuidad: la diferenciabilidad de $I(\mathbf{y})$. La diferenciabilidad implica que cambios pequeños en las rentas comportan cambios pequeños no solo en el valor del indicador, sino además en su tasa de variación.

La siguiente propiedad resulta más discutible que las anteriores, puesto que implica que la desigualdad es un concepto esencialmente relativo, es decir, independiente de las magnitudes absolutas de las rentas que evaluamos. La propiedad de *independencia de la escala* establece que si en una sociedad con una distribución de renta dada multiplicamos todas las rentas por un escalar positivo, $\lambda > 0$, entonces la desigualdad no varía. Cuando interpretamos esta operación como un cambio de unidades, por ejemplo un cambio de pesetas a euros, la propiedad parece inatacable. Pero cuando esta modificación describe una variación de las rentas reales de los individuos, la cuestión resulta menos obvia. Aunque es ciertamente razonable suponer que cambios proporcionales en la renta no afectan a la desigualdad en la distribución, también puede argumentarse en sentido contrario. Es decir, que al aumentar la renta total manteniendo la distribución relativa de la misma, en realidad la situación ha variado, ya que ahora la distancia absoluta entre ricos y pobres ha aumentado.

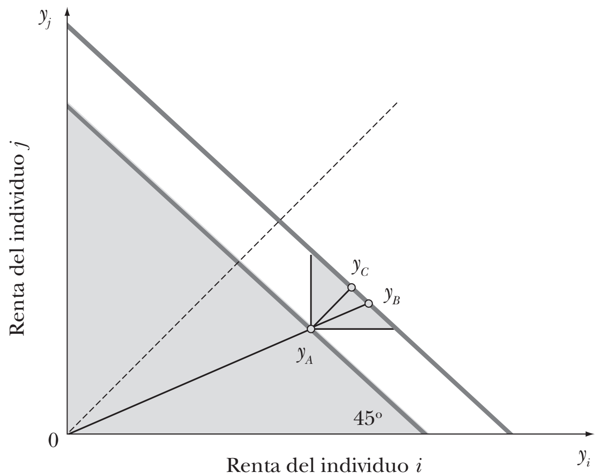
La cuestión de fondo es la de determinar qué tipo de transformaciones del vector de rentas mantienen constante el nivel de desigualdad. La aproximación relativa, que es la que seguiremos aquí, establece qué variaciones proporcionales no afectan al valor de la función $I : \Im \mapsto \mathbb{R}$. Alternativamente, podría considerarse que el tipo de variaciones de renta que no alteran el índice son las adiciones iguales para todos los individuos. Este segundo tipo de funciones corresponde a la noción de *índices de desigualdad absolutos*. Por el contrario, la propiedad de independencia de la escala corresponde a la noción de *índices de desigualdad relativos*. Remitimos al lector interesado a los trabajos de Kolm (1976a, 1976b) y Blackorby y Donaldson (1980) donde encontrará una amplia discusión acerca de los índices absolutos y relativos de desigualdad.

Propiedad (1.6): Independencia de la escala

Para todo escalar $\lambda > 0$, $I\left(n,(y_i)_{i\in N}\right) = I\left(n,(\lambda\, y_i)_{i\in N}\right)$.

Qué sucede con la desigualdad conforme la renta crece depende, en última instancia, de cómo midamos la desigualdad, es decir, de las propiedades de la función $I : \Im \mapsto \mathbb{R}$. La cuestión sobre la que trata la propiedad (1.6) acota la dirección en la que la desigualdad se mantiene constante conforme la renta de uno o

GRÁFICO 1.4: Transformaciones en la distribución de la renta y desigualdad en una sociedad con dos individuos



Fuente: Elaboración propia.

más individuos de la sociedad aumenta. El gráfico 1.4 ilustra la situación. Supongamos que partimos de una distribución de renta inicial $\mathbf{y}_A$. ¿En qué dirección desde $\mathbf{y}_A$ debemos mantener constante el grado de desigualdad de la sociedad cuando la renta de uno o ambos individuos aumenta? Podemos llamar a esta dirección la *dirección de invarianza*. Cualquier dirección dentro del triángulo pequeño sombreado sería una dirección válida, sin embargo aparecen dos direcciones singulares con una significación especial:

a) La dirección que representa un incremento proporcional en todas las rentas, de $\mathbf{y}_A$ a $\mathbf{y}_B$ en el gráfico. Esta dirección mantiene las distancias relativas de renta entre individuos, pero aumenta las distancias absolutas.
b) La dirección que representa un incremento absoluto idéntico de renta para todos los individuos, de $\mathbf{y}_A$ a $\mathbf{y}_C$ en el gráfico. Esta dirección mantiene las distancias absolutas de renta entre individuos, pero disminuye las distancias relativas, puesto que los pobres reciben proporcionalmente más que los ricos.

Situaciones intermedias son posibles y corresponden a la noción de *índices de desigualdad intermedios* (Pfingsten 1986; Bossert y Pfingsten 1990; Del Río y Ruiz-Castillo 2000; Cowell 2003, 2005).

La propiedad de independencia de la escala implica que $I(\mathbf{y}_A) = I(\mathbf{y}_B)$ en el gráfico 1.4.[22]

Desde un punto de vista formal, la propiedad de independencia de la escala establece que la función $I : \Im \mapsto \mathbb{R}$ es homogénea de grado cero en la distribución de la renta. Se trata de una propiedad *cardinal* que dota al índice de desigualdad de un significado cuantitativo preciso: la magnitud de las diferencias en el valor de la desigualdad entre dos distribuciones de renta resulta significativa.

Las cinco primeras propiedades consideradas eran de naturaleza ordinal, en el sentido de que si una función $I : \Im \mapsto \mathbb{R}$ las verifica, cualquier transformación monótona creciente que preserve el valor cero para la imagen de la distribución igualitaria también las cumple. Como en el caso de las funciones de utilidad, este tipo de índices de desigualdad constituyen representaciones funcionales de una ordenación y, por tanto, las magnitudes absolutas carecen de significado. Con la propiedad de homogeneidad de grado cero de la función $I : \Im \mapsto \mathbb{R}$ se introduce un elemento de cardinalidad que modifica el significado y la aplicabilidad de los índices de desigualdad.

Observación (1.7): Las direcciones de invarianza consideradas en el gráfico 1.4 son uniformes para todas las distribuciones de renta posibles, esto es, vienen determinadas por rectas a partir de la distribución inicial, $\mathbf{y}_A$. Más generalmente podríamos concebir un mapa de curvas iso-igualdad, donde las direcciones de invarianza cambiaran en diferentes partes del conjunto de posibles distribuciones de renta.

La última propiedad que consideraremos, denominada *descomponibilidad aditiva*, es también de naturaleza cardinal pero mucho más específica.[23] Se refiere al análisis de la desigualdad en una

---

[22] Por el contrario para un índice de desigualdad absoluto, $I(\mathbf{y}_A) = I(\mathbf{y}_C)$.

[23] La cuestión de la descomponibilidad de los índices de desigualdad será tratada de forma más extensa en los capítulos 6 y 7, donde consideraremos las posibilidades de descomposición según diversos criterios. No obstante, avanzamos aquí un resultado importante que se ha mostrado útil en la práctica.

sociedad compuesta de varias agrupaciones de individuos, definidas según algún criterio no relacionado directamente con el proceso de generación de la renta. Un ejemplo sería el caso de agrupaciones definidas por un criterio de tipo geográfico, como por ejemplo la pertenencia a los distintos territorios de un Estado. Otro sería el caso de grupos definidos por criterios antropológicos o sociológicos, como por ejemplo, una clasificación por sexos, etnias o grupos sociales. La propiedad de descomponibilidad introduce un principio de consistencia entre la forma de valorar la desigualdad presente en la sociedad globalmente considerada con la desigualdad de los grupos que la conforman. Para ello aspiramos a poder expresar la desigualdad total como la suma de dos componentes,

1) la desigualdad existente *dentro* de cado uno de los grupos (desigualdad intragrupos) y
2) la desigualdad existente *entre* los diferentes grupos (desigualdad intergrupos).[24]

Idealmente, la parte de la desigualdad total correspondiente a la desigualdad dentro de los grupos debiera ser una suma ponderada de los índices de desigualdad aplicados a cada uno de ellos, donde las ponderaciones reflejen el peso relativo de los mismos.[25] En cuanto a la parte de la desigualdad correspondiente a la desigualdad entre grupos, resulta razonable medirla aplicando la función $I : \Im \mapsto \mathbb{R}$ a una población compuesta por la unión de las poblaciones de los distintos grupos, donde a cada individuo de cada grupo le asignamos la renta media de ese grupo, de modo se anule la desigualdad dentro los grupos para este cálculo.

[24] Obsérvese que no es posible explicar la desigualdad total únicamente en términos de la desigualdad dentro de cada grupo. Para ilustrarlo, consideremos una población dividida en dos grupos (hombres y mujeres, digamos), tales que todos los individuos en el primer grupo tienen una renta igual a uno y todos los individuos, en el segundo grupo, una renta igual a dos. Es obvio que en esta sociedad existe desigualdad; pero no es menos obvio que nunca podremos expresar la desigualdad total (que es positiva) como suma ponderada de la desigualdad dentro de los grupos (que es igual a cero).

[25] En consecuencia, estas ponderaciones dependerán solo de las proporciones de renta y/o población de cada uno de los grupos.

Es decir, buscamos una formulación del tipo:

$$I(\mathbf{y}) = \underbrace{\sum\nolimits_g \omega_g I_g(\mathbf{y}^g)}_{\substack{\textit{Componente}\\ \textit{intragrupos}}} + \underbrace{I_o(\cdot)}_{\substack{\textit{Componente}\\ \textit{intergrupos}}} \tag{1.2}$$

Para formalizar este principio, sea N una sociedad compuesta por n individuos con una distribución de renta dada por el vector $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$. Supongamos ahora que esta sociedad podemos considerarla como la unión de G grupos diferentes, exhaustivos y mutuamente excluyentes entre sí, indiciados por el índice $g = 1, 2, 3, \dots, G$. Esta división de la sociedad en grupos se realiza en función de algún criterio independiente del proceso de generación de las rentas. Denotaremos por n_g el número de individuos del grupo g y por $\mathbf{y}^g = (y_1^g, y_2^g, \dots, y_{n_g}^g)$ su vector de rentas. La distribución de renta de la sociedad N puede expresarse ahora como $\mathbf{y} = (\mathbf{y}^1, \mathbf{y}^2, \dots, \mathbf{y}^G)$. Sea $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_G)$ el vector de rentas medias de cada grupo, siendo μ_g la renta media del grupo g, $\mathbf{n} = (n_1, n_2, \dots, n_G)$ el vector del número de individuos de cada grupo, y sea ι_{n_g} un vector unitario con n_g componentes, es decir $\iota_{n_g} = (\underbrace{1, 1, \dots, 1}_{n_g})$. Podemos establecer entonces la siguiente propiedad:

Propiedad (1.7): Descomponibilidad aditiva

Dada una sociedad N compuesta por G subgrupos de población, exhaustivos y mutuamente excluyentes, se cumple que:

$$I(n, \mathbf{y}) = \sum\nolimits_{g=1}^{G} \omega_g^G(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{n}) I(n_g, \mathbf{y}^g) + I(n, \mu_1 \iota_{n_1}, \dots, \mu_G \iota_{n_G})$$

para un conjunto de coeficientes ω_g^G, que son funciones que dependen de μ, de $\boldsymbol{n}$ y del número G de subgrupos de la partición.

1.3. Un resultado clásico

Shorrocks (1980) demuestra el siguiente resultado:

Teorema (1.1)

Una función $I : \Im \mapsto \mathbb{R}$ verifica las propiedades (1.1), (1.2), (1.3), (1.4), (1.5*), (1.6) y (1.7), si y solo si es de la forma:

$$I_\theta(n,\mathbf{y}) = \frac{1}{n}\frac{1}{\theta(\theta-1)}\sum_{i=1}^{n}\left[\left(\frac{y_i}{\mu}\right)^{\theta} - 1\right]$$

o bien una transformación proporcional creciente de esta función, $\alpha I_\theta(n,\mathbf{y})$ con $\alpha > 0$, y donde θ es un parámetro real que puede tomar cualquier valor, positivo, cero o negativo.

Demostración

Véase Shorrocks (1980, sección 6, teorema 5).

Por lo tanto, las siete propiedades enunciadas definen una familia uniparamétrica de índices de desigualdad cuyos miembros son identificados por el valor del parámetro θ.

Obsérvese que para los valores $\theta = 0$ ó $\theta = 1$ obtenemos una indeterminación en $I_\theta(n,\mathbf{y})$. Mediante el recurso a la regla de L'Hôpital podemos encontrar la forma funcional correspondiente a estos valores. Estas formas funcionales son las siguientes,[26]

$$I_0(n,\mathbf{y}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\log\frac{\mu}{y_i} \tag{1.3}$$

para $\theta = 0$, y

$$I_1(n,\mathbf{y}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{y_i}{\mu}\log\frac{y_i}{\mu} \tag{1.4}$$

para $\theta = 1$.

Estos dos índices son bien conocidos en la literatura sobre desigualdad ya que fueron propuestos por Theil (1967) a partir del enfoque basado en la teoría de la información. Como veremos en los capítulos siguientes, $I_0(n,\mathbf{y})$ y $I_1(n,\mathbf{y})$ juegan un papel importante en la medición de la desigualdad dadas sus propiedades.

Por razones que quedarán claras a lo largo de la exposición, a esta familia de índices de desigualdad se la conoce como la familia

[26] Todos los logaritmos se entiende que son logaritmos naturales o neperianos, es decir, base *e*.

de los *índices de entropía generalizada*. Estos índices están acotados superiormente para valores positivos del parámetro θ, pero no para valores negativos.

El parámetro θ puede interpretarse como una medida de aversión a la desigualdad, en el sentido de que proporciona una medida de la sensibilidad del índice a las transferencias entre ricos y pobres. Shorrocks (1980) muestra que conforme θ disminuye el índice es más sensible a las transferencias en la parte inferior de la distribución. En el límite, conforme $\theta \to -\infty$, el índice se concentra en el extremo inferior de la distribución. Por el contrario, conforme θ aumenta el índice se vuelve más sensible a las transferencias en la parte superior de la distribución. En el límite, conforme $\theta \to \infty$, el índice se concentra en el extremo superior de la distribución.

Volveremos sobre las propiedades de esta familia de índices más adelante.

Observación (1.8): Adviértase que son posibles otras formas de descomponibilidad distintas de la que aquí hemos presentado, y sobre las que volveremos en los capítulos 6 y 7. Además también podemos encontrar índices de desigualdad que sean aditivamente descomponibles, pero que no correspondan a esta familia de funciones, obviamente porque no cumplen alguna de las otras seis propiedades establecidas.

1.4. Ranking de distribuciones

Como mencionamos al principio de este capítulo, mediante los índices de desigualdad buscamos un criterio de ordenación aplicable a cualquier par de situaciones distributivas, es decir, una *relación binaria completa y transitiva* vinculada a la noción de *ser más desigual que;* de modo que, *ser más desigual* se traduzca en un valor mayor de la función $I : \Im \mapsto \mathbb{R}$.

Por tanto, el concepto básico en la comparación de distribuciones de renta es el de ranking, o *preorden*, sobre el conjunto de todas las posibles distribuciones de renta, $\Im$.

Dado un criterio de comparación entre distribuciones, al que de forma genérica denominaremos por *T*, ya sea desigualdad o cualquier otro criterio de interés, utilizaremos el símbolo $\succeq_T$ para indicar el ranking al que da lugar dicho criterio de comparación, *T*, entre las distribuciones consideradas. Esto es, la relación binaria completa y transitiva sobre $\Im$.

Dicha ordenación requiere que el criterio de comparación sea completo y transitivo (Fields y Fei 1978). Es decir,

1) *Completitud:* $\forall\, F, G \in \Im$, se cumple que $G \succeq_T F$, o bien que $F \succeq_T G$, o ambas simultáneamente.[27]
2) *Transitividad:* $\forall\, F, G, K \in \Im$, $G \succeq_T F$ y $F \succeq_T K$ implican conjuntamente que $G \succeq_T K$.

La completitud exige que el criterio sea aplicable a cualquier par de distribuciones. La transitividad introduce una exigencia de valoración sistemática entre las distribuciones. Cuando se cumple la transitividad pero no la completitud nos encontramos con un *ranking parcial*, por ejemplo la dominancia de Lorenz, que examinaremos más adelante.

A partir de un criterio de comparación completo y transitivo podemos definir dos nuevas relaciones, la *indiferencia* y la *preferencia estricta*, que heredan las propiedades de $\succeq_T$.[28]

Así diremos que la distribución *G* es *indiferente* a la distribución *F*, lo que escribimos como $G \sim_T F$, cuando se cumpla $G \succeq_T F$ y $F \succeq_T G$. Es fácil comprobar que la relación de indiferencia es una relación de equivalencia (una relación reflexiva, simétrica y transitiva) que genera una partición sobre el conjunto de distribuciones de renta. Por tanto,

---

[27] Adviértase que la forma de definir la completitud implica la reflexividad de la relación.

[28] Obsérvese que la completitud no admite situaciones de no-comparabilidad entre distribuciones. Diremos que la distribución *G* no es comparable a la distribución *F*, lo que escribimos como $G \perp_T F$, cuando se cumpla $G \not\succeq_T F$ y $F \not\succeq_T G$. Pero esto viola completitud. Por tanto, la no-comparabilidad ($\perp_T$) entre distribuciones:

$$G \perp_T F \quad \Leftrightarrow \quad G \not\succeq_T F \quad \text{y} \quad F \not\succeq_T G$$

Estos casos serán importantes cuando examinemos la curva de Lorenz.

— Equivalencia ($\sim_T$) entre ambas distribuciones:

$$G \sim_T F \quad \Leftrightarrow \quad G \succeq_T F \quad \text{y} \quad F \succeq_T G$$

Diremos que la distribución G es *preferida,* o *domina estrictamente,* a la distribución F, lo que escribimos como $G \succ_T F$, cuando se cumpla $G \succeq_T F$ y $F \not\succeq_T G$. Por tanto,

— Dominancia estricta ($\succ_T$) de una distribución sobre otra:

$$G \succ_T F \quad \Leftrightarrow \quad G \succeq_T F \quad \text{y} \quad F \not\succeq_T G$$

Las posibilidades de *representar* un ranking con estas propiedades mediante una función continua con valores reales, $I : \Im \mapsto \mathbb{R}$, son bien conocidas (Debreu 1954, 1959). En particular, cuando la relación $\succeq_T$ está definida sobre un espacio topológico convexo, como por ejemplo $\mathbb{R}^n_+$, y verifica la propiedad de continuidad (lo que significa que los conjuntos de distribuciones mejores y peores que una distribución dada serán abiertos), entonces la función que representa este ranking es una función continua.[29] Y por supuesto el recíproco también se cumple, cualquier función (continua) $I : \Im \mapsto \mathbb{R}$ genera un ranking (continuo) de distribuciones de renta.

Recordemos que decir que una función $I : \Im \mapsto \mathbb{R}$ representa el ranking $\succeq_I$ significa que $I(F) \geq I(G) \quad \Leftrightarrow \quad G \succeq_I F$, para todo $F, G \in \Im$ y donde el subíndice I indica que utilizamos la desigualdad como criterio de comparación.[30] Adviértase que la representación de un ranking mediante una función hace más manejable el análisis pero no proporciona mayor información. Si una función de valor real representa un ranking, cualquier transformación

[29] Conviene recordar que cuando un ranking verifica las propiedades de continuidad y transitividad, entonces es necesariamente completo (Schmeidler 1971).

[30] Obsérvese que los signos en la anterior equivalencia están intercambiados. Ello se debe a que la desigualdad es considerada como un *mal* desde el punto de vista social. Lo mismo sucedería si utilizáramos la pobreza como criterio de comparación. Por el contrario, si el criterio de comparación fuera considerado como un *bien,* por ejemplo el bienestar social que aparecerá posteriormente, entonces los dos lados de la equivalencia tendrían el mismo signo. Esto es, si $W : \Im \mapsto \mathbb{R}$ es una función continua que representa el bienestar social, de modo que *más bienestar* se traduce en un valor mayor de la función, entonces $W(G) \geq W(F) \quad \Leftrightarrow \quad G \succeq_W F$, para todo $F, G \in \Im$ y donde el subíndice W indica que utilizamos el bienestar social como criterio de comparación.

monótona creciente de esa función es una representación igualmente válida de dicho ranking. Por ello los valores numéricos de la función solo pueden tomarse como una indicación de más o de menos, pero no de cuánto más o cuánto menos.

2. Medidas positivas (I): la desigualdad como dispersión

Comenzaremos la exposición mediante el examen de algunas medidas de desigualdad, que son habituales en la literatura, analizando, en primer lugar, aquellas que definen la desigualdad mediante una medida estadística de dispersión, sin referencia particular a su vinculación con el bienestar social.

Las medidas de desigualdad *positivas* se pueden especificar como el cálculo de un índice de dispersión para cada distribución de la renta dada, **y**. Vamos a revisar, ahora, algunas medidas estadísticas que han sido propuestas y utilizadas por la literatura, comentando sus principales virtudes y limitaciones en nuestro contexto. Cada una de estas medidas puede entenderse como un procedimiento particular de agregación de las diferencias de las rentas individuales con respecto a una renta de referencia, normalmente la media (Kanbur 1984).

Cerraremos este capítulo con un análisis de las medidas de desigualdad propuestas desde el enfoque de la teoría de la información (Theil 1967), en cuyo origen está la visión de la desigualdad como *desorden.*

2.1. El rango *(R)*

El *rango* (relativo) puede definirse como la diferencia entre el mayor y el menor nivel de renta, relativa a la media; es decir,

$$R = \frac{1}{\mu}(y_n - y_1) \tag{2.1}$$

Este índice varía entre cero y *n*, para una distribución de renta dada por $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$. Es cero cuando la renta está igualmente distribuida entre la población, es decir $y_i = \mu, \quad \forall i$, y toma el valor n cuando un solo individuo detenta toda la renta de la sociedad, es decir $y_n = \Sigma_{i=1}^{n} y_i$. Aunque R ha sido normalizado por μ otras normalizaciones, con propiedades similares, son posibles; por ejemplo

$R_{\min} = \dfrac{y_n}{y_1} - 1$, que toma valores en el intervalo [0, ∞), o

$R_{\max} = 1 - \dfrac{y_1}{y_n}$, que toma valores en el intervalo [0, 1].

Obsérvese que R ignora todo lo que sucede entre los valores extremos y, en consecuencia, no verifica el principio de las transferencias de Pigou-Dalton.

Obviamente R es un índice con muy escasa capacidad descriptiva. Para ilustrarlo consideremos el siguiente ejemplo, correspondiente a dos distribuciones de renta, $\mathbf{y}_A$ = (3, 6, 6, 6, 6, 9) y $\mathbf{y}_B$ = (3, 3, 3, 9, 9, 9). El valor del rango es el mismo en ambas, R = 1, pero describen dos situaciones notablemente distintas. En el primer caso encontramos una sociedad relativamente igualitaria, con una amplia clase media, un rico y un pobre. En el segundo aparece una sociedad polarizada entre ricos y pobres. Adviértase además que, si en la primera distribución, $\mathbf{y}_A$, cambiamos el 3 por 2,9 y el 9 por 9,1 resultaría un valor de la desigualdad mayor que en la segunda, $\mathbf{y}_B$. No es, pues, sorprendente que esta forma de valorar la desigualdad no sea prácticamente utilizada como criterio de ordenación de distribuciones de renta.

Los valores máximo y mínimo de la distribución $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ pueden considerarse excesivamente extremos, por ello es posible definir un rango en términos de dos cuantiles,[31]

$$R_Q = \frac{1}{\mu}\left(Q(p_2) - Q(p_1)\right) \qquad p_2 > p_1 \tag{2.2}$$

donde p_2 suele tomarse como $p_2 = 1 - p_1$. Elecciones populares de p_1 y p_2 son, por ejemplo, $p_1 = 0,25$ y $p_2 = 0,75$, lo que se conoce como el *rango intercuartílico*; $p_1 = 0,1$ y $p_2 = 0,9$, *rango interdecílico;* o

[31] Con esta terminología R puede escribirse como $R = \dfrac{1}{\mu}\left(Q(1) - Q(0)\right)$.

$p_1 = 0,05$ y $p_2 = 0,95$, si se desea analizar situaciones más extremas en la distribución.

En la práctica en estos casos muchas veces se utiliza la ratio de cuantiles,

$$\frac{Q(p_2)}{Q(p_1)}$$

en lugar del rango, R_Q, siendo ahora la mediana, $Q(0,5)$, una elección popular para normalizar $Q(p_2)$.

Todas las limitaciones señaladas para R son aplicables también para R_Q. Desde el punto de vista de la caracterización de lo que sucede en las colas de la distribución este tipo de estadísticos, especialmente en forma de ratio, si son ampliamente utilizados en la práctica (Atkinson, Rainwater y Smeeding 1995), aunque resulten discutibles desde el enfoque planteado en el capítulo 1, ya que no verifican la mayoría de propiedades consideradas deseables.

Debe observarse, no obstante, que el interés por acotar los valores extremos en la distribución de la renta y la riqueza se remonta al menos hasta los tiempos de Platón (Saunders 1970).

2.2. La desviación media relativa *(M)*

La *desviación media relativa* es un índice que toma la renta media como nivel de referencia y la diferencia en valores absolutos entre cada y_i y μ como medida de distancia. Esto es,

$$M = \frac{1}{n\mu}\sum_{i=1}^{n}\left|y_i - \mu\right| \qquad (2.3)$$

Fácilmente se observa que $M = 0$ cuando hay igualdad, $y_i = \mu, \quad \forall i$, y que, cuando toda la renta la posee un individuo, obtenemos el valor máximo de M, que viene dado por[32] $M = \left[2(n-1)\right]/n$. Por tanto $M \to 2$, cuando $n \to \infty$. El hecho de que la cota superior de M sea 2 hace que en la práctica a veces se utilice como índice

[32] En este caso,

$$M = \frac{1}{n\mu}\left(\sum_{i=1}^{n-1}\left|y_i - \mu\right| + \left|y_n - \mu\right|\right) = \frac{(n-1)\mu + \left|n\mu - \mu\right|}{n\mu} = \frac{2(n-1)\mu}{n\mu} = \frac{2(n-1)}{n}$$

de desigualdad $1/2M$, de forma que índice quede acotado en el intervalo [0, 1].

El problema fundamental de este índice es que no verifica el principio de las transferencias de Pigou-Dalton (Sen 1973). En particular no es sensible a transferencias entre individuos a un mismo lado de la media, ya sea por encima o por debajo de μ. Esto es debido a que la medida de distancia es lineal en las rentas a ambos lados de la media y, en consecuencia, el efecto de dicha transferencia se anula si no cruza la media. El siguiente ejemplo sencillo ilustra este hecho.

Consideremos, a modo de ilustración, cuatro distribuciones de renta con $\Sigma_{i=1}^{n} y_i = 100$ y $n = 4$, en consecuencia $\mu = 25$. Las distribuciones se ofrecen en el cuadro 2.1.

CUADRO 2.1: **Distribuciones ficticias y desviación media relativa *(M)***

	Distribuciones			
Individuo	$\mathbf{y}_A$	$\mathbf{y}_B$	$\mathbf{y}_C$	$\mathbf{y}_D$
1	0	10	10	14
2	20	10	10	20
3	26	26	40	26
4	54	54	40	40

Fuente: Elaboración propia.

Obsérvese que, $\mathbf{y}_B$ se obtiene a partir de $\mathbf{y}_A$ mediante una transferencia entre dos individuos por debajo de la media, $\mathbf{y}_C$ se obtiene a partir de $\mathbf{y}_B$ mediante una transferencia entre dos individuos por encima de la media, en ambos casos de un individuo rico a uno más pobre. En los tres casos obtenemos, $M(\mathbf{y}_A) = M(\mathbf{y}_B) = M(\mathbf{y}_C) = 0{,}60$, por tanto, en estas situaciones, transferencias de ricos a pobres, o viceversa, no alteran el valor del índice. Por el contrario $\mathbf{y}_D$ se obtiene a partir de $\mathbf{y}_A$ mediante una transferencia entre dos individuos, el más rico y el más pobre, en este caso obtenemos $M(\mathbf{y}_D) = 0{,}32$, de forma que la desigualdad se ha reducido de forma notable. Sin embargo, la razón de dicha reducción estriba en que la transferencia ha tenido lugar entre individuos a ambos lados de la media de la distribución.

Puede comprobarse fácilmente que este índice tampoco verifica la propiedad (1.7) de descomponibilidad aditiva.

A pesar de que la desviación media relativa no satisface algunas de las propiedades básicas que hemos señalado en el capítulo anterior, es de uso generalizado en la literatura sobre salud pública (Kennedy, Kawachi y Prothrow-Stith 1996a, 1996b; Deaton 2001),[33] donde se le conoce popularmente con el nombre del índice de Robin Hood.

2.3. La varianza *(V)*

La violación de principio de las transferencias de Pigou-Dalton puede evitarse elevando al cuadrado las diferencias respecto de la media. Esto sugiere la posibilidad de usar la *varianza* como una medida alternativa de desigualdad con mejores propiedades que la anterior. Recordemos que la fórmula de la varianza es,

$$V = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \mu\right)^2 \qquad (2.4)^{34}$$

que de forma equivalente, y por semejanza con la notación estadística habitual, también designaremos por σ^2.

Alternativamente es posible definir la varianza como (Kendall y Stuart 1977):

$$V = \frac{1}{2}\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(y_i - y_j\right)^2 \qquad (2.5)$$

Esta fórmula alternativa muestra cómo la varianza puede ser definida como la mitad de la media cuadrática entre todas las po-

[33] Es de observar que M fue un índice muy popular en los comienzos de la literatura económica sobre medición de la desigualdad. Algunos autores, como por ejemplo Schutz (1951) o Éltetö y Frigyes (1968), argumentaron sus bondades frente a otros índices con mejores propiedades, tales como el índice de Gini que examinaremos más adelante; sin embargo, fue rápidamente abandonado por falta de propiedades adecuadas, cuando estas fueron estudiadas con detalle (Atkinson 1970; Sen 1973).

[34] Obsérvese que también es posible escribir V como

$$V = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(y_i^2 - 2y_i\mu + \mu^2\right) = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - n\mu^2\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(y_i^2 - \mu^2\right)$$

sibles diferencias observadas en y, es decir, sin referencia a un valor central como μ en el caso de (2.4).

Ahora, cualquier transferencia de un individuo rico, i, a uno pobre, j, sin que varíen sus posiciones relativas y manteniendo el resto de rentas iguales, siempre disminuye la varianza, de modo que se cumple el principio de las transferencias de Pigou-Dalton. Para V el efecto de dicha transferencia es especialmente simple de obtener. Si efectuamos una pequeña transferencia δ de i a j, $0 < \delta \leq \left(y_i - y_j\right)/2$, sin que ello altere sus posiciones relativas, el efecto de dicha transferencia sobre el valor de V viene dado por $\delta\left(2/n\right)(y_j - y_i) < 0$.[35]

Los límites de la varianza vienen dados por $V = 0$, cuando hay igualdad, $y_i = \mu, \ \ \forall i$, y $(n-1)\mu^2$, cuando toda la renta la posee un solo individuo.

La varianza presenta, sin embargo, un problema importante cuando se utiliza para comparar distribuciones de renta con diferentes medias, dado que no verifica la propiedad (1.6) de independencia de la escala. Como señala Sen (1973):

> La varianza depende del nivel medio de renta, y una distribución podría mostrar una variación relativa mucho mayor que otra y, sin embargo, tener una varianza menor si el nivel medio de renta alrededor del cual se toman las desviaciones es menor que en la otra distribución.[36]

A pesar de que la varianza no verifica todas las propiedades de los índices de desigualdad postulados en el capítulo 1, sí es un índice descomponible por subgrupos de población. Este es un resultado bien conocido en estadística.

Utilizando la notación del capítulo anterior, sea N una sociedad compuesta por n individuos con una distribución de renta dada por el vector $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$. Supongamos ahora que esta socie-

---

[35] Este resultado se obtiene mediante diferenciación, de forma que la *pequeña* transferencia es técnicamente el efecto de una transferencia infinitesimal.

[36] Aunque V no es un índice de desigualdad *relativo*, sí es un índice de desigualdad *absoluto*, ya que adiciones iguales para todos los individuos de una misma magnitud de renta, $\lambda > 0$, no alteran el valor de V.

dad está compuesta por la unión de G grupos diferentes, exhaustivos y mutuamente excluyentes entre sí, indicados por el índice $g = 1, 2, 3, \ldots, G$. Designamos por n_g el número de individuos del grupo g y por $\mathbf{y}^g = (y_1^g, y_2^g, \ldots, y_{n_g}^g)$ su vector de rentas, de forma que y_i^g es la renta del individuo i del grupo g. Sea $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_G)$ el vector de rentas medias de cada grupo, siendo μ_g la renta media del grupo g. Con esta notación es posible escribir la media global, μ, como una suma ponderada de las medias de los diferentes grupos, donde la ponderación viene dada por la importancia demográfica de cada grupo,

$$\mu = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i = \frac{1}{n}\sum_{g=1}^{G}\sum_{i=1}^{n_g} y_i^g = \frac{1}{n}\sum_{g=1}^{G} n_g \mu_g = \sum_{g=1}^{G}\frac{n_g}{n}\mu_g$$

Podemos ahora desarrollar la fórmula para la varianza en los siguientes términos,

$$\begin{aligned}
\sigma^2 &= \frac{1}{n}\sum_{g=1}^{G}\sum_{i=1}^{n_g}\left(y_i^g - \mu\right)^2 \\
&= \frac{1}{n}\sum_{g=1}^{G}\sum_{i=1}^{n_g}\left(y_i^g - \mu_g + \mu_g - \mu\right)^2 \\
&= \frac{1}{n}\sum_{g=1}^{G}\sum_{i=1}^{n_g}\left[\left(y_i^g - \mu_g\right)^2 + 2\left(y_i^g - \mu_g\right)\left(\mu_g - \mu\right) + \left(\mu_g - \mu\right)^2\right] \\
&= \sum_{g=1}^{G}\frac{n_g}{n}\underbrace{\sum_{i=1}^{n_g}\frac{1}{n_g}\left(y_i^g - \mu_g\right)^2}_{\sigma_g^2} \\
&\quad + \frac{2}{n}\sum_{g=1}^{G}\left(\mu_g - \mu\right)\underbrace{\sum_{i=1}^{n_g}\left(y_i^g - \mu_g\right)}_{=0} + \sum_{g=1}^{G}\frac{n_g}{n}\left(\mu_g - \mu\right)^2 \\
&= \sum_{g=1}^{G}\frac{n_g}{n}\sigma_g^2 + \sum_{g=1}^{G}\frac{n_g}{n}\left(\mu_g - \mu\right)^2
\end{aligned}$$

donde $\sigma_g^2 = \frac{1}{n_g}\sum_{i=1}^{n_g}\left(y_i^g - \mu_g\right)^2$ es la varianza del grupo g.

El primer término de la expresión final de este desarrollo nos da, por tanto, la suma ponderada de las varianzas *dentro de* los grupos. Este es el componente *intragrupos* de la descomposición

(1.2), que pondera la dispersión dentro de cada uno de los grupos por su importancia demográfica.

El segundo término de la expresión anterior es una medida de la varianza *entre* los grupos, una suma ponderada de los cuadrados de las desviaciones de las medias de cada grupo respecto a la media global. Este es el componente *intergrupos* de la descomposición (1.2), que pondera la desviación de cada grupo respecto a la media global por su importancia demográfica.

Por tanto, si llamamos

1) $\sigma_W^2 = \sum_{g=1}^{G} \frac{n_g}{n} \sigma_g^2$, y

2) $\sigma_B^2 = \sum_{g=1}^{G} \frac{n_g}{n} \left(\mu_g - \mu\right)^2$

podemos expresar la varianza total σ^2 como la suma de los componentes intragrupos e intergrupos, $\sigma^2 = \sigma_W^2 + \sigma_B^2$, lo que nos da la varianza de la distribución de la renta en la sociedad como la suma de dos componentes. El primero, σ_W^2, representa la varianza explicada por la dispersión dentro de los grupos; el segundo, σ_B^2, representa la parte de la varianza total que se explica por la dispersión entre los grupos, sin referencia a lo que pasa dentro de cada uno de ellos. Las ratios σ_W^2 / σ^2 y σ_B^2 / σ^2 nos dan, de esta forma, las aportaciones porcentuales a la varianza global de los componentes *dentro de* y *entre*, respectivamente.

Por último señalaremos que, definida la varianza, *V*, la desviación típica, *SD*, es la raíz cuadrada positiva de la varianza

$$SD = +\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - \mu\right)^2} \qquad (2.6)$$

que también se la designa por σ.

2.4. El coeficiente de variación *(CV)*

Una medida de dispersión que no presenta el problema de la dependencia de la escala es el *coeficiente de variación, CV*, que es la desviación típica dividida por la media,[37]

$$\begin{aligned} CV &= \frac{V^{\frac{1}{2}}}{\mu} \\ &= +\frac{1}{\mu}\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-\mu\right)^2} \end{aligned} \qquad (2.7)$$

Este índice tiene la propiedad de ser sensible a las transferencias de renta para todo nivel de renta, por una parte, y ser independiente del nivel renta medio, por otra. Verifica pues el principio de las transferencias de Pigou-Dalton y es independiente de la escala.

A partir de los límites para V es fácil observar que el coeficiente de variación oscila entre $CV = 0$, cuando hay igualdad, $y_i = \mu, \ \forall i$, y $\sqrt{n-1}$, cuando toda la renta está en manos de un solo individuo.

Este indicador está sujeto a alguna crítica más sutil que los anteriores y que se derivan de la utilización de la función cuadrática como medida de distancia. Puede argumentarse que se trata de un índice que da el mismo peso a las transferencias en cualquier nivel de renta (Atkinson 1970). Es decir, el impacto sobre la desigualdad de una pequeña transferencia δ de un individuo rico, con renta y_i, a un individuo pobre, con renta y_j, sin que ello altere sus posiciones relativas, solo depende de la distancia entre las rentas de ambos individuos, $y_j - y_i$, pero no de los niveles de renta a los que se efectúa dicha transferencia, es decir la magnitud del cambio en CV ante transferencias de ricos a pobres es independiente de en que parte de la distribución se realizan dichas transferencias. En concreto, a partir del resultado para V, es fácil deducir que el efecto de dicha transferencia para el coeficiente de variación viene dado por

[37] El coeficiente de variación puede verse como un caso particular, para $\theta=2$, de la *desviación media relativa generalizada*, definida como,

$$M_\theta = \frac{1}{\mu}\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|y_i-\mu\right|^\theta\right\}^{\frac{1}{\theta}}$$

$$\delta \frac{y_j - y_i}{n\mu\sqrt{V}} < 0$$

Es interesante observar que el cuadrado del coeficiente de variación, CV^2, es cardinalmente equivalente a un miembro de la familia de índices de entropía, identificados en el teorema (1.1). En efecto, para el valor $\theta = 2$ observamos que,

$$\begin{aligned} I_2(n, \mathbf{y}) &= \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{n} \left[\left(\frac{y_i}{\mu} \right)^2 - 1 \right] \\ &= \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{y_i^2 - \mu^2}{\mu^2} \right] \\ &= \frac{1}{2n\mu^2} \sum_{i=1}^{n} \left(y_i^2 - \mu^2 \right) = \frac{1}{2\mu^2} V \end{aligned}$$

y, por tanto,

$$I_2(n, \mathbf{y}) = \frac{1}{2} CV^2$$

que es una transformación proporcional creciente del coeficiente de variación al cuadrado, CV^2, por lo que se trata de índices cardinalmente equivalentes. Adicionalmente, ello implica, además, que CV^2 es un índice aditivamente descomponible.

Para ver el tipo de descomposición de este índice es útil advertir que CV^2 no es, en realidad, más que la varianza de la renta relativa, y_i/μ, esto es, la participación de la renta de cada individuo en la media.

En efecto,

$$V\left(\frac{y}{\mu} \right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{y_i}{\mu} - 1 \right)^2 = \frac{1}{n\mu^2} \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - \mu \right)^2 = CV^2$$

Por tanto podemos aplicar la fórmula de la descomposición de la varianza que acabamos de presentar al cuadrado del coeficiente de variación para obtener así los componentes de desigualdad dentro de y entre los grupos de la sociedad. El resultado de dicho ejercicio produce la siguiente descomposición,

$$CV^2 = \sum_{g=1}^{G} \frac{n_g}{n} \frac{\mu_g^2}{\mu^2} \underbrace{\frac{\sigma_g^2}{\mu_g^2}}_{CV_g^2} + \frac{1}{\mu^2} \sum_{g=1}^{G} \frac{n_g}{n} \left(\mu_g - \mu\right)^2$$

En consecuencia, el componente entre grupos no es más que el cuadrado del coeficiente de variación ponderado entre las medias de cada grupo, y el componente dentro de los grupos no es más que una suma ponderada de los cuadrados de los coeficientes de variación de cada uno de los grupos. Obsérvese, sin embargo, que en este caso las ponderaciones no suman la unidad.

Dichas ponderaciones pueden escribirse ahora como

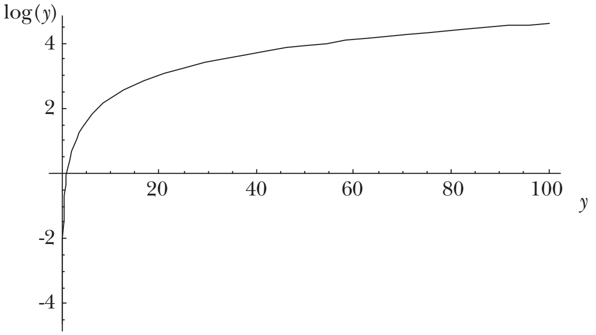
$$\frac{n_g}{n} \frac{\mu_g^2}{\mu^2} = \frac{n_g^2}{n^2} \frac{\mu_g^2}{\mu^2} \frac{n}{n_g}$$

es decir, el cociente entre las proporciones de renta del grupo g sobre el total de renta al cuadrado y las proporciones de población del grupo g sobre el total de población de la sociedad.

2.5. La desviación típica de los logaritmos

Una forma natural de dar más importancia a las transferencias de renta, en el extremo inferior de la distribución, consiste en tomar transformaciones logarítmicas de las rentas. El gráfico 2.1 ilustra la transformación logarítmica y permite observar la compresión en los niveles altos de ingreso efectuada por esta transformación.

GRÁFICO 2.1: Transformación logarítmica



Fuente: Elaboración propia.

Además, al tomar diferencias de logaritmos evitamos el efecto que sobre el índice de desigualdad tiene un cambio en la unidad de medida de la renta, ya que un cambio de unidades en forma logarítmica equivale a la suma de una constante, que desaparece al tomar diferencias.

En la literatura estadística la dispersión de log*(y)* se suele considerar respecto al logaritmo de la media geométrica de esta variable, $\tilde{\mu} = \left(\Pi_{i=1}^{n} y_i\right)^{1/n}$, es decir, el índice en cuestión es simplemente la *varianza de los logaritmos*,

$$VL = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\log y_i - \log\tilde{\mu}\right)^2 \qquad (2.8)^{38}$$

siendo

$$\log\tilde{\mu} = \frac{1}{n}\Sigma_{i=1}^{n}\log y_i$$

o más generalmente su desviación típica,

$$SDL = +\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\log y_i - \log\tilde{\mu}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \qquad (2.9)$$

Por el contrario en la literatura sobre distribución de la renta es más común tomar las desviaciones de log*(y)* respecto al logaritmo de la media aritmética, μ, (Sen 1973), índice que se conoce con el nombre de la *varianza logarítmica,*

$$LV = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\log y_i - \log\mu\right)^2 \qquad (2.10)^{39}$$

o su desviación típica,

$$LSD = +\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\log y_i - \log\mu\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \qquad (2.11)$$

---

[38] Alternativamente,

$$VL = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[\log\left(\frac{y_i}{\tilde{\mu}}\right)\right]^2$$

[39] También,

$$LV = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[\log\left(\frac{y_i}{\mu}\right)\right]^2$$

Ambas fórmulas están relacionadas por el hecho de que,

$$LV = VL + \left(\log\mu - \log\tilde{\mu}\right)^2$$

Debe observarse que, para cualquier distribución con valores no negativos,[40] se cumple que $\mu \geq \tilde{\mu}$ (Kendall y Stuart 1977).

En ambos casos, *VL* y *LV* toman un valor nulo cuando hay igualdad, $y_i = \mu, \ \forall i$, y no están acotados superiormente cuando toda la renta la posee un solo individuo.[41] Por tanto su rango de variación está constituido por el intervalo $[0, \infty)$.

No obstante, esta forma de medir la desigualdad tampoco está exenta de críticas. Por una parte, ninguno de los índices propuestos, *VL* y *LV*, verifica el principio de las transferencias de Pigou-Dalton para altos niveles de renta. En concreto, *VL* no satisface dicho principio para rentas superiores a $\tilde{\mu}.e$, donde e es la base de los logaritmos neperianos; y *LV* no lo satisface para rentas superiores a $\mu.e$. La razón estriba en la extrema compresión de las rentas a niveles muy elevados.

Consideremos la varianza logarítmica y analicemos el efecto de una pequeña transferencia δ de un individuo rico, i, a otro pobre, j, tal que $0 < \delta \leq \left(y_i - y_j\right)/2$. Dicho efecto viene dado en este caso por (Cowell 1995),

$$\delta\frac{2}{n}\left[\frac{1}{y_j}\log\left(\frac{y_j}{\mu}\right) - \frac{1}{y_i}\log\left(\frac{y_i}{\mu}\right)\right]$$

cuyo signo depende del comportamiento de la función $1/y\log\left(y/\mu\right)$. Un análisis de la misma revela que dicha función alcanza su máximo en $\mu.e$, siendo creciente en y para valores inferiores y decreciente en y para valores superiores. Por tanto, el efecto de dicha transferencia es negativo para $y_j < y_i < \mu e$, tal y como requiere el principio de las transferencias de Pigou-Dalton, pero positivo para $\mu e < y_j < y_i$.

[40] Claramente los índices *VL* y *LV* no aceptan valores nulos o negativos de rentas.

[41] En realidad en este caso los índices *VL* y *LV* no están definidos y simplemente divergen conforme $y_i \to 0$ para algún i.

Para la varianza de los logaritmos el análisis es enteramente equivalente al anterior, pero sustituyendo μ por $\tilde{\mu}$ en los razonamientos anteriores. Aunque los niveles para los que no se verifica el principio de las transferencias de Pigou-Dalton son relativamente altos, $e = 2{,}71828$, Foster y Ok (1999) han mostrado la relevancia práctica de este resultado.

Por otra parte, ninguno de estos dos índices resulta aditivamente descomponible en la forma introducida por la propiedad (1.7). Un tema sobre el que volveremos en el capítulo 6.

2.6. La curva de Lorenz *(L)*

Buena parte de los resultados importantes en torno a las medidas de desigualdad y muchos de los índices más utilizados para su medición se basan en la curva de Lorenz (Lorenz 1905). Desde el punto de vista práctico la curva de Lorenz ha sido durante mucho tiempo una de las formas más populares de examinar gráficamente la desigualdad por su carácter intuitivo.

La noción de la curva de Lorenz supone una aproximación alternativa a la representación de la dispersión de una distribución de renta, basada en la relación entre las proporciones acumuladas de población y las proporciones acumuladas de renta, a partir de una ordenación no decreciente del vector de rentas.

Dada la distribución de la renta $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, la curva de Lorenz puede construirse fácilmente como sigue. Ordenamos los porcentajes acumulados de población, de los más pobres a los más ricos, sobre el eje horizontal (abscisas), y los porcentajes acumulados de renta correspondientes a dichos porcentajes de población, sobre el eje vertical (ordenadas).

Más formalmente supongamos que el vector de renta $\mathbf{y}$ está ordenado de forma no decreciente, $y_1 \leq y_2 \leq y_3 \leq \ldots \leq y_{n-1} \leq y_n$, a partir de aquí la curva de Lorenz se define como el conjunto de puntos

$$\left[\left(\frac{i}{n}\right), L\left(\frac{i}{n}\right)\right]$$

donde (i/n) representa el porcentaje de población con una renta igual o inferior a y_i, $i/n = p_i = F(y_i)$, y $L(i/n)$ viene definido implícitamente como el punto que satisface,

$$L\left(p_i = \frac{i}{n}\right) = \frac{\sum_{j=1}^{i} y_j}{\sum_{j=1}^{n} y_j} = \frac{\sum_{j=1}^{i} y_j}{n.\mu} = r_i \qquad (2.12)$$

donde $L(0) = 0$ y $L(1) = 1$, y suponiendo que, en esta versión discreta, los puntos intermedios se obtienen por interpolación lineal.

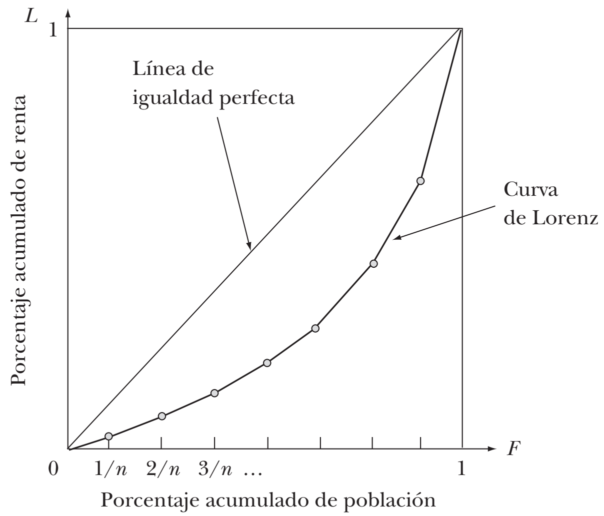
En consecuencia, a partir de la notación explicitada en la introducción la curva de Lorenz para la distribución de renta $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ se define como la función lineal por tramos que une los puntos (p_i, r_i), $\forall i \in N$, más la condición inicial dada por el punto $(0, 0)$. La curva de Lorenz va de una esquina a la opuesta del *cuadrado unitario*. Si todo el mundo tuviera exactamente el mismo nivel de renta la curva de Lorenz coincidiría con la diagonal, que constituye la línea de igualdad. Cuando no es así, la curva de Lorenz estará por debajo de la diagonal puesto que grupos de renta bajos disfrutarán de una participación proporcionalmente menor en la renta. De modo aproximado e intuitivo podemos decir que cuanto más separada esté esta curva de la diagonal, tanto más desigual será la distribución de la renta. El problema reside, obviamente, en que la noción de *estar más separada* es imprecisa. Un ejemplo de esta versión discreta de la curva de Lorenz para $n = 8$ puede observarse en el gráfico 2.2.

Conviene observar que la pendiente de la curva entre dos puntos consecutivos,

$$\left(\frac{i-1}{n}, \frac{\sum_{j=1}^{i-1} y_j}{n.\mu}\right), \left(\frac{i}{n}, \frac{\sum_{j=1}^{i} y_j}{n.\mu}\right)$$

es igual a la renta relativa, $\left[(y_i/n\mu)/(1/n)\right] = y_i/\mu$. En consecuencia, la pendiente de la curva de Lorenz aumenta si nos movemos hacia sectores más ricos de la población, es decir, hacia la derecha en el gráfico 2.2.

GRÁFICO 2.2: **Curva de Lorenz de una distribución discreta**



Fuente: Elaboración propia.

Esta versión discreta de la curva de Lorenz, que acabamos de presentar, fue la forma que introdujo Lorenz (1905).[42] Se trata de una formulación intuitiva, fácil de construir, y que se corresponde con el tratamiento práctico del análisis de la distribución de la renta. Sin embargo, podemos formular también el problema en términos de distribuciones continuas, con lo que la curva de Lorenz se obtiene directamente de la *función de distribución F(y)* (v. el apartado 3 de la introducción), lo que permite hacer mayores progresos desde el punto de vista analítico.

Recordando que $p = F(y)$ representa la proporción de población de la sociedad con una renta igual o inferior a y, definimos ahora la proporción de renta acumulada por dicha población como

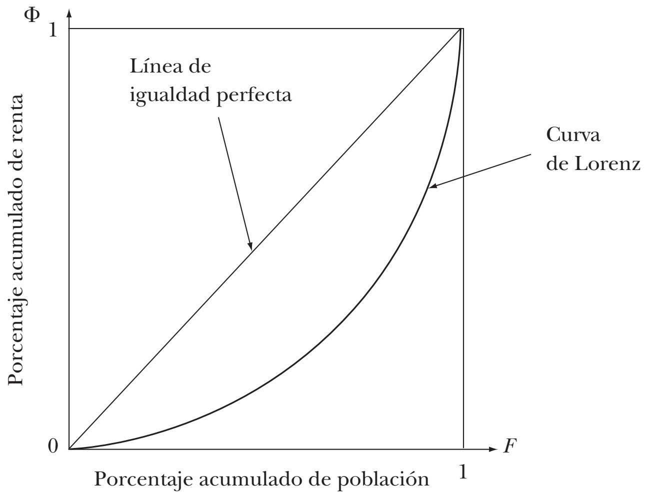
$$\Phi(y) = \frac{1}{\mu}\int_0^y u dF(u) \tag{2.13}$$

donde

$$\mu = \int_{\mathbb{R}_{++}} y dF(y)$$

[42] Cuantiles concretos, que no se observan directamente del vector de rentas, son obtenidos normalmente mediante interpolación lineal, tal y como se ha procedido al dibujar el gráfico 2.2.

GRÁFICO 2.3: Curva de Lorenz de una distribución continua



Fuente: Elaboración propia.

es la media de la distribución.[43] El gráfico $\left(F(y), \Phi(y)\right)$ es la curva de Lorenz de la distribución de renta *F*. Un ejemplo de la versión continua de la curva de Lorenz puede observarse en el gráfico 2.3.

Podemos observar la equivalencia entre esta formulación y su contrapartida discreta fácilmente, ya que dado $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, es inmediato que,

1) $F(y_i) = p_i = \dfrac{i}{n}$, y

2) $\Phi(y_i) = \dfrac{\sum_{j=1}^{i} y_j}{n\mu} = L(p_i)$

Utilizando la función cuantil, *Q(p)*, definida en la introducción, podemos escribir las ordenadas de la curva de Lorenz como $\Phi\left(Q(p)\right) = \left(1/\mu\right)\int_0^{Q(p)} u dF(u) = L(p)$.

[43] Utilizando la función cuantil, *Q(p)*, definida en la introducción, es posible escribir de forma equivalente la curva de Lorenz como

$$L(p) = \frac{1}{\mu}\int_0^p Q(q)dq$$

donde $\mu = \int_0^1 Q(p)dp$, que es la definición general a la que alude Gastwirth (1971).

Obsérvese que utilizamos dos símbolos, Φ y L, para indicar la ordenada de la misma función, la ordenada de Lorenz; si bien L utiliza a $p \in [0, 1]$ como soporte, mientras que Φ utiliza a $\mathbb{R}_{++}$, el soporte de F. Desde el punto de vista gráfico, $L(p)$ nos da directamente la curva de Lorenz del gráfico 2.3, mientras que $\Phi(y)$ utiliza a $F(y)$ como paso intermedio.[44]

Las siguientes propiedades de la curva de Lorenz son interesantes desde el punto de vista de la medición de la desigualdad.[45]

Proposición (2.1)

1) $0 \leq F \leq 1,\ 0 \leq \Phi \leq 1,\ 0 \leq L \leq 1,$
$F(0) = \Phi(0) = L(0) = 0,\ F(+\infty) = \Phi(+\infty) = L(1) = 1.$
2) La curva de Lorenz es creciente en p.
3) La pendiente de la curva de Lorenz, $\left[d\Phi(y)\right]/\left[dF(y)\right]$, viene dada por y/μ, para $p \in (0, 1)$.[46]
4) La curva de Lorenz es convexa respecto al eje de abscisas, $p = F(y)$.
5) La pendiente de la curva de Lorenz es igual a la unidad en el cuantil $p^* = F(\mu)$.

Demostración

Véase el apéndice A.2.

La curva de Lorenz constituye, pues, una forma alternativa de examinar la distribución de la renta, ya que junto con μ contiene la misma información que la función de densidad, $f(y)$. Sin embargo está especialmente orientada al análisis de la desigualdad, puesto que nos muestra cómo la actual distribución de la renta se separa de la línea de igualdad. La pregunta que surge de forma natural es: ¿Cómo utilizar la curva de Lorenz como una medida de desigualdad?

Muchos son los índices que podemos construir a partir de la información proporcionada por la curva de Lorenz. Su propia cons-

---

[44] Obsérvese que el eje de ordenadas del gráfico 2 de la introducción, $F(y)$, no es más que el eje de abscisas en la curva de Lorenz del gráfico 2.3.

[45] Suponemos el caso de una curva continua en las demostraciones.

[46] Alternativamente podemos representar dicha pendiente como $\frac{dL(p)}{dp}$, que viene dada por $\left[Q(p)\right]/\mu$.

trucción resulta interesante ya que, por ejemplo, si $L(0{,}5) = 0{,}2$ ello nos informa de que el 50% de la población más pobre disfruta tan solo del 20% del total de renta, mientras que el 50% más rico disfruta del 80% restante, valores más extremos en ambas direcciones nos ayudan a caracterizar qué es lo que sucede en las colas de la distribución, lo que siempre resulta de interés. Cuanto menores sean los valores de $L(p)$ más desigual será la distribución.

Por otra parte, ya hemos observado cómo la pendiente de la curva de Lorenz contiene información sobre toda la distribución de la renta relativa, y/μ, de forma que examinando la pendiente en un determinado punto, p, es posible conocer el cuantil p relativo a la media, $[Q(p)]/\mu$. Por ejemplo para $p = 0{,}5$ la pendiente de $L(p)$ en dicho punto es $[Q(0,5)]/\mu$, la mediana como proporción de la media.

Puesto que la mayoría de distribuciones de renta son asimétricas con colas relativamente alargadas por la derecha, tal y como muestra el gráfico 3 de la introducción, la media suele ser superior a la mediana. Esta es la situación que ilustra el gráfico 2.4.[47] Igualmente para otros valores de p. Identificando el punto en el que $[dL(p)]/dp = 1$ podemos leer el porcentaje de población que recibe una renta igual o inferior a la media. Alternativamente identificando el punto en que $L(p) = 0{,}5$, podemos identificar el porcentaje de población *pobre* que recibe el 50% de la renta de la sociedad, un indicador de la *distribución del poder* en una sociedad democrática. El gráfico 2.4 ilustra algunas de estas medidas. Sin embargo, aunque útiles desde el punto de vista de la caracterización de la distribución de la renta estos índices, al igual que R, poseen escasa capacidad descriptiva considerados de forma aislada y no son utilizados como criterios de ordenación de diferentes

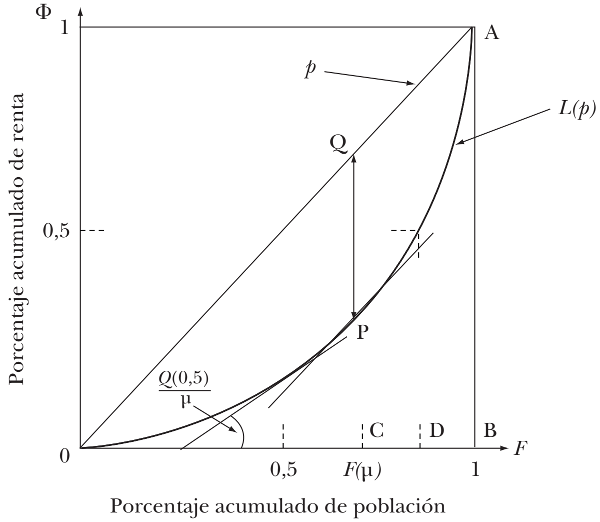
---

[47] La diferencia entre media y mediana ha sido propuesta en ocasiones como estadístico de simetría de una distribución. En concreto, el estadístico utilizado es dicha diferencia estandarizada, $[\mu - Q(0,5)]/\sigma$. Es posible además demostrar que

$$\left|\frac{\mu - Q(0,5)}{\sigma}\right| \leq 1$$

(Hotelling y Solomons 1932). Pearson propuso, para distribuciones unimodales, la diferencia entre la media y la moda, estandarizada igualmente por la desviación típica. La moda, sin embargo, no es un estadístico utilizado en el análisis de la desigualdad, básicamente porque tratamos con distribuciones unimodales; no obstante, ha ganado importancia en el contexto de la polarización, donde la posible existencia de varias modas es de interés.

GRÁFICO 2.4: **Curva de Lorenz e índices relacionados**



Fuente: Elaboración propia.

distribuciones de renta, ya que no verifican la mayoría de las propiedades enumeradas en el capítulo 1.

Se ha propuesto toda una colección de funciones de la curva de Lorenz que tratan de resumir la información contenida en la distribución en términos de un índice de desigualdad. Mencionaremos tres de ellas.

En primer lugar, la medida más popular es el índice de Gini (1912). Sus propiedades merecen estudiarse con detalle, por lo que las examinaremos en un epígrafe específico del capítulo siguiente.

En segundo lugar, sería posible utilizar como medida de desigualdad la *máxima distancia vertical* entre la línea de igualdad, *p*, y la curva de Lorenz, *L(p)*.[48] La distancia QP en el gráfico 2.4.[49]

---

[48] Aunque la *máxima distancia horizontal* entre la línea de igualdad, *p*, y la curva de Lorenz, *L(p)*, es mencionada en literatura como posible medida de desigualdad (Arnold 1987), no parece que esta haya sido estudiada con detalle. No obstante, sus propiedades no son mejores que las que se derivan de la consideración de distancias verticales.

La *máxima distancia oblicua*, perpendicular a la línea de igualdad, *p*, es otra posibilidad. Pero esta no parece ni siquiera haber sido considerada por la literatura.

[49] Obsérvese que, por semejanza de triángulos, esta distancia también podría leerse en el gráfico 2.4 sobre el eje de abscisas como la distancia entre 0 y el punto de intersección con dicho eje de la tangente a la curva de Lorenz donde esta toma pendiente igual a 1.

Este índice es conocido en la literatura como la ratio de Pietra o el coeficiente de Schutz (1951), *S*. Puesto que dicha distancia se maximiza cuando $\left[dL(p)\right]/dp = 1$ y en este punto $y = \mu$ (proposición [2.1], 5) podemos escribir, utilizando la versión continua de la curva de Lorenz,

$$S = F(\mu) - L(F(\mu)) \qquad (2.14)$$

Resulta claro que los límites de variación de *S* se sitúan en el intervalo [0, 1].

Sencillas manipulaciones algebraicas permiten mostrar algunas formas alternativas de calcular *S*.

1) Para una distribución discreta $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ *S* coincide con la mitad de la desviación media relativa, $S = 1/2M$ (Lambert 1993).
2) *S* mide la proporción del total de renta que debería ser transferida desde rentas por encima de μ a rentas por debajo de μ para conseguir una distribución de renta completamente igualitaria (Lambert 1993). Se trata por tanto de mínimo volumen de transferencias para conseguir la igualdad.
3) Desde el punto de vista geométrico *S* es igual al cociente del área del mayor triángulo que puede inscribirse entre la curva de Lorenz y la línea de igualdad, dividida por el área del triangulo 0AB en el gráfico 2.4, que es igual a la mitad (Arnold 1987).

El primero de estos resultados nos da la relación de *S* con un estadístico de dispersión que ya hemos comentado, *M*, en consecuencia *S* no verifica el principio de las transferencias de Pigou-Dalton, ni tampoco la descomponibilidad aditiva. El segundo proporciona intuición adicional, desde el punto de vista de la desigualdad, sobre *S*. Y el tercero ofrece una interpretación geométrica que será de utilidad cuando comentemos el índice de Gini.

En tercer lugar, es posible utilizar como medida de desigualdad la longitud de la curva de Lorenz, *Λ*. Esta longitud es mínima en el caso de igualdad y aumenta conforme crece la desigualdad en la sociedad. Podemos escribir la longitud, *Λ*, como,

$$\Lambda = \frac{1}{\mu n}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{y_i^2 + \mu^2} \qquad (2.15)$$

Puesto que la longitud de la curva de Lorenz está acotada en el intervalo $\left[\sqrt{2}, 2\right]$, Kakwani (1980a) propuso el siguiente índice de desigualdad normalizado

$$K = \frac{\Lambda - \sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}} \qquad (2.16)$$

que, al igual que *S*, está acotado en el intervalo [0, 1].

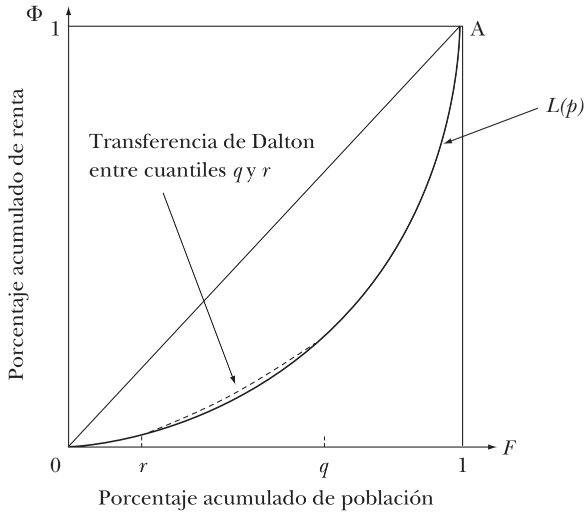
Ninguno de estos dos índices han tenido acogida en la literatura.

Finalmente, es interesante analizar graficamente el efecto de una transferencia de Pigou-Dalton sobre la curva de Lorenz. Consideremos una transferencia de un individuo rico, i, situado en el cuantil r de la distribución a un individuo pobre, j, situado en el cuantil $q < r$, sin que ello altere sus posiciones relativas. Por la forma en la que está construída, esta transferencia claramente mueve la curva de Lorenz de forma inequívoca hacia la línea de igualdad entre los cuantiles q y r, y la deja invariante en el resto de cuantiles. La razón es que esta transferencia no afecta al valor de $L(p)$ para todo $p < q$ y para todo $p \geq r$, pero aumenta el valor de $L(p)$ para todo $q \leq p < r$. El gráfico 2.5 visualiza esta situación.

Podemos decir pues, en un sentido general, que la curva de Lorenz satisface el principio de las transferencias de Pigou-Dalton, puesto que dichas transferencias nos acercan a la línea de igualdad en algún tramo de la distribución.

Observación (2.1): El efecto de una transferencia elemental de Pigou-Dalton es elevar la curva de Lorenz en un solo punto (suponiendo una distribución discreta como la representada en el gráfico 2.2). Si la transferencia tiene lugar entre individuos no consecutivos en el ranking, la curva de Lorenz se moverá hacia la línea de igualdad en varios puntos. Sin embargo, puesto que una transferencia de Pigou-Dalton es equivalente a una sucesión finita de transferencias elementales y permutaciones entre individuos, siempre podemos pasar de una curva de Lorenz a otra más cercana a la línea de igualdad, elevando la curva inicial punto a punto de manera consecutiva, sujeto a la restricción de que en

GRÁFICO 2.5: Curva de Lorenz y transferencias de Pigou-Dalton



Fuente: Elaboración propia.

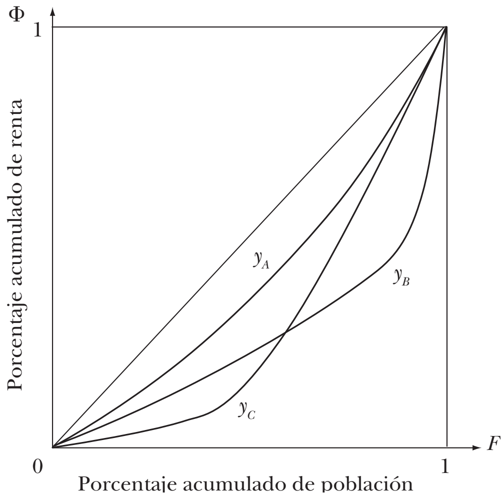
ningún momento se viole la propiedad de convexidad de la curva de Lorenz.

En consecuencia, si la curva de Lorenz $L_A(p)$ de la distribución $\mathbf{y}_A$ está por encima en cualquier punto[50] de la curva de Lorenz $L_B(p)$ de la distribución $\mathbf{y}_B$, es posible pensar en $\mathbf{y}_A$ como obtenida a partir de $\mathbf{y}_B$ mediante la aplicación reiterada de una serie de transferencias de Pigou-Dalton. Cuando esta sea la relación entre ambas distribuciones diremos que $\mathbf{y}_A$ domina estrictamente en el sentido de Lorenz a $\mathbf{y}_B$. El gráfico 2.6 muestra una situación en la que la distribución $\mathbf{y}_A$ domina estrictamente en el sentido de Lorenz a las distribuciones $\mathbf{y}_B$ e $\mathbf{y}_C$, pero ni $\mathbf{y}_B$ domina estrictamente a $\mathbf{y}_C$, ni viceversa, puesto que ambas curvas de Lorenz se cruzan en un determinado cuantil.

Dominancia estricta requiere que la curva de Lorenz de una distribución no se encuentre en ningún punto por debajo de la de otra, y en algún punto, por lo menos, se encuentre estricta-

[50] Excepto en los extremos, obviamente.

GRÁFICO 2.6: Dominancia estricta de Lorenz



Fuente: Elaboración propia.

mente por encima. El gráfico 2.5 muestra una dominancia estricta de este tipo, en el que la distribución dominante ha sido obtenida mediante una transferencia de Pigou-Dalton. Estos conceptos sobre dominancia de Lorenz serán examinados con detalle en el capítulo 5, ya que revestirán cierta importancia en capítulos posteriores.

3. Medidas positivas (II): el índice de Gini y los índices de Theil

3.1. El índice de Gini *(G)*

El índice de Gini (1912), también llamado *coeficiente de Gini,* es uno de los índices más populares en el contexto de la literatura sobre desigualdad, tanto desde un punto de vista teórico como aplicado. Ciertamente no es un índice de reciente aparición en el contexto de la desigualdad, ya que toma su nombre de los trabajos de Corrado Gini a principios del siglo XX (Gini 1912, 1921, 1936).[51] Una revisión de la literatura revela una extremada propensión, probablemente injustificada, a su uso, sobre todo en el ámbito aplicado. Sus propiedades no justifican su popularidad, que probablemente se debe a que el índice de Gini puede *visualizarse* fácilmente una vez hemos entendido la curva de Lorenz.

La obtención del índice de Gini puede hacerse de muchas formas y cada una de ellas es interesante en algún aspecto, ya que enfatiza ciertas propiedades del índice que otras oscurecen. Aunque un tratamiento completo está fuera del ámbito de este trabajo[52] nos detendremos en mostrar algunas formas equivalentes de calcular el índice de Gini, ya que serán de utilidad para capítulos posteriores.

Probablemente la forma más intuitiva de presentar el índice de Gini es la geométrica a partir de la curva de Lorenz. Desde este punto de vista el índice de Gini es el cociente entre el área conte-

---

[51] A pesar de ello existe evidencia de que el índice de Gini (1912) ya fue utilizado por Helmert (1876) y otros estadísticos alemanes en la década de 1870 (David 1968).

[52] La literatura sobre el índice de Gini es investigada en Giorgi (1990, 1993). Sobre las múltiples formas alternativas de obtener el índice de Gini puede consultarse Anand (1983), Berrebi y Silber (1985), Silber (1989) y Milanovic (1994, 1997) desde un punto de vista discreto y Yitzhaki (1998) desde un punto de vista continuo.

nida entre la línea de igualdad y la curva de Lorenz (área A en el gráfico 3.1) y la región triangular bajo la diagonal (área $A+B$ en el gráfico 3.1). Es decir,

$$G=\frac{A}{A+B} \tag{3.1}$$

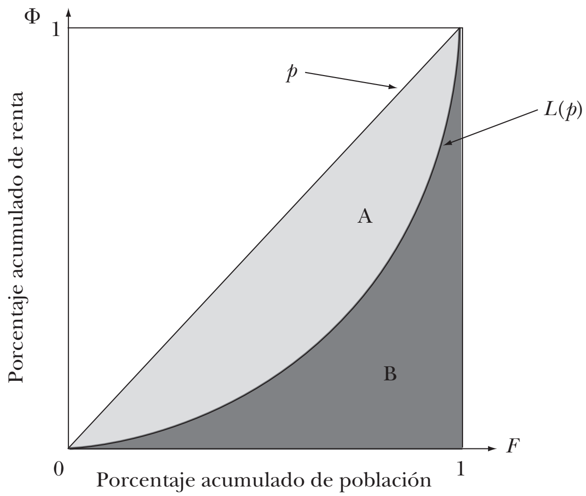
Obviamente, como el área $A+B=1/2$, podemos escribir igualmente

$$G=2A=1-2B \tag{3.2}$$

Esta presentación geométrica muestra claramente cómo el índice de Gini verifica el principio de las transferencias de Pigou-Dalton, puesto que a partir de gráfico 2.5 observamos cómo la transferencia de un individuo rico a uno pobre, sin alterar sus posiciones relativas, reduce el área A (e incrementa la B) en el gráfico 3.1 y, en consecuencia, reduce el índice de Gini. Más adelante examinaremos la importancia cuantitativa de este resultado.

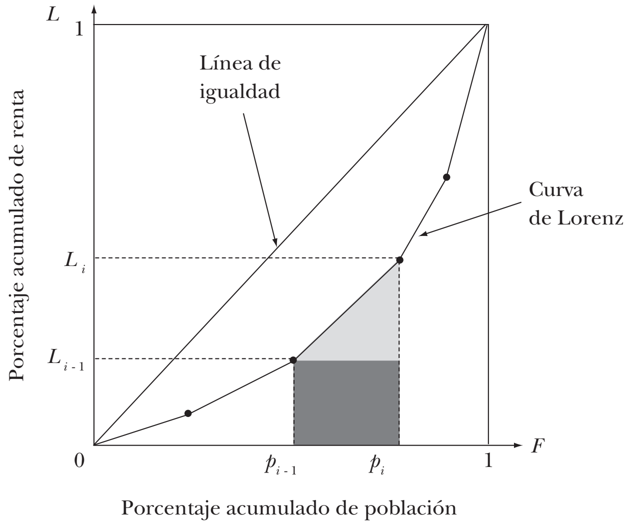
Veamos ahora cómo podemos calcular estas áreas para obtener una fórmula operativa para el índice de Gini de nuestra distribución de renta $\mathbf{y}=(y_1, y_2,\ldots, y_n)$.

GRÁFICO 3.1: **Curva de Lorenz e índice de Gini**



Fuente: Elaboración propia.

GRÁFICO 3.2: Áreas bajo la curva de Lorenz *(B)*



Fuente: Elaboración propia.

A partir del gráfico 2.2 observamos que un segmento típico de área bajo la curva de Lorenz viene dado por el área sombreada del gráfico 3.2, que está compuesta por un cuadrado y un triángulo. El área total bajo el segmento considerado de la curva de Lorenz viene dado por,

$$(p_i - p_{i-1})L_{i-1} + \frac{1}{2}(p_i - p_{i-1})(L_i - L_{i-1}) = \frac{1}{2}(p_i - p_{i-1})(L_i + L_{i-1})$$

donde L_i representa la ordenada de Lorenz correspondiente a p_i, $L(p_i)$.

De esta forma el área total bajo la curva de Lorenz, B en el gráfico 3.1, es,

$$B = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(p_i - p_{i-1})(L_i + L_{i-1}) \tag{3.3}$$

donde debe recordarse que $p_0 = L_0 = 0$. Y de acuerdo con la definición (3.2) escribimos el índice de Gini como

$$G = 1 - \sum_{i=1}^{n} (p_i - p_{i-1})(L_i + L_{i-1}) \\ = 1 - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (L_i + L_{i-1}) \tag{3.4}$$

puesto que $p_i = i/n$ y por tanto $p_i - p_{i-1} = 1/n$. En consecuencia el índice de Gini puede escribirse como 1 menos dos veces el promedio de las ordenadas de Lorenz en los puntos medios.[53]

Resulta claro que el índice de Gini está acotado por el intervalo [0, 1], en concreto cuando toda la renta la posee un individuo obtenemos el valor máximo de G, que en este caso viene dado por[54] $G = (n-1)/n$. Por tanto $G \to 1$, cuando $n \to \infty$. Este es también el límite superior en el caso de distribuciones continuas.

La derivación anterior enfatiza la obtención del área B del gráfico 3.1. Una fórmula equivalente puede obtenerse a partir del cómputo del área A en dicho gráfico. El segmento típico de área que debemos computar ahora viene dado por la zona rayada del gráfico 3.3. En dicho gráfico el total de área sombreada viene dada por,

$$(p_i - p_{i-1})p_{i-1} + \frac{1}{2}(p_i - p_{i-1})^2 = \frac{1}{2}(p_i - p_{i-1})(p_i + p_{i-1})$$

Si a esta área le restamos la parte que ya hemos computado anteriormente obtenemos que el área de interés es ahora,

$$\frac{1}{2}(p_i - p_{i-1})\left[(p_i + p_{i-1}) - (L_i + L_{i-1})\right]$$

De esta forma el área total entre la línea de igualdad y la curva de Lorenz, A en el gráfico 3.1, es,

---

[53] Aunque mantendremos la formulación en términos discretos, en el texto conviene no perder de vista la formulación que toma la distribución de la renta como una distribución continua, ya que parte de la literatura adopta este enfoque (Yitzhaki 1998). El equivalente a (3.4) a partir de la versión continua de la curva de Lorenz introducida en el capítulo 2 es

$$G = 1 - 2\int_0^1 L(p)dp \tag{3.4*}$$

cuya formulación resulta obvia a partir de la definición geométrica (3.2) y del gráfico 3.1.

[54] En este caso, $G = 1 - (1/n)$ directamente de (3.3) puesto que $L_i = 0 \ \forall i \neq n$ y $L_n = 1$.

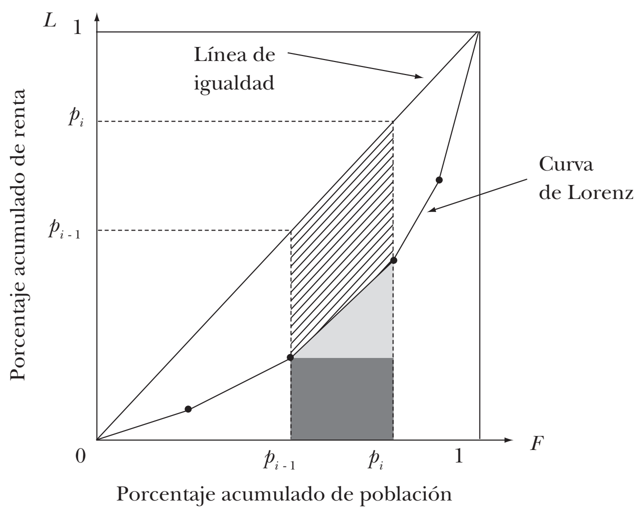
$$A = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(p_i - p_{i-1})\left[(p_i + p_{i-1}) - (L_i + L_{i-1})\right] \tag{3.5}$$

donde $p_0 = L_0 = 0$. Y de acuerdo con la definición (3.2) escribimos el índice de Gini como

$$\begin{aligned} G &= \sum_{i=1}^{n}(p_i - p_{i-1}).\left[(p_i + p_{i-1}) - (L_i + L_{i-1})\right] \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[(p_i + p_{i-1}) - (L_i + L_{i-1})\right] \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[(p_i - L_i) + (p_{i-1} - L_{i-1})\right] \end{aligned} \tag{3.6}$$

En consecuencia el índice de Gini puede escribirse como dos veces el promedio de la diferencia entre las abscisas y las ordenadas de Lorenz en los puntos medios.[55]

GRÁFICO 3.3: Áreas bajo la curva de Lorenz *(A)*



Fuente: Elaboración propia.

[55] El equivalente a (3.6) a partir de la versión continua de la curva de Lorenz introducida en el epígrafe anterior es

$$G = 2\int_0^1 \left(p - L(p)\right)dp \tag{3.6*}$$

cuya formulación resulta obvia a partir de la definición geométrica (3.2) y del gráfico 3.1.

Observando que $p_0 = L_0 = 0$ y $p_n = L_n = 1$, y en consecuencia $p_0 - L_0 = p_n - L_n = 0$, podemos simplificar la expresión (3.6). Puesto que $\Sigma_{i=1}^{n}(p_{i-1} - L_{i-1}) = \Sigma_{i=1}^{n}(p_i - L_i)$, escribimos,

$$\begin{aligned} G &= \frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^{n}(p_i - L_i) + \sum_{i=1}^{n}(p_{i-1} - L_{i-1})\right] \\ &= \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}(p_i - L_i) \end{aligned} \tag{3.7}$$

Lo que muestra que el índice de Gini no es más que dos veces el promedio de las diferencias entre las abscisas y las ordenadas de Lorenz de la distribución de la renta $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$.

Desarrollando el sumatorio en (3.4) es posible obtener una fórmula alternativa para G que resultará de utilidad a continuación (Rao 1969).

Proposición (3.1)

El índice de Gini puede escribirse como

$$G = \sum_{i=1}^{n}(p_{i-1}L_i - p_iL_{i-1}) \tag{3.8}$$

Demostración

A partir de (3.4)

$$\begin{aligned} G &= 1 - \sum_{i=1}^{n}(p_i - p_{i-1})(L_i + L_{i-1}) \\ &= 1 - \sum_{i=1}^{n}(p_iL_i - p_{i-1}L_i + p_iL_{i-1} - p_{i-1}L_{i-1}) \\ &= 1 - \sum_{i=1}^{n}(p_iL_i - p_{i-1}L_{i-1}) + \sum_{i=1}^{n}(p_{i-1}L_i - p_iL_{i-1}) \end{aligned}$$

Pero

$$\sum_{i=1}^{n}(p_iL_i - p_{i-1}L_{i-1}) = p_nL_n - p_0L_0 = 1$$

ya que $p_n = L_n = 1$ y $p_0 = L_0 = 0$. Por tanto,

$$G = \sum_{i=1}^{n}(p_{i-1}L_i - p_iL_{i-1})$$

q.e.d.

Una medida positiva de dispersión, similar en espíritu a la varianza, es la denominada *diferencia media,* que se define como (Kendall y Stuart 1977),[56]

$$MD = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left|y_i - y_j\right| \tag{3.9}$$

Por tanto, *MD* es el promedio de las diferencias entre todos los posibles pares de valores del vector de rentas, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, independientemente del signo que tomen estas diferencias.[57]

Proposición (3.2)

El índice de Gini, *G*, es *MD* dividido por dos veces la media de la distribución, es decir, la mitad de la diferencia media relativa,

$$G = \frac{1}{2\mu}MD = \frac{1}{2}\frac{1}{\mu n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left|y_i - y_j\right| \qquad (3.10)^{58}$$

Demostración

A partir de las propiedades del valor absoluto podemos escribir el doble sumatorio en (3.10) como,

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left|y_i - y_j\right| = 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}\left(y_i - y_j\right) = 2\sum_{i=1}^{n}\left(iy_i - \sum_{j=1}^{i}y_j\right)$$

Recordando que $p_i = i/n$, $p_i - p_{i-1} = 1/n$, $L_i = \left(\Sigma_{j=1}^{i}y_j\right)/\left(n.\mu\right)$ y $L_i - L_{i-1} = \dfrac{y_i}{n\mu}$, y sustituyendo el resultado anterior en (3.10),

$$\begin{aligned} G &= \frac{1}{\mu n^2}\sum_{i=1}^{n}\left(iy_i - \sum_{j=1}^{i}y_j\right) \\ &= \frac{1}{\mu n^2}\sum_{i=1}^{n}\left(n^2\mu\, p_i(L_i - L_{i-1}) - n\mu\, L_i\right) \end{aligned}$$

---

[56] Este es el estadístico propuesto en Gini (1912), razón por la cual algunos autores denominan a *MD* como la diferencia media de Gini (Yitzhaki 1998).

[57] Obsérvese que los términos de la suma en (3.9) valen cero para $i = j$, por lo que podría estar justificado sustituir n^2 en el denominador por $n\,(n-1)$ (Kendall y Stuart 1977).

[58] Para una distribución de la renta continua el equivalente a (3.10) es

$$G = \frac{1}{2\mu}\iint_{\mathbb{R}_{++}}\left|x - y\right| dF(x)dF(y) \tag{3.10*}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(p_i (L_i - L_{i-1}) - \frac{1}{n} L_i \right)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\left(p_i - \frac{1}{n} \right) L_i - p_i L_{i-1} \right)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \left(p_{i-1} L_i - p_i L_{i-1} \right)$$

Obtenemos así la equivalencia mostrada en la proposición (3.1).

q.e.d.

La observación de que el índice de Gini no es más que la mitad de la diferencia media relativa pone de manifiesto algunas propiedades del índice que conviene mencionar.

— Si el índice de Gini para una determinada distribución toma el valor 0,3, entonces la fórmula (3.10) nos indica que la distancia promedio entre las rentas de todos los individuos de la sociedad, consideradas dos a dos, es del orden del 60% de la media de la distribución.

De esta forma G capta la idea de *distancia media* entre las rentas de la población de acuerdo con una definición particular de *distancia*. Sustituyendo esta definición por un concepto alternativo de distancia produciría otras medidas de desigualdad.

— El índice de Gini permite acomodar con facilidad rentas nulas o incluso negativas. En este último caso la pendiente de la curva de Lorenz es negativa a lo largo del intervalo negativo de rentas.

— Puesto que la función valor absoluto es continua, pero no diferenciable en los puntos $y_i = y_j$, el índice G verifica la propiedad (1.5) de continuidad, pero no la propiedad más fuerte de diferenciabilidad, propiedad (1.5*).[59]

Como recordará el lector la propiedad (1.5*) se introdujo básicamente por conveniencia analítica. Ello significa

[59] No obstante, si suponemos que todas las rentas son diferentes, $y_i \neq y_j$, $\forall\ i \neq j$, entonces podemos mantener diferenciabilidad.

que el índice de Gini, *G*, suele ser menos manejable desde el punto de vista analítico que otros índices de la literatura, especialmente en el campo estadístico relacionado con el muestreo.

— Puesto que el no cumplimiento de la propiedad (1.5*) procede de la utilización de valores absolutos, podría pensarse que una forma de solucionar esta cuestión consistiría en tomar desviaciones al cuadrado en lugar de valores absolutos en la definición de *MD*, (3.9). Pero entonces *MD* se convierte en dos veces la varianza, (2.5), de forma que la relación entre la diferencia media, *MD*, y el índice de Gini, *G*, es muy similar a la relación entre la varianza, *V*, y el coeficiente de variación, *CV* (Yitzhaki 1998, sec. 4).

— Una relación útil en el trabajo con valores absolutos es la siguiente,

$$|y_i - y_j| = y_i + y_j - 2\min\{y_i, y_j\}$$

Lo que permite escribir (3.10) como,

$$G = 1 - \frac{1}{\mu n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\min\{y_i, y_j\} \tag{3.11}$$

Obviamente cuando $y_j \leq y_i$ entonces $|y_i - y_j| = y_i - y_j$.

— El doble sumatorio en (3.10) no es más que la suma de todos los elementos de la matriz simétrica $n \times n$, cuyo elemento (i, j) es $|y_i - y_j|$,

$$\begin{bmatrix} |y_1 - y_1| & |y_1 - y_2| & |y_1 - y_3| & \cdots & |y_1 - y_n| \\ |y_2 - y_1| & |y_2 - y_2| & |y_2 - y_3| & \cdots & |y_2 - y_n| \\ |y_3 - y_1| & |y_3 - y_2| & |y_3 - y_3| & \cdots & |y_3 - y_n| \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ |y_n - y_1| & |y_n - y_2| & |y_n - y_3| & \cdots & |y_n - y_n| \end{bmatrix}_{n\times n} \tag{3.12}$$

Puesto que esta matriz es simétrica y los elementos en la diagonal principal son nulos, dicha suma es igual a dos veces la suma de todos los elementos de la matriz triangular inferior,

$$\begin{bmatrix} |y_1 - y_1| & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ |y_2 - y_1| & |y_2 - y_2| & 0 & \cdots & 0 \\ |y_3 - y_1| & |y_3 - y_2| & |y_3 - y_3| & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ |y_n - y_1| & |y_n - y_2| & |y_n - y_3| & \cdots & |y_n - y_n| \end{bmatrix}_{n\times n} \tag{3.13}$$

Y puesto que en esta matriz $y_j < y_i$ por debajo de la diagonal, $j < i$, y $y_i = y_j$ en la diagonal, $i = j$, podemos simplificar (3.13) como,

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ y_2 - y_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ y_3 - y_1 & y_3 - y_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_n - y_1 & y_n - y_2 & y_n - y_3 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{n\times n} \tag{3.14}$$

Sen (1973) propone una forma alternativa de formular el índice de Gini, que destaca el esquema de ponderación de las rentas individuales en la función de bienestar implícita en el coeficiente de Gini.

Proposición (3.3)

El índice de Gini, G, puede escribirse como,

$$\begin{aligned} G &= 1 + \frac{1}{n} - \frac{2}{\mu n^2}\left[ny_1 + (n-1)y_2 + (n-2)y_3 + \ldots + 2y_{n-1} + y_n\right] \\ &= \frac{n+1}{n} - \frac{2}{\mu n^2}\sum_{i=1}^{n}(n+1-i)y_i \end{aligned} \tag{3.15}$$

Demostración

De acuerdo con la proposición (3.2) podemos escribir el índice de Gini como,

$$G = \frac{1}{\mu n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}\left(y_i - y_j\right)$$

Cuyo doble sumatorio coincide con la suma de los elementos de la matriz triangular inferior (3.13),

$$\begin{bmatrix} y_1 - y_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ y_2 - y_1 & y_2 - y_2 & 0 & \cdots & 0 \\ y_3 - y_1 & y_3 - y_2 & y_3 - y_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_n - y_1 & y_n - y_2 & y_n - y_3 & \cdots & y_n - y_n \end{bmatrix}$$

utilizando el hecho de que en dicha matriz $y_j \leq y_i$.

Sumando el primer término de cada elemento de dicha matriz horizontalmente por filas obtenemos $\Sigma_{i=1}^{n} i y_i$. Sumando el segundo término de cada elemento de dicha matriz verticalmente por columnas obtenemos $-\Sigma_{i=1}^{n}(n+1-i)y_i$. Por tanto,

$$\begin{aligned} G &= \frac{1}{\mu n^2}\left[\sum_{i=1}^{n} i y_i - \sum_{i=1}^{n}(n+1-i)y_i\right] \\ &= \frac{1}{\mu n^2}\left[\sum_{i=1}^{n} i y_i - 2\sum_{i=1}^{n}(n+1-i)y_i + \sum_{i=1}^{n}(n+1-i)y_i\right] \\ &= \frac{1}{\mu n^2}\left[\sum_{i=1}^{n}(n+1)y_i - 2\sum_{i=1}^{n}(n+1-i)y_i\right] \\ &= \frac{n+1}{n} - \frac{2}{\mu n^2}\sum_{i=1}^{n}(n+1-i)y_i \qquad \textit{q.e.d.} \end{aligned}$$

La fórmula (3.15) permite observar cómo G es una función lineal de las rentas individuales y pertenece, por tanto, a la clase de medidas lineales de desigualdad.[60] Esta formulación permite obtener de forma sencilla el efecto sobre el índice de una transferencia de Pigou-Dalton de un individuo rico, i, a uno pobre, j. Puesto que G no es diferenciable con generalidad no es posible obtener dicho efecto mediante diferenciación, por lo que consideramos una transferencia discreta de δ unidades de renta de i a j, suponiendo $y_j + \delta \leq y_i - \delta$.

---

[60] Alternativamente podemos escribir (3.15) como

$$\begin{aligned} G &= \frac{1}{\mu n^2}\sum_{i=1}^{n}\left[i - (n+1-i)\right] y_i \\ &= \frac{2}{\mu n^2}\sum_{i=1}^{n}\left[i - \frac{n+1}{2}\right] y_i \end{aligned}$$

A partir de (3.15) es fácil deducir que el efecto de dicha transferencia es

$$\delta\frac{2}{\mu n^2}[j-i]<0, \text{ puesto que } j<i$$

Es importante observar que el efecto de dicha transferencia depende del ranking de ambos individuos, más concretamente de su distancia ordinal; pero no de los niveles de renta, ni de la distancia entre las rentas de dichos individuos, sino tan solo de la diferencia de ranking de los individuos entre los que tiene lugar la transferencia.

Una manipulación sencilla de (3.15) nos permite demostrar la siguiente proposición.

Proposición (3.4)

El índice de Gini, G, puede escribirse como,

$$\begin{aligned} G &= \frac{2}{\mu n^2}\left[n(\mu-y_1)+(n-1)(\mu-y_2)+\ldots+2(\mu-y_{n-1})+(\mu-y_n)\right] \\ &= \frac{2}{\mu n^2}\sum_{i=1}^{n}(n+1-i)(\mu-y_i) \end{aligned} \qquad (3.16)^{61}$$

Demostración

Observando que,

$$\sum_{i=1}^{n}(n+1-i)=n^2+n-\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n(n+1)}{2}$$

Podemos escribir el primer término a la derecha del igual en (3.15) como,

$$\frac{n+1}{n}=\frac{2}{\mu n^2}\sum_{i=1}^{n}(n+1-i)\mu$$

y en consecuencia

[61] El equivalente a (3.16) para una distribución de renta continua es

$$G=\frac{2}{\mu}\int_{\mathbb{R}_{++}}(1-F(y))(\mu-y)\,dF(y) \qquad (3.16^*)$$

donde $F(y)=p$.

$$G = \frac{2}{\mu n^2}\sum_{i=1}^{n}(n+1-i)\mu - \frac{2}{\mu n^2}\sum_{i=1}^{n}(n+1-i)y_i$$
$$= \frac{2}{\mu n^2}\sum_{i=1}^{n}(n+1-i)(\mu - y_i)$$

q.e.d.

Esta formulación refuerza la idea del índice de Gini como medida de desigualdad lineal en rentas y cómo las desviaciones de cada renta respecto al promedio son ponderadas con pesos que disminuyen linealmente con el ranking de los individuos en la sociedad.

Finalmente, observando que $\Sigma_{i=1}^{n}(\mu - y_i) = 0$, obtenemos el siguiente resultado de interés computacional.

Proposición (3.5)

El índice de Gini, *G*, es proporcional a la covarianza entre las rentas y los ranking de los individuos en la sociedad, siendo el coeficiente de proporcionalidad $2/\mu$. Por tanto, podemos escribir,

$$G = \frac{2}{\mu n}\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \mu\right)p_i = \frac{2}{\mu}Cov(y, F(y)) \tag{3.17}$$

Demostración

A partir de (3.16),

$$G = \frac{2}{\mu n^2}\sum_{i=1}^{n}(n+1-i)(\mu - y_i)$$
$$= \frac{2}{\mu n^2}\left[(n+1)\sum_{i=1}^{n}(\mu - y_i) - \sum_{i=1}^{n}(\mu - y_i)i\right]$$
$$= \frac{2}{\mu n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \mu)p_i$$
$$= \frac{2}{\mu n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \mu)F(y_i) = \frac{2}{\mu}Cov(y, F(y))$$

puesto que $p_i = F(y_i)$. *q.e.d.*

Este último resultado muestra una sencilla fórmula de calcular *G* en la práctica. Obsérvese además la analogía entre (3.17) y la fórmula para la varianza, $V(y) = Cov(y, y)$.

El índice de Gini verifica todas las propiedades descritas en el capítulo 1,[62] excepto la descomponibilidad aditiva. El coeficiente de Gini sólo es descomponible en el sentido definido por la propiedad (1.7) en un caso muy particular que será analizado, no obstante, en el capítulo 7.

3.2. Una generalización del índice de Gini *(G_ν)*

La fórmula (3.7) para el índice de Gini,

$$G = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}(p_i - L_i)$$

muestra claramente cómo las distancias entre las proporciones acumuladas de renta de la distribución $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, respecto a la distribución de renta igualitaria, $p_i - L(p_i)$, son igualmente importantes a lo largo de todos los tramos de la distribución, en el sentido de que dichas distancias son ponderadas por el mismo factor, 2.

Podríamos pensar, sin embargo, en atribuir ponderaciones diferentes en distintos tramos de la distribución, de forma que la suma simple anterior fuera sustituida por una suma ponderada, donde los pesos a aplicar en cada punto de la curva de Lorenz sean función del cuantil correspondiente. No hay una forma única de efectuar esta ponderación,[63] pero la generalización del índice de Gini más popular se debe a Yitzhaki (1983),[64] quien sugirió utilizar como función de ponderación la familia uniparamétrica

$$\kappa_i(\nu) = \nu(\nu - 1)\left(\frac{n+1-i}{n}\right)^{\nu-2} \tag{3.18}$$

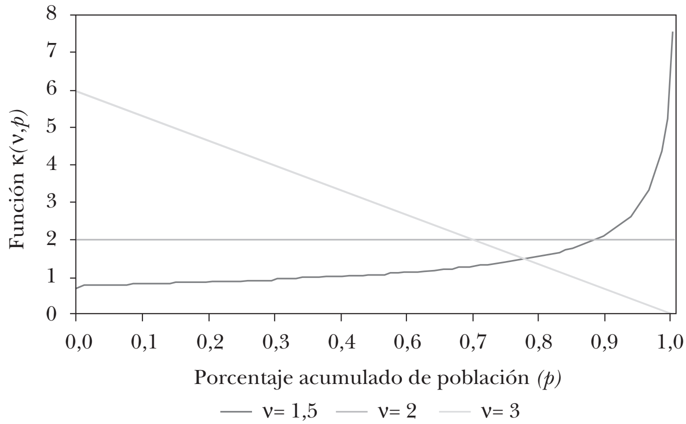
donde $\nu > 1$ para obtener pesos estrictamente positivos en todos los puntos, $i = 1, 2, \ldots, n$. El gráfico 3.4 muestra la forma de la fun-

[62] Considerando la propiedad (1.5), en lugar de la propiedad (1.5*).

[63] El lector interesado puede consultar diversos esquemas de ponderación en los trabajos de Mehran (1976), Donaldson y Weymark (1980, 1983), Weymark (1981), Yaari (1988), Chakravarty (1988), Ben-Porath y Gilboa (1994), Aaberge (2000) o Imedio y Bárcena (2007).

[64] El esquema de ponderación propuesto por Yitzhaki (1983) procede originariamente de Kakwani (1980b) en su generalización de los índices de pobreza de Sen (1976a).

GRÁFICO 3.4: Ponderaciones del índice de Gini generalizado, κ *(ν, p)*



Fuente: Elaboración propia.

ción $\kappa_i(\nu)$ para algunos valores de ν. Obsérvese como a medida que aumenta ν se obtienen mayores valores de la función para menores valores del ranking de los individuos *i*.

A partir de la función de ponderación (3.18) Yitzhaki (1983) propone un índice de Gini *generalizado*, G_ν, también llamado *S-Gini*, y definido a partir de (3.7) sustituyendo el factor de ponderación de 2 por la función (3.18). Es decir,

$$\begin{aligned} G_\nu &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\kappa_i(\nu)\,(p_i - L_i) \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[\nu(\nu-1)\left(\frac{n+1-i}{n}\right)^{\nu-2}(p_i - L_i)\right] \end{aligned} \qquad (3.19)^{65}$$

El índice de Gini generalizado es, pues, una familia uniparamétrica de índices de desigualdad cuyos miembros son identificados por el valor del parámetro ν > 1. Para ν = 2 obtenemos $\kappa_i(\nu) = 2$,

[65] El equivalente a (3.18) para una distribución continua es

$$\kappa(\nu, p) = v(v-1)\,(1-p)^{v-2} \qquad (3.18^*)$$

Y el índice de Gini generalizado a partir de la versión continua de la curva de Lorenz

$$G_\nu = \int_0^1 \kappa(\nu, p)\big(p - L(p)\big)\,dp = \int_0^1 v(v-1)\,(1-p)^{v-2}\big(p - L(p)\big)\,dp \qquad (3.19^*)$$

y en consecuencia G_2 coincide con el índice de Gini ordinario, $G_2 = G$, que otorga idéntica ponderación a todas las distancias $p_i - L(p_i)$, el peso es en este caso independiente del ranking de los individuos. Cuando $1 < \nu < 2$, entonces se otorga mayor peso a las distancias en la cola superior de la distribución y obtenemos ponderaciones crecientes con p. Por el contrario cuando $\nu > 2$, el mayor peso se atribuye a la cola inferior de la distribución, y en este caso obtenemos ponderaciones decrecientes con p. El gráfico 3.4 ilustra estas diferentes situaciones.

El parámetro ν puede, de esta forma, interpretarse como una medida de aversión a la desigualdad, ya que un incremento en ν tiene el efecto de aumentar los pesos asignados a las rentas bajas de la distribución y disminuir aquellos asignados a las rentas altas en el proceso de agregación de la curva de Lorenz. De hecho es posible demostrar que $G_\nu \rightarrow 1-\left(y_1/\mu\right)$ conforme $\nu \rightarrow \infty$, mientras que por el contrario $G_\nu \rightarrow 0$ conforme $\nu \rightarrow 1$.

En este sentido el parámetro ν es similar al parámetro θ de la familia de índices de entropía generalizados que fue introducida en el capítulo 1, y que estudiaremos con más detalle al final de este capítulo. De la misma forma Yitzhaki (1983) argumenta que G_ν tiene propiedades muy similares a la familia de índices de desigualdad de Atkinson (1970) que depende de un parámetro que mide la aversión a la desigualdad de la sociedad, y que será estudiada con detalle en el capítulo 4.

La definición (3.19) de G_ν se basa en la agregación de las distancias entre la línea de igualdad y la curva de Lorenz, de esta forma G_ν no es más que el área A del gráfico 3.1 ponderada *(distorsionada)* por la función (3.18). Sin embargo ya vimos en el epígrafe anterior cómo era posible escribir el índice de Gini, G, de forma que fuera explícito el esquema de ponderación de las diferentes rentas individuales en la construcción del índice (Sen, 1973). La fórmula (3.15) deja claro que la ponderación asignada a cada renta individual decrece linealmente con el ranking del individuo de acuerdo con el esquema $\left[2(n+1-i)\right]/n$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Resulta de interés examinar cuál es el esquema de ponderación que G_ν asigna a las rentas individuales.

Proposición (3.6)

El índice de Gini generalizado, G_ν, puede escribirse (aproximadamente)[66] como

$$G_\nu \approx \frac{1}{\mu n}\sum_{i=1}^{n}\omega_i(\nu)(\mu - y_i) = \frac{1}{\mu n}\sum_{i=1}^{n}\left[\nu\left(\frac{n+1-i}{n}\right)^{\nu-1}(\mu - y_i)\right] \tag{3.20}$$

Lo que define la función de ponderación, $\omega_i(\nu)$, como

$$\omega_i(\nu) = \nu\left(\frac{n+1-i}{n}\right)^{\nu-1} \qquad (3.21)^{67}$$

Demostración

Véase el apéndice A.3.

Esta derivación deja claro que el índice de Gini generalizado, G_ν, pondera cada renta individual por un peso que depende del ranking del individuo de acuerdo con la función (3.21), que solo es lineal en i para $\nu = 2$.

La forma de la función $\omega_i(\nu)$ para los mismos valores de ν que los representados en el gráfico 3.4, se ofrece en el gráfico 3.5. Como ya sabemos para $\nu = 2$ obtenemos pesos que decrecen linealmente. Para valores $1 < \nu < 2$, entonces G_ν otorga menor peso a los individuos de renta baja que el peso otorgado por el índice de Gini ordinario, mientras que para $\nu > 2$, el índice G_ν otorga mayor peso a los individuos de renta baja que el que otorga G. Lo contrario es cierto para los individuos de rentas elevadas. Esta es la forma en la que el parámetro ν recoge la aversión por la desigualdad.

---

[66] La aproximación es exacta para distribuciones continuas (Yitzhaki 1983) y discreta solo cuando $\nu = 2$. El motivo es obvio a partir de la demostración de la proposición (3.6).

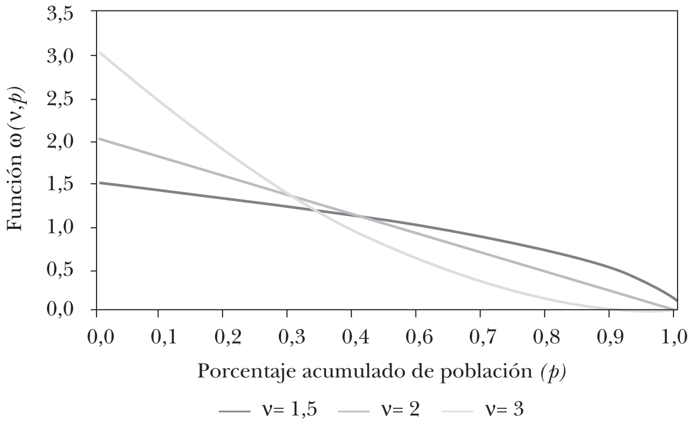
[67] El equivalente a (3.21) para una distribución continua es

$$\omega(\nu, p) = v(1-p)^{v-1} \tag{3.21*}$$

y el índice de Gini generalizado para una distribución continua equivalente a (3.20) es

$$G_\nu = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_{++}} \omega\big(\nu, F(y)\big)(\mu - y)\,dF(y) = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_{++}} v\big(1-F(y)\big)^{v-1}(\mu - y)\,dF(y) \tag{3.20*}$$

GRÁFICO 3.5: **Ponderaciones del índice de Gini generalizado, ω(ν, *p*)**



Fuente: Elaboración propia.

Dado que suponemos $\nu > 1$, es fácil observar que en este caso, $\omega_i(\nu) > 0\ \forall i$, que los pesos son decrecientes en el ranking de los individuos y que conforme $n \to \infty$ el promedio de los pesos tiende a 1, es decir,

$$\frac{\nu}{n^{v}}\sum_{i=1}^{n}(n+1-i)^{\nu-1} = \frac{\nu}{n^{v}}\sum_{j=1}^{n} j^{\nu-1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

Utilizando este último resultado podemos escribir (3.20) como

$$G_\nu \approx 1 - \frac{\nu}{\mu n^{\nu}}\sum_{i=1}^{n}\left[(n+1-i)^{\nu-1}\, y_i\right] \tag{3.22}$$

que es la fórmula alternativa de Sen (1973) para el caso del índice de Gini generalizado, G_ν. A partir de ella es fácil observar que el efecto de una transferencia de δ unidades de renta de un individuo rico, *i*, a uno pobre, *j*, suponiendo $y_j + \delta \leq y_i - \delta$, es

$$\delta\frac{\nu}{\mu n^{\nu}}\left[(n+1-i)^{\nu-1} - (n+1-j)^{\nu-1}\right] < 0$$

puesto que $j < i$ y $\nu > 1$.

Es importante observar que, al igual que en el caso de *G*, dicha transferencia no depende de los niveles de renta de los individuos, ni tampoco de la distancia entre las rentas de dichos individuos, sino tan solo de la diferencia de ranking de los individuos entre los que tiene lugar la transferencia, pero ahora dicho efecto depende, además, de en qué parte de la distribución tiene lugar dicha transferencia a través del parámetro de valoración ética, ν.

Finalmente obsérvese que, a partir de (3.20), podemos escribir

$$G_\nu \approx -\frac{1}{\mu} Cov\left(y, \omega\left(\nu, F(y)\right)\right) \tag{3.23}$$

que para $\nu = 2$ se corresponde con (3.17).

3.3. Los índices de Theil *(T)*

> ***entropía***
> 1. (Física) 'Medida del desorden de un sistema'.
> 2. (Información) 'Medida de la incertidumbre existente ante un conjunto de mensajes, de los cuales se va a recibir uno solo'.
>
> (*Diccionario de la Real Academia Española* 2001)

De la misma forma que al presentar los conceptos preliminares en la introducción tomamos prestados algunos aspectos conceptuales de la estadística, es perfectamente lícito acudir a otros campos del conocimiento para analizar la distribución de la renta. Este fue el enfoque de Theil (1967) que, a partir de la noción de *entropía* de la teoría de la información, propuso dos interesantes medidas de desigualdad que se han revelado especialmente fructíferas, tanto desde un punto de vista teórico como aplicado.

La teoría de la información (Khinchin 1957; Kullback 1959) parte de los siguientes elementos básicos:

1) Un conjunto de sucesos posibles, cada uno de los cuales lleva asociado una probabilidad de ocurrencia, digamos w.
2) Una *función de información*, ϕ, que evalúa dichos sucesos de acuerdo con sus probabilidades asociadas, $\phi(w)$. Dicha función de información incorpora tres propiedades:
   a) Si un suceso ocurre con certeza, $w = 1$, la información que nos proporciona su observación es nula, $\phi(1) = 0$.
   b) Sucesos con elevada probabilidad de ocurrencia tienen poco contenido informativo, por tanto $w > w' \Rightarrow \phi(w) < \phi(w')$.

Dicho con otras palabras, el contenido informativo de que un suceso haya ocurrido, $\phi(w)$, será una función decreciente de w,

$$\frac{d\phi(w)}{dw} < 0$$

Esto indica simplemente que cuanto menos probable sea un suceso más interesante será conocer que este ha ocurrido.

c) La información conjunta de dos sucesos independientes es la suma de la información de cada suceso por separado, $\phi(w.w') = \phi(w) + \phi(w')$.

Estos tres requisitos identifican completamente la función de información y aseguran que dicha función es de la forma

$$\phi(w) = -\log(w) = \log\left(\frac{1}{w}\right)$$

3) El concepto de entropía se identifica con la información esperada de una situación.

Así pues, si tenemos n posibles sucesos con probabilidades $w_1, w_2, \ldots, w_n$ que verifican $\Sigma_{i=1}^{n} w_i = 1$ y $w_i > 0,\ \forall i$, definimos la entropía de este conjunto de sucesos como

$$Q(\mathbf{w}) = \sum_{i=1}^{n} w_i \phi(w_i) = \sum_{i=1}^{n} w_i \log\left(\frac{1}{w_i}\right) \qquad (3.24)$$

Para la aplicación de este esquema conceptual a la distribución de la renta, Theil (1967) sustituyó el concepto de probabilidades asignadas a sucesos por proporciones de renta de los n individuos de la sociedad, e introdujo un elemento adicional:

4) Una distribución de referencia, en la práctica la distribución igualitaria, ya que para esta distribución se maximiza la entropía.[68]

[68] Para comprobarlo podemos resolver el programa *Max* $\Sigma_{i=1}^{n} w_i \log\left(1/w_i\right)$ sujeto a $\Sigma_{i=1}^{n} w_i = 1$. Las condiciones necesarias de máximo implican que $\log\left(1/w_i\right) = \log\left(1/w_j\right)\ \ \forall i, j$, de modo que todos los valores de w_i deben ser iguales en el máximo, y por tanto iguales a $1/n$.

Dicho de otro modo, cuanto más se acerquen las probabilidades a $1/n$ mayor será la entropía, de forma que la información esperada de una situación se maximiza cuando todos los sucesos son equiprobables. En esta situación la observación de cualquier suceso tiene el mismo contenido informativo.

En consecuencia, para la distribución de referencia $w_i = (1/n),\ \forall i$, y el valor máximo de la entropía es, por tanto,

$$Q\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n}\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \log n = \log n = \phi\left(\frac{1}{n}\right)$$

Así pues Theil (1967) dió dos pasos para la obtención de sus índices de desigualdad: primero, identificando w_i con la participación de renta del individuo i en el total, s_i; segundo, tomando la diferencia entre $\log n$, el máximo de la función Q, y el valor $Q(\mathbf{w})$ correspondiente a la distribución de la renta.[69]

Más formalmente, podemos definir el índice de desigualdad de Theil, T, como:

$$T = Q\left(\frac{1}{n}\iota_n\right) - Q(\mathbf{s}) = \log n - Q(\mathbf{s}) \qquad (3.25)$$

donde ι_n es el vector unitario de dimensión n, y $\mathbf{s}$ es el vector de participaciones de renta, $s_i = y_i / n\mu$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Es decir, el índice de Theil viene dado por la diferencia entre el valor de la función Q en el caso de igualdad y el valor de dicha función para la dispersión observada en la distribución de la renta.

Teniendo en cuenta que $Q(\mathbf{s}) = \Sigma_{i=1}^{n} s_i \log(1/s_i) = -\Sigma_{i=1}^{n} s_i \log s_i$ y que $\log n = \Sigma_{i=1}^{n} s_i \log n$, podemos escribir:

$$\begin{aligned} T &= \sum_{i=1}^{n} s_i \log n + \sum_{i=1}^{n} s_i \log s_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} s_i \log n s_i \end{aligned} \qquad (3.26)$$

[69] Una caracterización alternativa puede verse en Foster (1983).

Theil interpreta el índice T como «la información esperada de un mensaje que transforma proporciones de población en proporciones de renta» (Theil 1967). De esta forma, el índice T puede interpretarse como una función general de distancia que mide la divergencia entre la participación de la renta y la participación de la población, y pondera dichas divergencias por las proporciones de renta.

Obsérvese que $T = 0$ cuando $s_i = 1/n, \quad \forall i$, igualdad, mientras que en el caso de máxima desigualdad, cuando toda la renta la posee un solo individuo, $s_n \to 1$ y $s_i \to 0 \quad \forall i \neq n$, $T \to \log n$, puesto que $s.\log s \to 0$ conforme $s \to 0$. Ello sugiere que podemos normalizar este índice, para acotarlo en el intervalo [0, 1], tomando

$$\tilde{T} = \frac{1}{\log n} T \tag{3.27}$$

con $0 \leq \tilde{T} \leq 1$. Adviértase no obstante que el índice de Theil normalizado, $\tilde{T}$, es sensible al tamaño de la población, n, y en particular no verifica el principio de réplica de las poblaciones, la propiedad (1.3).

Algunas manipulaciones de (3.26) permiten entender mejor la estructura del índice. Recordando que $s_i = \frac{y_i}{n\mu}$, podemos escribir (3.26) como

$$T = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{y_i}{\mu} \log \frac{y_i}{\mu} \tag{3.28}$$

donde y_i/μ es la pendiente de la curva de Lorenz en el cuantil correspondiente al nivel de renta y_i. Por tanto T puede obtenerse directamente de la curva de Lorenz de la distribución de la renta.[70]

Téngase en cuenta que este índice corresponde a la familia de índices de entropía generalizados para un valor del parámetro $\theta = 1$. Por tanto, de acuerdo con el teorema (1.1), T verifica todas las propiedades enunciadas en el capítulo 1. En particular verifica el principio de las transferencias de Dalton, propiedad (1.4), y es un índice aditivamente descomponible, propiedad (1.7).

---

[70] Para una interpretación diferente de los índices de Theil véase Kanbur (1984).

Respecto al principio de las transferencias de Pigou-Dalton, el efecto sobre T de una pequeña transferencia δ de un individuo rico, i, a uno pobre, j, sin alterar sus posiciones relativas, viene dado por

$$\delta \frac{1}{n\mu} \log\left(\frac{y_j}{y_i}\right) < 0, \text{ puesto que } y_j < y_i$$

Veamos ahora qué forma adopta la descomposición aditiva por subgrupos de población del índice de Theil, T.

Utilizando la misma notación que en el caso de la descomposición de la varianza escribimos el índice de Theil, T, como

$$\begin{aligned}
T &= \frac{1}{n} \sum_{g=1}^{G} \sum_{i=1}^{n_g} \frac{y_i^g}{\mu} \log \frac{y_i^g}{\mu} \\
&= \sum_{g=1}^{G} \sum_{i=1}^{n_g} \frac{y_i^g}{n\mu} \log \frac{y_i^g}{\mu_g} \frac{\mu_g}{\mu} \\
&= \sum_{g=1}^{G} \sum_{i=1}^{n_g} \frac{y_i^g}{n\mu} \left(\log \frac{y_i^g}{\mu_g} + \log \frac{\mu_g}{\mu} \right) \\
&= \sum_{g=1}^{G} \left[\sum_{i=1}^{n_g} \frac{y_i^g}{n\mu} \log \frac{y_i^g}{\mu_g} + \sum_{i=1}^{n_g} \frac{y_i^g}{n\mu} \log \frac{\mu_g}{\mu} \right] \\
&= \sum_{g=1}^{G} \frac{n_g \mu_g}{n\mu} \underbrace{\sum_{i=1}^{n_g} \frac{y_i^g}{n_g \mu_g} \log \frac{y_i^g}{\mu_g}}_{T^g} + \sum_{g=1}^{G} \frac{n_g \mu_g}{n\mu} \log \frac{\mu_g}{\mu}
\end{aligned}$$

A partir de aquí, el primer término de la expresión final de este desarrollo nos da la suma ponderada de los índices T *dentro* de los grupos. El componente intragrupos de la descomposición (1.2), que pondera la dispersión dentro de cada uno de los grupos por su proporción de renta en el total,

$$\frac{n_g \mu_g}{n\mu} = \frac{\Sigma_{i=1}^{n_g} y_i^g}{\Sigma_{i=1}^{n} y_i}$$

El segundo término de la expresión anterior no es más que el índice T aplicado a las medias de cada grupo, es decir el índice T *entre* los grupos, el componente intergrupos de la descomposición (1.2).

De aquí,

$$T = \sum_{g=1}^{G} \frac{n_g \mu_g}{n\mu} T^g + \sum_{g=1}^{G} \frac{n_g \mu_g}{n\mu} \log \frac{\mu_g}{\mu} \tag{3.29}$$

La ecuación (3.29) nos da la descomposición del índice de Theil T en dos términos: la desigualdad dentro de los grupos y la desigualdad entre grupos.

Por tanto, si llamamos

1) $T_W = \sum_{g=1}^{G} \frac{n_g \mu_g}{n\mu} T^g$, y

2) $T_B = \sum_{g=1}^{G} \frac{n_g \mu_g}{n\mu} \log \frac{\mu_g}{\mu}$

podemos escribir $T = T_W + T_B$.

Theil (1967) sugirió un segundo índice de desigualdad, que denominaremos T^*, intercambiando los papeles de las proporciones de renta y población en la fórmula anterior, (3.26). Esto es,

$$T^* = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \log \frac{1}{ns_i} \tag{3.30}$$

Theil (1967) interpreta T^* como: «El valor informativo esperado del mensaje indirecto que transforma las proporciones de renta como probabilidades a priori en proporciones de población como probabilidades a posteriori». Al igual que el índice T, el índice T^* mide la diferencia entre la participación de la renta y la participación de la población, pero ponderando dichas diferencias por las proporciones de población.

Obsérvese que, en el caso de igualdad, las proporciones de renta y población son idénticas y $T^* = 0$, mientras que en el caso de máxima desigualdad, cuando toda la renta la posee un solo individuo, $s_n \to 1$ y $s_i \to 0 \quad \forall i \neq n$, T^* no está acotado superiormente.[71] Por tanto el rango de variación de T^* está constituido por el intervalo $[0, \infty)$.

[71] En realidad, en este caso, al igual que sucede con los índices *VL* y *LV*, el índice T^* no está definido y simplemente diverge conforme $s_i \to 0$ para algún i.

De nuevo algunas manipulaciones sencillas en (3.30) permiten entender mejor la estructura del índice. Podemos escribir T^* como,

$$T^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\log\frac{\mu}{y_i} \tag{3.31}$$

donde μ/y_i es la inversa de la pendiente de la curva de Lorenz en el cuantil correspondiente al nivel de renta y_i. Por tanto T^*, al igual que T, puede obtenerse directamente de la curva de Lorenz de la distribución de la renta.[72] La fórmula (3.31) justifica el otro nombre bajo el que se conoce a este índice, la *desviación media logarítmica.*

Puede verse también, que T^* es igual al logaritmo de la ratio entre la media aritmética de la distribución, μ, y la medida geométrica, $\tilde{\mu}$, es decir,

$$\begin{aligned} T^* &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\log\mu - \log y_i\right) \\ &= \log\mu - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\log y_i \\ &= \log\mu - \log\tilde{\mu} \\ &= \log\frac{\mu}{\tilde{\mu}} \end{aligned} \tag{3.32}$$

Este índice de desigualdad corresponde a la familia de índices de entropía generalizados para un valor del parámetro $\theta = 0$. Por tanto, de acuerdo con el teorema (1.1), T^* también verifica todas las propiedades enunciadas en el capítulo 1. En particular verifica el principio de las transferencias de Dalton, propiedad (1.4), y es un índice aditivamente descomponible, propiedad (1.7).

Respecto al principio de las transferencias de Pigou-Dalton, el efecto sobre T^* de una pequeña transferencia δ de un individuo rico, i, a uno pobre, j, sin alterar sus posiciones relativas, viene dado por

$$\delta\frac{1}{n}\left(\frac{1}{y_i} - \frac{1}{y_j}\right) < 0, \text{ puesto que } y_j < y_i$$

[72] En consecuencia, sería posible ofrecer una interpretación geométrica de estos índices.

Veamos ahora qué forma adopta la descomposición aditiva por subgrupos de población del índice de Theil, T^*.

Utilizando la misma notación que en el caso anterior escribimos el índice de Theil, T^*, como

$$
\begin{aligned}
T^* &= \frac{1}{n}\sum_{g=1}^{G}\sum_{i=1}^{n_g}\log\frac{\mu}{y_i^g} \\
&= \sum_{g=1}^{G}\sum_{i=1}^{n_g}\frac{1}{n}\log\frac{\mu_g}{y_i^g}\cdot\frac{\mu}{\mu_g} \\
&= \sum_{g=1}^{G}\sum_{i=1}^{n_g}\frac{1}{n}\left(\log\frac{\mu_g}{y_i^g}+\log\frac{\mu}{\mu_g}\right) \\
&= \sum_{g=1}^{G}\frac{n_g}{n}\left[\frac{1}{n_g}\sum_{i=1}^{n_g}\log\frac{\mu_g}{y_i^g}+\log\frac{\mu}{\mu_g}\right] \\
&= \sum_{g=1}^{G}\frac{n_g}{n}\cdot\underbrace{\frac{1}{n_g}\sum_{i=1}^{n_g}\log\frac{\mu_g}{y_i^g}}_{T^{*g}}+\sum_{g=1}^{G}\frac{n_g}{n}\log\frac{\mu}{\mu_g}
\end{aligned}
$$

A partir de aquí, y al igual que en el caso anterior, el primer término de la expresión final de este desarrollo nos da la suma ponderada de los índices T^* dentro de los grupos. El componente intragrupos de la descomposición (1.2), que pondera la dispersión dentro de cada uno de los grupos por su proporción de población dentro del total, n_g/n.

El segundo término de la expresión anterior no es más que el índice T^* aplicado a las medias de cada grupo, es decir el índice T^* entre los grupos. Este es el componente intergrupos de la descomposición (1.2). Obsérvese además que el cociente de medias, μ/μ_g, puede escribirse como cociente entre proporciones de población y proporciones de renta del grupo g respecto al total,

$$
\frac{\mu}{\mu_g}=\frac{\Sigma_{i=1}^{n} y_i/n}{\Sigma_{i=1}^{n_g} y_i^g/n_g}=\frac{n_g/n}{\Sigma_{i=1}^{n_g} y_i^g/\Sigma_{i=1}^{n} y_i}
$$

por lo que una forma equivalente de escribir este término es

$$
\sum_{g=1}^{G}\frac{n_g}{n}\log\frac{\mu}{\mu_g}=\sum_{g=1}^{G}\frac{n_g}{n}\log\frac{n_g/n}{\Sigma_{i=1}^{n_g} y_i^g/\Sigma_{i=1}^{n} y_i}
$$

De aquí,

$$T^* = \sum_{g=1}^{G} \frac{n_g}{n} T^{*g} + \sum_{g=1}^{G} \frac{n_g}{n} \log \frac{\mu}{\mu_g} \qquad (3.33)$$

La ecuación (3.33) nos da la descomposición del índice de Theil T^* en dos términos: la desigualdad dentro de los grupos y la desigualdad entre grupos.

Por tanto, si llamamos

1) $T_W^* = \sum_{g=1}^{G} \frac{n_g}{n} T^{*g}$, y

2) $T_B^* = \sum_{g=1}^{G} \frac{n_g}{n} \log \frac{\mu}{\mu_g}$

podemos escribir $T^* = T_W^* + T_B^*$.

3.4. Una generalización de los índices de Theil *(T_θ)*

Como ya indicamos en el capítulo 1, los índices de Theil, T y T^*, son casos particulares de la familia de *índices de entropía generalizados*. Este último epígrafe del capítulo examina pues la generalización de los índices de Theil desde el punto de vista de la teoría de la información.[73] En particular relajaremos la forma de la función de información adoptada en el epígrafe anterior, $\phi(w) = -\log(w)$.

Como observamos al analizar los elementos básicos de la teoría de la información, la forma de dicha función viene impuesta

[73] La familia de índices de entropía generalizados puede ser derivada desde varios enfoques diferentes. Por una parte, a partir de las propiedades de las funciones aditivamente separables bajo ciertas condiciones, básicamente el cumplimiento de las propiedades de descomponiblidad y réplica de las poblaciones, tal y como hacen los análisis de Bourguignon (1979), Shorrocks (1980), Cowell (1980) y Cowell y Kuga (1981a). Por otra parte, mediante el fortalecimiento del principio de las transferencias de Pigou-Dalton, a partir del concepto de distancia entre individuos de la sociedad medido a través de sus proporciones de renta en el total, tal y como hace el análisis de Cowell y Kuga (1981b). Finalmente, mediante la relajación de algunos de los elementos básicos de la teoría de la información, como muestran los análisis de Cowell (1977, 1995) y Cowell y Kuga (1981b). Adoptamos aquí este último enfoque, íntimamente relacionado con el concepto de distancia y el fortalecimiento del principio de las transferencias de Pigou-Dalton, porque es más intuitivo en nuestro contexto, y porque el análisis de la descomponibilidad aditiva, propiedad (1.7), será retomado en los capítulos 6 y 7.

por el requisito 2c del apartado 3.3 (p. 106) de que para sucesos independientes la información conjunta pueda obtenerse como la suma de las informaciones de cada suceso por separado. Sin embargo, aunque este puede ser un requisito adecuado en el contexto de los espacios probabilísticos, no tiene una justificación clara cuando manejamos un vector de proporciones de renta en el contexto del análisis distributivo. En concreto, la función $-\log(w)$ puede considerarse como un miembro particular de una familia de funciones mucho más amplia, que también verifican los otros dos requisitos esenciales de la teoría de la información,

$$\phi(1) = 0 \quad \text{y} \quad \frac{d\phi(w)}{dw} < 0,$$

dicha familia viene dada por

$$\phi(\beta, w) = \begin{cases} \dfrac{1 - w^{\beta}}{\beta} & \beta \neq 0 \\ -\log(w) & \beta = 0 \end{cases} \tag{3.34}$$

En consecuencia $\phi(\beta, w)$, definida por (3.34), puede considerarse como una *función de información generalizada*. Algunos miembros de esta familia se ofrecen en el gráfico 3.6. Obsérvese que $\beta = 0$ corresponde a $-\log(w)$, considerado en el epígrafe anterior.[74]

El otro elemento clave, a partir del cual realizamos la generalización, es el efecto de una transferencia de Pigou-Dalton. Hemos observado que, en términos de proporciones de renta, el efecto de dicha transferencia sobre T, digamos dT, viene dado por[75]

$$\begin{aligned} dT &= -\frac{\delta}{n\mu} \log\left(\frac{y_i}{y_j}\right) \\ &= -ds\left[\log s_i - \log s_j\right] \\ &= ds\left[\phi(s_i) - \phi(s_j)\right] \end{aligned} \tag{3.35}$$

donde $ds = \delta / n\mu$.

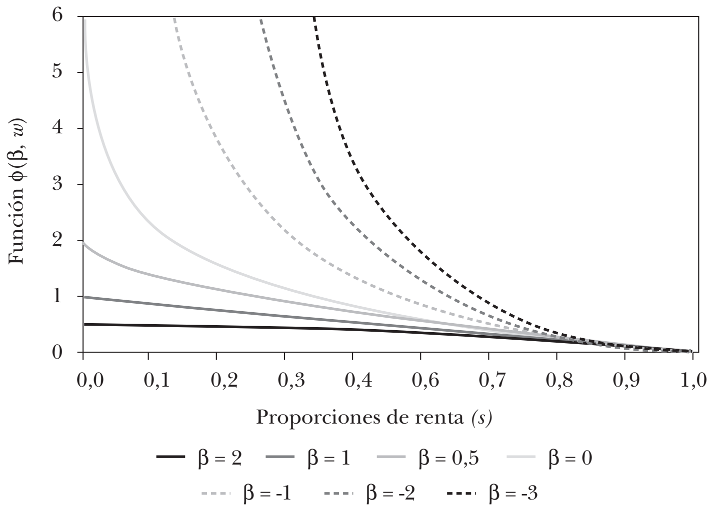
[74] La familia de funciones $\phi(\beta, w)$ no es más que (el negativo de) la clase de transformaciones no lineales introducidas por Box y Cox (1964), de amplio uso en estadística y econometría y cuyas propiedades son bien conocidas.

[75] Los argumentos de este epígrafe podrían realizarse de forma simétrica a partir del segundo índice de Theil, T^*.

Por tanto, la variación en la desigualdad, medida por T, depende de la distancia entre individuos, medida a partir de sus proporciones de renta, s, y evaluada a partir de la función de información, $\phi(s)$. Observamos, pues, que esta función mide la sensibilidad del índice a transferencias en diferentes partes de la distribución. Así, el caso $\beta = 0$ en el gráfico 3.6 se corresponde con (3.35), $\phi(s) = -\log(s)$, y observamos cómo para obtener la misma reducción en T con una transferencia dada, necesitamos que los individuos entre los que tiene lugar la transferencia estén mucho más distantes, en términos de s, si la transferencia tiene lugar entre individuos ricos, que si la tiene entre individuos pobres. Sin embargo, $\phi(s) = -\log(s)$ impone una particular medida de distancia que podemos relajar entre individuos.

Manteniendo el supuesto de que una transferencia de Pigou-Dalton solo dependa de la distancia entre individuos, medida en términos de la evaluación de sus proporciones de renta,[76] y sustituyendo la función de información $\phi(s)$, por la función de

GRÁFICO 3.6: Función de información generalizada, $\phi(\beta, w)$



Fuente: Elaboración propia.

[76] Lo que Cowell y Kuga (1981b) y Cowell (1995) denominan el principio fuerte de las transferencias de Dalton.

información generalizada $\phi(\beta, s)$ en (3.35), es posible obtener la generalización del índice Theil.

Proposición (3.7)

El índice generalizado de Theil, T_θ, puede escribirse como

$$T_\theta = \frac{n^{1-\theta}}{\theta(\theta-1)} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left[\left(\frac{y_i}{\mu} \right)^{\theta} - 1 \right] \qquad \forall \theta \neq 0,1 \tag{3.36}$$

con las expresiones límite adecuadas para $\theta = 0$ y $\theta = 1$.

Demostración

Véase el apéndice A.3.

Para $\theta = 1$ el recurso a la regla de L'Hôpital genera el índice de Theil T, es decir, $T_1 = T$. Mientras que para $\theta = 0$ la regla de L'Hôpital genera nT^*, es decir, $T_0 = nT^*$.

Obtenemos de esta forma una familia de índices en los que, por construcción, el efecto de una transferencia de Pigou-Dalton, viene dado por

$$dT_\theta = ds\left[\phi(\theta-1, s_i) - \phi(\theta-1, s_j) \right] \tag{3.37}$$

Y, en consecuencia, el parámetro θ mide la sensibilidad del índice concreto a transferencias en diferentes partes de la distribución.

En términos del gráfico 3.6, $\theta = \beta + 1$, y por tanto T_θ verifica el principio de las transferencias de Dalton, propiedad (1.4), para cualquier valor de θ. Además, conforme disminuye θ observamos, a partir de dicho gráfico, que el índice se vuelve más sensible a transferencias en la cola inferior de la distribución, en el sentido de que para menores valores de θ se requieren cada vez mayores transferencias en la parte alta de la distribución para compensar una transferencia dada en la cola inferior. Lo contrario es cierto conforme aumenta θ para $\theta > 2$, ya que para $\theta = 2$ ($\beta = 1$) obtenemos que el efecto de una transferencia de Pigou-Dalton sobre el índice es lineal en la diferencia de proporciones de renta, $dT_2 = ds.[\, s_j - s_i \,] < 0$, y en consecuencia independiente de en qué parte de la distribución se realice dicha transferencia.

Obsérvese que el índice generalizado de Theil, (3.36), es sensible al tamaño de la población, n, y por tanto no cumple el principio de réplica de las poblaciones, propiedad (1.3), excepto para el caso $\theta = 1$. Sin embargo una simple normalización, $n^{\theta-1}T_\theta$, basta para que la familia de índices correspondiente sí satisfaga dicho principio.

Utilizando dicha normalización obtenemos la denominada familia de índices de entropía generalizados, $I_\theta = n^{\theta-1}T_\theta$.[77]

La familia completa queda pues identificada por,

$$I_\theta(n,\mathbf{y}) = \begin{cases} \dfrac{1}{n}\dfrac{1}{\theta(\theta-1)}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\left[\left(\frac{y_i}{\mu}\right)^\theta - 1\right] & \theta \neq 0,1 \\ \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\log\frac{\mu}{y_i} & \theta = 0 \\ \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{y_i}{\mu}\log\frac{y_i}{\mu} & \theta = 1 \end{cases} \tag{3.38}$$

Obsérvese cómo ambos índices de Theil son casos particulares de esta familia, $I_1 = T$ y $I_0 = T^*$.

Cuando hay igualdad $I_\theta = 0$, $\forall\theta$, por construcción. Sin embargo el valor máximo, cuando toda la renta la posee un solo individuo, difiere ampliamente según el valor de θ. Para $\theta > 0$ dicho límite superior viene dado por

[77] Un razonamiento idéntico hubiera permitido generalizar el segundo índice de Theil, T^*. En este caso la expresión equivalente a (3.36) de la proposición (3.7) hubiera sido

$$T_\theta^* = \frac{n^{-\theta}}{\theta(\theta-1)}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[\left(\frac{y_i}{\mu}\right)^\theta - 1\right] \qquad \forall\theta \neq 0,1 \tag{3.36*}$$

y las expresiones límite para $\theta = 0$ y $\theta = 1$ vienen dadas, en este caso, por

$$T_0^* = T^* \text{ y } T_1^* = \frac{1}{n}T$$

Obsérvese que ambas expresiones, (3.36) y (3.36*), están relacionadas por $T_\theta = n.T_\theta^*$, $\forall\theta \neq 0,1$, lo que se explica por el hecho de que T utiliza ponderaciones de renta, (3.26), y T^* ponderaciones de población, (3.30), en la construcción del índice de desigualdad correspondiente. La familia T_θ^*, al igual que T_θ, tampoco verifica el principio de réplica de las poblaciones, pero la normalización apropiada conduce de nuevo a la familia de índices de entropía generalizados, $I_\theta = n^\theta T_\theta^*$.

$$\frac{n^{\theta-1}-1}{\theta(\theta-1)} \text{ si } \theta \neq 1 \text{ y } \log n \text{ si } \theta = 1,$$

tal y como ya observamos en el epígrafe anterior. Por el contrario para $\theta \leq 0$ los índices no están acotados superiormente.

Como ya hemos señalado, el parámetro θ recoge la sensibilidad del índice ante transferencias entre ricos y pobres, en función de en qué parte de la distribución se realicen dichas transferencias. De esta forma, conforme θ disminuye el índice I_θ es más sensible a transferencias en la parte inferior de la distribución, en el sentido de que cuanto menor sea θ se requieren cada vez mayores transferencias en la parte alta de la distribución para compensar una transferencia dada en la cola inferior. En el límite, conforme $\theta \to -\infty$, el índice se centra solo en el extremo inferior de la distribución. Por el contrario, conforme θ aumenta el índice I_θ se vuelve más sensible a transferencias en la parte superior de la distribución. De hecho, para valores de $\theta > 2$ el índice sólo parece mostrar sensibilidad ante la igualación de rentas entre los más ricos de la sociedad. Aunque el principio de las transferencias de Pigou-Dalton se satisface para cualquier valor de θ, en todo el dominio de definición de rentas, esta característica del índice ha llevado a algunos autores a cuestionarse la conveniencia de utilizar este índice de desigualdad para valores elevados del parámetro θ (Kolm 1976a, 1976b; Love y Wolfson 1976).

Estas afirmaciones pueden observarse a partir de la consideración del efecto de una transferencia de Pigou-Dalton, δ, de un individuo rico, i, a uno pobre, j. Dicho efecto viene dado por

$$\begin{cases} \delta \dfrac{1}{n\mu^{\theta}(\theta-1)}\left(y_j^{\theta-1} - y_i^{\theta-1}\right) & \theta \neq 1 \\ \delta \dfrac{1}{n\mu} \log\left(\dfrac{y_j}{y_i}\right) & \theta = 1 \end{cases} \tag{3.39}$$

Es en este sentido en el que afirmamos anteriormente que el parámetro θ guarda cierta similitud con el parámetro ν del índice de Gini generalizado y con el parámetro que indexa la familia de índices de Atkinson (1970), que examinaremos en el capítulo siguiente. Sin embargo, también existen importantes diferencias ya que, para una distribución dada, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, el índice I_θ nunca tiende a cero conforme θ tiende a un determinado valor, y es posible demostrar que aunque $I_\theta \geq 0$, $\forall\theta$, con igualdad solo en el caso de igualdad, dicha familia de índices toma el valor mínimo para $\theta \in (0,1)$ y diverge cuando $\theta \to \pm\infty$. Volveremos sobre este tema al final del capítulo 4.

Para finalizar recordemos que, de acuerdo con el teorema (1.1), la familia de índices de entropía generalizados verifica todas las propiedades introducidas en el capítulo 1 como requisitos mínimos deseables de un índice de desigualdad. De hecho la familia $I_\theta(n, \mathbf{y})$ fue derivada por Shorrocks (1980) precisamente a partir de la imposición de dichas propiedades.[78] En el capítulo 6 examinaremos la forma en que esta familia es aditivamente descomponible.

[78] La familia de índices de entropía generalizados ha sido extendida de forma adicional en la dirección de la noción de *índices de desigualdad intermedios* por Cowell (2003).

4. Medidas normativas: la desigualdad como pérdida de bienestar social

Las discusiones sobre desigualdad siempre tienen algún contenido normativo explícito o, más comúnmente, implícito. La aproximación normativa de la desigualdad refleja el punto de vista de que es mejor explicitar la naturaleza de los juicios de valor empleados y derivar medidas de desigualdad de estos juicios, antes que recurrir a la persuasión para justificar el uso de medidas descriptivas. La forma tradicional de desarrollar esta aproximación se ha basado en la relación de los índices de desigualdad con alguna *función de bienestar social* (FBS), W, bajo la premisa de que podemos interpretar la desigualdad como una pérdida de bienestar social.

4.1. Funciones de bienestar social

La idea de bienestar social, en el ámbito de la economía, está asociada a la valoración de situaciones que involucran a un colectivo a partir de la valoración de las mismas que realizan los individuos que lo constituyen. Se trata de construir una relación de preferencia social, o función de bienestar social, partiendo de las preferencias individuales, que permita valorar sistemáticamente las alternativas sociales. Tiene sus orígenes en los estudios relacionados con el bienestar personal, asociados a nombres como Bentham o Mill, por una parte, y a la teoría de las votaciones, asociada a nombres como Condorcet o Borda, por otra. Su formulación moderna arranca del planteamiento del problema efectuado por Bergson (1938) en términos de una función de bienestar social. Sin embargo, es sobre todo el trabajo de Arrow (1951) el que marca la evolución de este campo, a partir del sorprendente resultado de que al exigir unas pocas condiciones al proceso de valoración colectiva, todas ellas razonables, no resultaba posible encontrar ningún procedimiento capaz de satisfacerlas.

El teorema de imposibilidad de Arrow indica que este proceso de agregación de preferencias individuales en preferencias sociales presenta dificultades sustanciales. Más concretamente, este resultado implica que únicamente podemos definir una función de bienestar social con buenas propiedades, en un contexto general, si estamos dispuestos a establecer comparaciones interpersonales de utilidad.

Podemos formular la noción de función de bienestar social en los siguientes términos. Sea $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ una sociedad compuesta por n individuos y sea $\aleph$ un conjunto de alternativas sociales, alternativas que variarán según el problema concreto de que se trate. Sea $u_i : \aleph \to \mathbb{R}$ la función de utilidad del individuo i, es decir, dadas dos alternativas sociales $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z} \in \aleph$, $u_i(\boldsymbol{x}) \geq u_i(\boldsymbol{z})$ significa que el individuo i considera que la alternativa $\boldsymbol{x}$ es mejor o igual que la alternativa $\boldsymbol{z}$. Denotamos por $\boldsymbol{u}$ el vector de funciones de utilidad de los n individuos, es decir,

$$\boldsymbol{u} : \aleph \to \mathbb{R}^n, \quad \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = [u_1(\boldsymbol{x}), u_2(\boldsymbol{x}), \ldots, u_n(\boldsymbol{x})]$$

Una función de bienestar social, relativa a una sociedad N cuyos individuos poseen funciones de utilidad dadas por el vector $\boldsymbol{u}$, es una aplicación $W_{\boldsymbol{u}} : \aleph \to \mathbb{R}$ que atribuye el espacio de alternativas sociales en los números reales, condicionada por las funciones de utilidad de los miembros de la sociedad, lo que se indica incluyendo el subíndice $\boldsymbol{u}$ en la especificación de la función. Obsérvese que este modo de formular la función de bienestar social implica que se trata de un criterio completo y transitivo.

Suele suponerse, además, que esta función verifica las siguientes propiedades:

— *Dominio universal:* resultan admisibles todas las posibles valoraciones individuales de las alternativas sociales (cualquier tipo de función de utilidad).
— *Eficiencia informacional:* la valoración social de cualquier par de alternativas $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z} \in \aleph$, solo depende de la valoración de los individuos de estas alternativas.

— *Respeto de la unanimidad:*

$$u_i(\boldsymbol{x}) > u_i(\boldsymbol{z}), \ \forall \ i \in N \ \Rightarrow \ W_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x}) > W_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{z})$$

— *Anonimato:* si permutamos las funciones de utilidad de los diferentes individuos, la valoración social no se altera.

Las posibilidades de encontrar funciones de bienestar social que verifiquen estas propiedades dependen crucialmente de la cantidad de información utilizable que incorporen las funciones de utilidad de los individuos. Un resultado notable, conocido como el teorema de imposibilidad de Arrow (1951), establece que si las funciones de utilidad son ordinales y no comparables interpersonalmente, entonces no hay ninguna función de bienestar social no dictatorial capaz de satisfacer estos requisitos.[79] En realidad su resultado es más general porque usa una propiedad más débil que la de anonimato. Recordemos que una función de utilidad es *ordinal* cuando cualquier transformación monótona creciente de dicha función es una representación equivalente de las preferencias del individuo. Y que las utilidades no sean comparables interpersonalmente significa que estas transformaciones equivalentes pueden ser distintas para los diferentes individuos. Es también conocido que sustituir el requisito de ordinalidad por el de cardinalidad de las funciones de utilidad[80] no permite escapar a este teorema de imposibilidad (Villar 1988, 2005a).

Este resultado es fácilmente comprensible si pensamos que estamos pidiendo a una función con valores reales que no altere la ordenación de alternativas a pesar de que cambien arbitrariamente los números que describen las utilidades de los individuos y que constituyen sus variables dependientes. Prácticamente la única posibilidad es que la función sea constante sobre todo el dominio de definición, bien que se identifique con una de sus coordenadas. Pero esto queda excluido por la propiedad de anonimato.

[79] Una función de bienestar social es *dictatorial* cuando responde a los deseos de un único individuo de la sociedad.

[80] Las *funciones de utilidad cardinales* son aquellas cuyas transformaciones equivalentes son de tipo lineal, es decir, consisten en sumar una constante arbitraria y multiplicar por un número positivo, lo que equivale a cambios en el origen y en las unidades de medida de la utilidad.

La posibilidad de escapar al teorema de imposibilidad, y por tanto de construir funciones de bienestar social significativas, requiere la introducción de comparaciones interpersonales de utilidad. Es decir, juicios del tipo «el individuo i está mejor en la alternativa $\boldsymbol{x}$ que el individuo j», o del tipo «el individuo i está mucho mejor que el individuo j en la alternativa $\boldsymbol{x}$ que en la alternativa $\boldsymbol{z}$».

Hay esencialmente dos criterios alternativos para establecer comparaciones interpersonales de utilidad: el primero es puramente ordinal, es decir, consiste en poder decir si un individuo está mejor que otro, sin necesidad de establecer cuánto mejor; el segundo criterio de comparación supone que podemos medir la satisfacción de los individuos en términos de ciertas unidades comunes a todos ellos. En tal caso podemos comparar no los niveles de utilidad sino las ganancias de utilidad.

Ambos tipos de comparabilidad son diferentes y tienen consecuencias diversas sobre la forma de valoración social. Bajo ciertas condiciones también puede resultar posible efectuar ambos tipos de comparaciones simultáneamente.

4.1.1. Comparaciones ordinales de utilidad: la regla leximin

Consideremos el caso en que las utilidades de los individuos son ordinales pero interpersonalmente comparables. Ello nos permite comparar niveles de utilidad entre individuos, es decir, podemos establecer sin ambigüedad afirmaciones del tipo «con la alternativa $\boldsymbol{x}$ el individuo i está mejor o igual que el individuo j», lo que se escribiría como $u_i(\boldsymbol{x}) \geq u_j(\boldsymbol{x})$.

La regla de elección colectiva más usual en este contexto es la conocida como *regla leximin*, que es una extensión del *criterio del maximin* propuesto por John Rawls (1971) en su análisis de la justicia. Esta idea puede resumirse diciendo que hay que elegir siempre aquella alternativa que maximiza el bienestar del individuo que está peor. Para precisar este concepto, sean $\{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}\}$ dos alternativas sociales, y sean $u_i(\boldsymbol{x})$, $u_i(\boldsymbol{z})$, para $i = 1, 2, \dots, n$, las utilidades de los diferentes individuos bajo la alternativa $\boldsymbol{x}$ y bajo la alternativa $\boldsymbol{z}$, respectivamente. El criterio del maximin es la función de bienestar social definida como sigue,

$$W_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x}) = max_{\boldsymbol{x}} min_i \left\{ \left[u_1(\boldsymbol{x}), u_2(\boldsymbol{x}), \ldots, u_n(\boldsymbol{x}) \right] \right\}$$

La regla leximin es una extensión de esta idea de valoración social que afina el principio rawlsiano en el sentido siguiente: cuando nos encontramos con alternativas frente a las cuales los que están peor resultan indiferentes, entonces recurrimos a ordenarlas según sean las preferencias de *el siguiente peor*. Al igual que el criterio del maximin, la regla leximin pretende maximizar el bienestar del individuo que está peor. El cambio que introduce es que si, al comparar dos alternativas $\{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}\}$ del conjunto $\aleph$ los que están peor tienen la misma utilidad, entonces la decisión de cuál resulta socialmente preferida recae en *el primer peor que no es indiferente*.

Aun así uno podría pensar que la regla leximin es muy discutible, puesto que únicamente toma en cuenta la utilidad de quien está peor. En el contexto de Rawls (1971) este principio tiene sentido en la medida que estamos hablando de derechos básicos de los individuos, *bienes primarios* en su terminología. Pero no es obvio que sea exportable a cualquier contexto de decisión colectiva puesto que ignora cuántos individuos, de los que no son los que están peor, prefieren una alternativa a otra.

El economista y profesor de la Universidad de Stanford, Peter Hammond, propuso en 1976 (Hammond 1976) un criterio de equidad que ha pasado a conocerse como el principio de equidad de Hammond. Este principio aplica al caso especial de una sociedad compuesta por n individuos donde se comparan dos alternativas que afectan únicamente a dos personas, siendo todas las demás indiferentes entre ambas alternativas. En tal caso, cuando únicamente hay dos personas afectadas por las alternativas sujetas a elección, debemos hacer prevalecer la preferencia de aquel de estos dos individuos que está peor. Se trata, sin duda, de un principio mucho más débil que el leximin, ya que únicamente se aplica a situaciones en las que hay dos individuos afectados por el resultado de la decisión. En este caso, optar por dar prioridad a quien está peor parece un argumento fácilmente admisible.

Puede demostrarse que una función de bienestar social que cumple las propiedades de dominio universal, eficiencia informacional, respeto de la unanimidad y anonimato, verifica el principio de equidad de Hammond, si y solo si es la regla leximin. Una forma de interpretar este resultado es la siguiente: si aceptamos que la decisión social venga dictada por el individuo que está peor en aquellas situaciones en las que hay únicamente dos individuos involucrados y dos alternativas, las propiedades de domino universal, eficiencia informacional, respeto de la unanimidad y anonimato extienden este sistema de valoración a cualquier número de individuos y cualquier número de alternativas, una especie de *epidemia* en la que la forma de resolver un problema muy específico contagia a todos los problemas.

4.1.2. Comparaciones cardinales: el utilitarismo clásico

El *utilitarismo clásico,* desarrollado durante el siglo XVIII, parte de la idea de que es posible establecer comparaciones interpersonales de diferencias de utilidad. La forma de evaluación social usada en este contexto era la de la suma de utilidades individuales: dadas dos alternativas $\{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}\}$ del conjunto $\aleph$, $\boldsymbol{x}$ era declarada socialmente mejor o igual que $\boldsymbol{z}$ si la suma de las utilidades de todos los individuos con la alternativa $\boldsymbol{x}$ era mayor o igual que la suma de las utilidades de los individuos con la alternativa $\boldsymbol{z}$.

El argumento heurístico es el siguiente. El término $u_i(\boldsymbol{x}) - u_i(\boldsymbol{z})$ expresa cuánto gana en utilidad el individuo i al cambiar de la alternativa $\boldsymbol{z}$ a la alternativa $\boldsymbol{x}$. Si estas ganancias en utilidad podemos medirlas en términos de las mismas unidades para todos los individuos, entonces la expresión $\Sigma_{i=1}^{n} u_i(\boldsymbol{x}) - \Sigma_{i=1}^{n} u_i(\boldsymbol{z})$ nos dice cuál es la ganancia social de cambiar de la alternativa $\boldsymbol{z}$ a la alternativa $\boldsymbol{x}$. Consecuentemente, una opción $\boldsymbol{x}$ es mejor que otra opción $\boldsymbol{z}$ cuando esta diferencia sea positiva. El óptimo social consiste pues en buscar la opción que maximiza la suma de las utilidades.

Nótese que para que estas sumas tengan sentido todas las utilidades deben ser medidas en términos de una unidad común, de otra forma estaríamos «sumando peras y manzanas», por decirlo de forma gráfica.

Es fácil comprobar que, cuando las utilidades se miden en términos de una unidad común, esta regla de elección ordena completamente las alternativas sociales y cumple además todos los criterios de agregación formulados: dominio universal, eficiencia informacional, respeto de la unanimidad y anonimato. Más aún, es la única regla que los satisface (D'Aspremont y Gevers 1977). Es decir, una regla de elección social que toma como argumento las utilidades individuales que son comparables en sus unidades, verifica las condiciones de dominio universal, eficiencia informacional, respeto de la unanimidad y anonimato, si y solo si se trata del utilitarismo clásico, $W_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x}) = \Sigma_{i=1}^{n} u_i(\boldsymbol{x})$.

Así pues, bajo las condiciones del teorema, una alternativa $\boldsymbol{x}$ es declarada socialmente mejor que otra alternativa $\boldsymbol{z}$, si y solo si la suma de las utilidades de todos los individuos en la alternativa $\boldsymbol{x}$ es mayor que la suma de las utilidades de todos los individuos en la alternativa $\boldsymbol{z}$.

4.1.3. Bienestar social y distribuciones de renta

Consideremos ahora el caso en que las alternativas sociales están constituidas por distribuciones de renta. En este caso podemos identificar el genérico conjunto $\aleph$ de alternativas sociales con el espacio de distribuciones, $\Im$, o alternativamente con el interior de $\mathbb{R}_{+}^{n}$. Una función de bienestar social relativa a una distribución de renta $\mathbf{y} \in \mathbb{R}_{++}^{n}$ viene dada por

$$W_{\boldsymbol{u}}(\mathbf{y}) = W\left[u_1(\mathbf{y}), u_2(\mathbf{y}), \ldots, u_n(\mathbf{y})\right]$$

En este contexto podemos pensar en que resulta interesante encontrar funciones especiales que permitan expresar la valoración social de las distribuciones de renta como una función de su *tamaño*, medido por la renta media, y de su dispersión, medida por algún índice de desigualdad, $I(\mathbf{y})$. Es decir (v. Blackorby, Donaldson y Auersperg 1981; Dutta y Esteban 1992; Lambert 1993, cap. 5; Champernowne y Cowell 1997),

$$W_{\boldsymbol{u}}(\mathbf{y}) = \Omega\left[\mu(\mathbf{y}), I(\mathbf{y})\right]$$

Es habitual suponer que la derivada parcial de Ω con respecto a $I(\mathbf{y})$ es negativa, más desigualdad implica menos bienestar social, mientras que la derivada parcial con respecto a la media es positiva, más renta media aumenta el bienestar social (argumento este más discutible que el anterior cuando no se condiciona a que la desigualdad no aumente). De esta forma Ω incorpora la idea de *trade-off* entre el volumen de renta y su distribución (Dutta y Esteban 1992).

Una forma genérica de asegurar que el bienestar disminuya con la desigualdad es imponer que la función de bienestar social verifique la propiedad de *cuasiconcavidad estricta*. La función $W_u(\mathbf{y})$ es estrictamente cuasicóncava si dadas dos distribuciones de renta, $\forall \mathbf{y} \neq \mathbf{y}' \in \mathbb{R}^n_{++}$ y un número real $\lambda \in (0,1)$, se cumple que

$$W_u\left(\lambda \mathbf{y} + (1-\lambda)\mathbf{y}'\right) > min\left\{W_u(\mathbf{y}), W_u(\mathbf{y}')\right\}$$

Adviértase que, dados dos vectores de renta con la misma media, su combinación convexa equivale a una redistribución de renta que genera un nuevo vector de rentas con menor dispersión, y la cuasiconcavidad estricta nos dice que dicha combinación convexa aumenta de forma inequívoca el bienestar social. De esta forma, la cuasiconcavidad estricta introduce una preferencia por la igualdad en la función de bienestar social. Más adelante volveremos sobre esta propiedad.

La cuasiconcavidad estricta de la función de bienestar social se obtiene cuando suponemos que las funciones de utilidad individual son estrictamente cóncavas, iguales para todos los individuos, y dependen únicamente de las rentas individuales que cada uno de ellos recibe. En tal caso, cuando efectuamos transferencias de ricos a pobres, la reducción en utilidad de los individuos ricos que pierden renta es más que compensada por el incremento de utilidad de los pobres que reciben las transferencias.

4.2. La medida de Dalton

Dalton (1920) fue el primer autor que argumentó que la evaluación de la desigualdad económica debe efectuarse en términos de un análisis de bienestar. Su aproximación al problema partía de una concepción utilitarista del bienestar social, es decir, identificando el bienestar social con la suma de las utilidades de los individuos que componen la sociedad. Desde este enfoque Dalton define una medida de la desigualdad de rentas basada en la comparación entre el bienestar social de la distribución de renta vigente y el bienestar que se alcanzaría si la renta estuviera igualmente repartida entre todos los individuos de la sociedad.

Para precisar más esta idea debemos ser específicos acerca de las funciones de utilidad de los individuos.[81] Denotemos por $u_i(\mathbf{y}) = u_i(y_1, y_2, \ldots, y_n)$, la *función de utilidad* del individuo *i*, que en principio podemos suponer definida sobre todo el vector de rentas y que puede variar de un individuo a otro.

Dalton (1920) consideró, inicialmente, dos supuestos simplificadores importantes:

1) la función de utilidad depende únicamente de la renta de la que disfruta el individuo en cuestión, es decir, ausencia de externalidades, y
2) la función de utilidad es la misma para todos los individuos de la sociedad.[82]

Estos dos supuestos nos permiten escribir $u_i(\mathbf{y}) = u_i(y_i) = u(y_i)$, $\forall i$, es decir podemos omitir el subíndice i en la función de utilidad y fijarnos solo en la renta de cada individuo.[83]

Adicionalmente, supondremos que esta función, *u(y)*, es diferenciable,[84] creciente y estrictamente cóncava. Es decir,

3) $\dfrac{\partial u(y)}{\partial y} > 0,$

4) $\dfrac{\partial^2 u(y)}{\partial y^2} < 0,$

lo que equivale a decir que la utilidad marginal de la renta es decreciente.

Estamos suponiendo, pues, que la utilidad de un individuo crece de forma monótona con la renta de la que disfruta, pero que

[81] Véase Villar (1999, cap. 3) para una introducción a las funciones de utilidad.

[82] Como tendremos ocasión de comprobar, la hipótesis de una misma función de utilidad para todos los individuos tiene consecuencias muy relevantes para las medidas de desigualdad que se obtienen con este enfoque.

[83] Mantenemos la terminología de la función de utilidad por ser estándar en la literatura, pero de forma general puede pensarse en *u(y)* como una *función de evaluación de la renta*, similar a la función de información en el contexto de los índices de Theil.

[84] Obsérvese que aunque consideremos una distribución de la renta discreta, la función *u(y)* siempre es considerada como una función continua de su argumento, *y*.

su utilidad aumenta con la renta a una tasa decreciente, *principio de la utilidad marginal decreciente.*

Finalmente, para mantener la coherencia en la formulación supondremos además que las utilidades son siempre estrictamente positivas, $u(y) > 0$.

En estas condiciones, el bienestar social asociado a un vector de renta, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, viene dado por la suma de utilidades de cada uno de los miembros de la sociedad, es decir,[85]

$$W(\mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{n} u(y_i) \qquad (4.1)^{86}$$

De forma que la FBS es aditiva en las funciones de utilidad individuales (utilitarista). Por tanto, la función $u(y_i)$ puede considerarse como la utilidad social, o el índice de bienestar, para el individuo i.

Es útil considerar cómo varía el bienestar social, W, ante variaciones arbitrarias en las rentas individuales. Dicha variación viene dada por la ecuación diferencial total

$$dW = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u(y_i)}{\partial y_i} dy_i \qquad (4.2)$$

de forma que las cantidades

$$\frac{\partial u(y_i)}{\partial y_i}$$

constituyen un sistema de ponderaciones de los individuos en la valoración de los cambios en el bienestar social. El supuesto de concavidad estricta de $u(y)$ nos indica que cuanto mayor sea la renta de un individuo, menor será su peso en términos de evaluar cambios en el bienestar social, por tanto la concavidad introduce en el análisis una preferencia por la igualdad. Por su parte, al

[85] La función de bienestar social utilitarista requiere implícitamente el supuesto de funciones de utilidad individual cardinales, del tipo von Neumann-Morgenstern, en el contexto de decisión bajo incertidumbre. Ello significa que dos funciones de utilidad resultan equivalentes cuando una es una transformación lineal afín de la otra; es decir, cuando una se obtiene a partir de la otra mediante un cambio de origen y de escala. Véase D'Aspremont (1994).

[86] Por economía de notación eliminamos el subíndice $\boldsymbol{u}$ en $W_u(\mathbf{y})$.

suponer que todos los individuos tienen la misma función de utilidad, estamos indicando que el nivel de renta es la única variable que determina el peso de los individuos en el bienestar social.

Para encontrar la distribución de renta que maximiza el bienestar social, $W(\mathbf{y})$, dado un volumen de renta total, Y, resolvemos el siguiente programa

$$\left.\begin{array}{ll} \underbrace{Max}_{\{y_i\}_{i=1}^n} & \sum_{i=1}^{n} u(y_i) \\ Sujeto\ a: & Y - \sum_{i=1}^{n} y_i = 0 \end{array}\right\} \qquad (4.3)^{87}$$

Las condiciones de máximo de este problema de optimización implican que

$$\lambda = \frac{\partial u(y_i)}{\partial y_i},\ \forall i$$

donde λ representa el multiplicador de Lagrange asociado a la restricción. Como *u(y)* es una función creciente y estrictamente cóncava tendremos que, en el óptimo, todas las rentas deben ser iguales, y en consecuencia $y_1 = y_2 = \ldots = y_n = \mu$. El máximo bienestar social asociado a una renta total $Y = n.\mu$ es pues, $\Sigma_{i=1}^{n} u(y_i) = nu(\mu)$.

Así pues, el máximo bienestar social alcanzable viene dado por $nu(\mu)$, es decir, para una distribución igualitaria.

Es importante advertir la dependencia de este resultado de los supuestos establecidos. La monotonía de la función de utilidad asegura una relación biunívoca entre las rentas y las utilidades. Por su parte, la concavidad estricta de *u(y)* implica que la derivada, esto es

---

[87] La restricción en este programa de optimización no ha aparecido anteriormente simplemente porque hasta ahora no hemos considerado ningún problema de reparto en términos de alcanzar una función objetivo. Puesto que la función objetivo es creciente en y, debemos ahora fijar el *tamaño del pastel* para centrarnos en cuestiones distributivas. En realidad, la restricción debería ser formulada como $Y - \Sigma_{i=1}^{n} y_i \leq 0$, pero el supuesto de monotonía de *u(y)* asegura que esta restricción siempre será operativa en el óptimo y, en consecuencia, podemos formularla en términos de igualdad. Desde el punto de vista del gráfico 1 de la introducción, la restricción nos asegura que el óptimo se situará en algún punto sobre la línea gruesa, situarnos por debajo es posible, pero entonces no alcanzaremos el máximo de bienestar posible, situarse por encima no es factible, el tamaño del pastel es fijo.

la utilidad marginal, es monótonamente decreciente en y. Por último, tomar la misma función de utilidad para todos los individuos implica que la igualación de las utilidades marginales, condición necesaria de máximo, comporta la igualación de las rentas.

Sea $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ una distribución de renta dada. La medida de desigualdad que propone Dalton (1920), y que llamaremos D, consiste en la diferencia normalizada entre el nivel de bienestar social máximo alcanzable, $n.u(\mu)$, y el nivel efectivo de bienestar social, $\Sigma_{i=1}^{n} u(y_i)$, es decir,

$$D = 1 - \frac{\Sigma_{i=1}^{n} u(y_i)}{nu(\mu)} \tag{4.4}$$ [88]

Este índice toma el valor cero, $D = 0$, para una distribución igualitaria, pero es difícil ser más concreto, ya que otras características dependen esencialmente de las propiedades cardinales de $u(y)$. Por ejemplo, las cotas de esta medida de desigualdad dependen tanto de la forma funcional de $u(y)$ como de la elección del origen y de las unidades de medida. Esta dependencia afecta incluso al posible cumplimiento del principio de las transferencias de Pigou-Dalton. Para comprobarlo observemos que el efecto de una pequeña transferencia δ de un individuo rico, i, a uno pobre, j, sin que ello altere sus posiciones relativas, afecta al valor de D en una cuantía dada por

$$\delta \frac{1}{nu(\mu)} \left[\frac{\partial u(y_i)}{\partial y_i} - \frac{\partial u(y_j)}{\partial y_j} \right]$$

El término entre paréntesis es negativo, puesto que la concavidad estricta de $u(y)$ asegura que para

$$y_i > y_j\,, \; \frac{\partial u(y_i)}{\partial y_i} < \frac{\partial u(y_j)}{\partial y_j}$$

[88] La formulación original de Dalton (1920) considera como medida de desigualdad la ratio

$$\frac{\Sigma_{i=1}^{n} u(y_i)}{n.u(\mu)}$$

que toma el valor 1 en el caso de una distribución igualitaria. La formulación del texto está más en el espíritu de Atkinson (1970), que examinaremos a continuación, y no altera las propiedades no deseables del índice original.

En consecuencia, siempre que las utilidades sean positivas, como hemos supuesto, este tipo de transferencia reduce la desigualdad y por tanto esta medida verificaría el principio de las transferencias de Pigou-Dalton.[89]

Ser más específicos requiere postular una forma funcional para $u(y)$, un tema que mencionaremos a continuación. Por ahora nos basta observar que D no es invariante frente a transformaciones lineales positivas. En particular el índice no cumple, como mínimo, con la propiedad de independencia de la escala, propiedad (1.6). Adviértase, sin embargo, que si bien la magnitud de D no es invariante ante tales transformaciones, sí lo es el orden implicado por este índice, siempre que las utilidades sean positivas.

4.3. Funciones de utilidad y aversión a la desigualdad

Supongamos por el momento que la función de bienestar social, W, es de tipo utilitarista y viene dada por la ecuación (4.1), más adelante en este trabajo relajaremos esta restricción de aditividad.

Hemos visto que el carácter decreciente de la utilidad marginal tiene como consecuencia que la distribución igualitaria maximice el bienestar social, para cualquier volumen de renta dado. Y que la medida de desigualdad D verifica el principio de las transferencias de Pigou-Dalton cuando las utilidades son positivas. Es también fácil comprobar que la magnitud del efecto de una transferencia de Pigou-Dalton sobre D depende del grado de curvatura de la función $u(y)$, es decir del decrecimiento en la utilidad marginal de la renta conforme esta se incrementa. Cuanto mayor sea la cuantía sobre D del efecto de una transferencia dada, tanto mayor será nuestra preferencia por la igualdad. En consecuencia, podemos modular nuestra *aversión a la desigualdad* imponiendo

[89] Sin embargo, el signo final de esta magnitud depende en realidad del valor de $u(\mu)$, que puede ser alterado mediante cambios arbitrarios de escala y origen en la función de utilidad. Tener que restringir el signo de las funciones de utilidad para mantener la coherencia de la formulación es un claro síntoma de debilidad teórica de este tipo de medida.

condiciones sobre la variación de la utilidad marginal de la renta, es decir, sobre el comportamiento de

$$\frac{\partial^2 u(y)}{\partial y^2} < 0$$

Una medida que resulta particularmente apropiada para imponer tales restricciones es la *elasticidad de la utilidad marginal*, que se define como sigue,

$$\varepsilon(y) = -\frac{\partial\left(\frac{\partial u(y)}{\partial y}\right)}{\partial y}\frac{y}{\frac{\partial u(y)}{\partial y}} = -\frac{\frac{\partial^2 u(y)}{\partial y^2}y}{\frac{\partial u(y)}{\partial y}} \tag{4.5}$$

donde $\varepsilon(y) > 0$ es, en general, una función de y.

Esta elasticidad nos indica, para un nivel de renta y, el porcentaje de reducción en la utilidad marginal, que tiene lugar cuando la renta se incrementa en un 1%.[90] Por tanto $\varepsilon(y)$, al medir el grado de curvatura de $u(y)$ en términos relativos, puede interpretarse como un indicador de la aversión a la desigualdad.

Una forma especialmente sencilla de introducir condiciones sobre la variación de la utilidad marginal es tomando un valor constante para la elasticidad de la utilidad marginal. En este caso la aversión a la desigualdad resulta parametrizada por el valor de esta constante, que escribimos simplemente como ε. Ello simplifica las comparaciones y facilita la interpretación de los resultados, además de corresponderse con la noción de aversión al riesgo constante, habitual en la literatura de la decisión bajo incertidumbre.

Puede comprobarse que esta restricción implica que la función de utilidad es de la siguiente forma

$$u^*(\varepsilon, y) = \begin{cases} a_1 + b_1 \dfrac{y^{1-\varepsilon}}{1-\varepsilon} & \varepsilon \neq 1 \\ a_2 + b_2 \log y & \varepsilon = 1 \end{cases} \tag{4.6}$$

---

[90] Imponer condiciones sobre la elasticidad es más ventajoso que imponerlas directamente sobre $\left[\partial^2 u(y)\right]/\partial y^2$, ya que la elasticidad carece de unidades de medida, y en consecuencia es invariante ante transformaciones lineales positivas de $u(y)$. Las derivadas de la función de utilidad no poseen esta cualidad.

donde concavidad estricta exige $\varepsilon > 0$ y a_1, a_2, $b_1 > 0$ y $b_2 > 0$ son constantes que serán irrelevantes si nuestros índices de desigualdad verifican la propiedad de independencia de la escala, propiedad (1.6).

En efecto, si tomamos las primeras y segundas derivadas de la función (4.6) obtenemos,

$$\frac{\partial u^*(\varepsilon, y)}{\partial y} = \begin{cases} b_1 \dfrac{1}{y^\varepsilon} & \varepsilon \neq 1 \\ b_2 \dfrac{1}{y} & \varepsilon = 1 \end{cases}$$

y

$$\frac{\partial^2 u^*(\varepsilon, y)}{\partial y^2} = \begin{cases} \dfrac{-b_1 \varepsilon y^{\varepsilon-1}}{y^{2\varepsilon}} & \varepsilon \neq 1 \\ \dfrac{-b_2}{y^2} & \varepsilon = 1 \end{cases}$$

Por tanto, aplicando la fórmula de la elasticidad, obtenemos para $\varepsilon \neq 1$,

$$\varepsilon(y) = -\frac{\dfrac{-b_1 \varepsilon y^{\varepsilon-1}}{y^{2\varepsilon}} y}{\dfrac{b_1}{y^\varepsilon}} = \frac{\varepsilon y^{\varepsilon-1} y^\varepsilon y}{y^{2\varepsilon}} = \varepsilon$$

y, para $\varepsilon = 1$,

$$\varepsilon(y) = -\frac{\dfrac{-b_2}{y^2} y}{\dfrac{b_2}{y}} = 1$$

Obsérvese que para $\varepsilon = 0$ la función $u^*(0, y)$ es lineal, $u^*(0, y) = a_1 + b_1 y$, y en consecuencia cóncava, pero no estrictamente cóncava.

Recordemos que estamos suponiendo implícitamente que las funciones de utilidad son cardinales, es decir, admiten cambios en el origen y en las unidades que no alteran la valoración de las alternativas. En este caso las constantes a_1, a_2, b_1 y b_2, que aparecen en la función de utilidad (4.6) resultan irrelevantes para el análisis.

Por ello podemos fijar arbitrariamente su valor sin que se vea afectado el contenido sustantivo de la función de utilidad. Una normalización interesante de estos parámetros es la siguiente,

$$a_1 = -\frac{1}{1-\varepsilon}, \; a_2 = 0 \text{ y } b_1 = b_2 = 1$$

Con ello conseguimos que la familia de funciones de utilidad que presentan aversión a la desigualdad constante venga dada por

$$u(\varepsilon, y) = \begin{cases} \dfrac{y^{1-\varepsilon} - 1}{1-\varepsilon} & \varepsilon \neq 1 \\ \log y & \varepsilon = 1 \end{cases} \tag{4.7}$$

donde $\varepsilon > 0$.

La elección del valor de

$$a_1 = -\frac{1}{1-\varepsilon}$$

se debe a razones puramente estéticas, ya que de esta forma (4.7) guarda una gran similitud con (el negativo de) la función de información generalizada (3.34) del capítulo anterior.

Otra normalización, más habitual en la literatura, es aquella en la que tomamos $a_1 = a_2 = 0$ y $b_1 = b_2 = 1$. En este caso el equivalente a (4.7) sería simplemente

$$u^{\$}(\varepsilon, y) = \begin{cases} \dfrac{y^{1-\varepsilon}}{1-\varepsilon} & \varepsilon \neq 1 \\ \log y & \varepsilon = 1 \end{cases} \tag{4.7*}$$

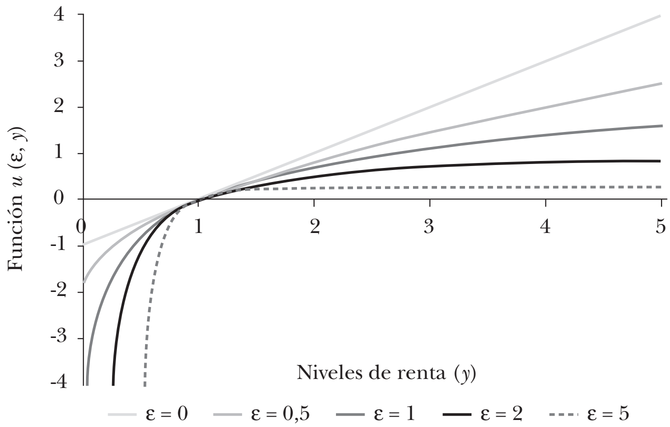
Este cambio en el origen simplemente equivale a modificar el valor de $u(\varepsilon,y)$ en una cantidad constante, sin alterar para nada las características de aquellos índices de desigualdad independientes de la escala.

Algunos miembros de la familia de funciones de utilidad con aversión constante a la desigualdad (4.7) se ofrecen en el gráfico 4.1.[91] Obsérvese la simetría entre este y el gráfico 3.6.

---

[91] Aunque el eje horizontal representa niveles de renta, puesto que la normalización es arbitraria, puede pensarse que se trata de niveles relativos, y_i/μ, de forma

GRÁFICO 4.1: Función de utilidad con aversión a la desigualdad constante, *u* (ε, *y*)



Fuente: Elaboración propia.

Las siguientes propiedades de esta familia de funciones son de interés:

— El caso ε = 0 ilustra el caso de una función de utilidad lineal, cóncava pero no estrictamente cóncava. El resto de curvas, ε > 0, del gráfico 4.1 ilustran funciones de utilidad estrictamente cóncavas.

— Conforme el parámetro ε aumenta, la función de utilidad es cada vez más cóncava. Obsérvese que al aumentar ε anidamos la función en la precedente.

— El caso ε = 1 representa utilidad logarítmica. En este caso la utilidad social no está acotada, ni para valores inferiores, ni para valores superiores de renta. Se trata de un caso límite que separa dos situaciones claramente diferenciadas.

— Para valores 0 < ε < 1, la utilidad de un individuo está acotada por abajo, pero no por arriba, en la distribución de renta. Así, por ejemplo, para ε = 0,5 el valor mínimo que se le puede asignar a un individuo en la FBS es −2,

que los valores sobre el eje horizontal representan realmente proporciones de renta respecto a la media. Para ello bastaría tomar $b_1 = \left(1/\mu^{1-\varepsilon}\right)$.

$u(0{,}5,\ 0) = -2$; sin embargo, no existe una cota superior para niveles altos de renta.

— Para valores $\varepsilon > 1$, la utilidad de un individuo está acotada por arriba, pero no por abajo, en la distribución de renta. Así, por ejemplo, para $\varepsilon = 2$ el valor máximo que se le puede asignar a un individuo en la FBS es 1, $u(2,y) \to 1$ conforme $y \to \infty$. Además dicha cota disminuye con ε, $u(5,y) \to 0{,}25$ conforme $y \to \infty$. Por el contrario no existe una cota inferior para niveles bajos de renta.

— Cuando $\varepsilon \to \infty$,

$$u(\varepsilon, y) \to \begin{cases} 0 & y > 1 \\ -\infty & y < 1 \end{cases} \qquad \varepsilon \to \infty \tag{4.8}$$

De esta forma la función $u(\varepsilon, y)$ forma un ángulo recto en $y = 1$.

Si bien los niveles de $u(\varepsilon, y)$ no son de interés directo, la utilidad marginal,

$$\frac{\partial u(\varepsilon, y)}{\partial y}$$

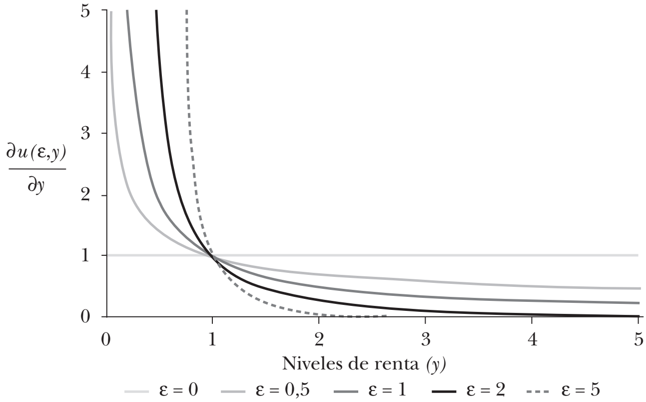
representa la ponderación que asignamos a los cambios en el bienestar social ante variaciones de renta del individuo. Por ello es ilustrativo examinar estas ponderaciones como función de ε. El gráfico 4.2 efectúa esta ilustración para los mismos valores de ε que el gráfico 4.1. Para las funciones de utilidad (4.7) obtenemos que

$$\frac{\partial u(\varepsilon, y)}{\partial y} = y^{-\varepsilon} \tag{4.9}$$

Excepto para el caso en que $\varepsilon = 0$, estas ponderaciones decrecen con y, esto no es más que la hipótesis de concavidad. Resulta interesante observar lo rápido que estas ponderaciones caen conforme se incrementa ε para valores relativamente bajos de renta, así para valores superiores a 2 la aversión a la desigualdad es realmente notable.[92]

[92] Esto tendrá alguna consecuencia algo sorprendente cuando reconsideremos la valoración de distribuciones de renta desde un punto de vista más general (capítulos 9 y 10). En particular, altos niveles de aversión a la desigualdad pueden resultar incompatibles con dar más peso en la función de bienestar a menores niveles de renta.

GRÁFICO 4.2: Utilidad marginal con aversión a la desigualdad constante



Fuente: Elaboración propia.

Interpretando los niveles de renta del eje de abscisas en términos relativos, y_i/μ, un individuo con un nivel de renta $1/2\mu$ recibe una ponderación cuatro veces superior para un valor $\varepsilon = 2$, ocho veces superior para un valor $\varepsilon = 3$, dieciséis veces para un valor $\varepsilon = 4$ y treinta y dos veces para un valor $\varepsilon = 5$.

Finalmente, el caso $\varepsilon = 1$ ilustra de forma sencilla porque D no es un índice con buenas propiedades. En este caso

$$D_1 = 1 - \frac{\Sigma_{i=1}^{n} \log y_i}{n \log \mu} = 1 - \frac{\log \tilde{\mu}}{\log \mu} \tag{4.10}$$

Obsérvese que podemos escribir

$$D_1 = \frac{T^*}{\log \mu}$$

que claramente depende de la escala en la que midamos la renta. Sería posible elegir esa escala de forma que $\log \mu < 0$, lo que produciría un índice negativo, o incluso $\mu = 1$, en cuyo caso D_1 no estaría definido.

De igual forma el efecto de una transferencia de Pigou-Dalton viene dado en este caso por

$$\delta \frac{1}{n \log \mu} \left(\frac{1}{y_i} - \frac{1}{y_j} \right)$$

cuyo signo final también depende de $\log \mu$.

4.4. La medida de Atkinson

A pesar de la sugestiva idea de Dalton de evaluar la desigualdad desde el punto de vista del bienestar social, el diseño del indicador que propone adolece de serios defectos conceptuales derivados de la naturaleza de la métrica de las funciones de utilidad. La dependencia de D de las unidades y el origen desde el que medimos la utilidad hace difícilmente aceptable este tipo de medida de desigualdad.

Atkinson (1970) señaló los inconvenientes del enfoque de Dalton y propuso un replanteamiento de su forma de medir la desigualdad introduciendo una idea de referencia importante inspirada en la teoría de la decisión bajo incertidumbre de Pratt (1964). Su punto de partida es la noción de *renta igualitaria equivalente,* ξ, que se define como aquel nivel de renta per cápita que, si fuese disfrutado por todos los individuos de la sociedad, haría el bienestar social exactamente igual al bienestar total generado por la distribución de la renta efectiva.[93] La renta igualitaria equivalente es, por tanto, una *medida monetaria del bienestar social*.

Si adoptamos, como en el caso de Dalton, una función de bienestar social de tipo utilitarista, la renta igualitaria equivalente, ξ, viene dada implícitamente por la siguiente ecuación:

$$nu(\xi) = \sum_{i=1}^{n} u(y_i) \tag{4.11}$$

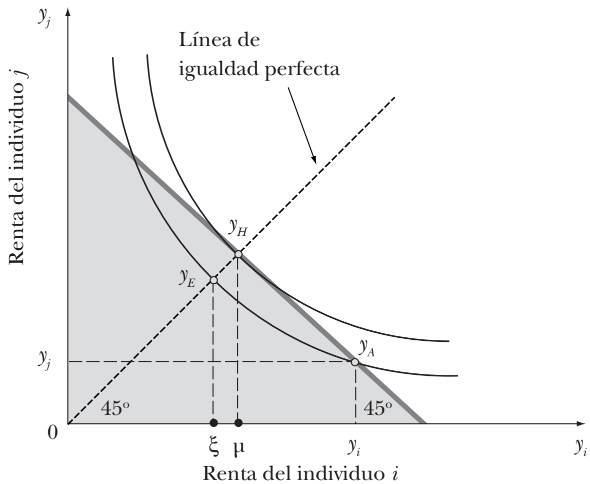
Dada una función de utilidad, $u(y)$, siempre es posible obtener ξ a partir de (4.11).

Esta idea puede mostrarse de forma sencilla añadiendo al gráfico 1 de la introducción, que representa la distribución de la renta entre dos individuos, las curvas de indiferencia para diferentes niveles de bienestar social. El gráfico 4.3 ilustra esta idea. La estructura del problema es tal que, suponiendo concavidad estricta en $u(y)$, tal y como hizo Atkinson (1970) siguiendo a Dalton (1920), las curvas de indiferencia son estrictamente convexas y el máximo

---

[93] El enfoque de Atkinson (1970) aparece también en Kolm (1969) y el concepto de renta igualitaria equivalente se remonta, al menos, hasta Champernowne (1952).

GRÁFICO 4.3: Renta igualitaria equivalente



Fuente: Elaboración propia.

bienestar se obtiene para una distribución de renta igualitaria, tal y como muestra la solución del programa (4.3), es decir a lo largo de la línea de igualdad. En nuestro ejemplo, en el punto $\mathbf{y}_H$ del gráfico 4.3. Si la distribución de la renta efectiva viene dada por $\mathbf{y}_A$, para obtener la renta igualitaria equivalente simplemente trazamos la curva de indiferencia que pasa por $\mathbf{y}_A$ y buscamos su intersección con la línea de igualdad, $\mathbf{y}_E$, en el gráfico 4.3. El nivel de renta per cápita correspondiente a esta distribución, ξ, es la renta igualitaria equivalente que buscamos.

Este mecanismo permite convertir distancias entre niveles de bienestar, que es la métrica utilizada por Dalton (1920), en valores monetarios, evitando de esta forma los problemas asociados al índice *D*.

Bajo el supuesto de concavidad estricta de $u(y)$, entonces ξ no puede ser mayor que μ. Además cuanto más igualitaria sea una distribución más próximo estará ξ a μ, con ξ = μ para el caso de igualdad. Ello permite a Atkinson (1970) proponer una medida de desigualdad, *A*, con la siguiente estructura

$$A = 1 - \frac{\xi}{\mu} \tag{4.12}$$

donde $\xi = \mu$ implica $A = 0$ y $A \to 1$ conforme $\xi \to 0$, es decir $0 \leq A \leq 1$.

Obsérvese que A no es más que la diferencia normalizada entre el nivel de renta medio, que si fuera disfrutado por todos los individuos nos proporcionaría el máximo nivel de bienestar social posible, y la renta igualitaria equivalente, que si fuera disfrutada por todos los individuos nos proporcionaría el mismo nivel de bienestar social que el que proporciona la distribución de renta efectiva. De esta forma $\mu - \xi$ es la renta per cápita que podría ser sacrificada sin pérdida de bienestar social si la renta restante se distribuyera igualitariamente. Análogamente, $n(\mu - \xi)$ representa la renta total que podría reducirse sin afectar al bienestar, siempre que se distribuyera igualitariamente la renta restante.

Por ello A puede interpretarse como el coste social de la desigualdad. A modo de ilustración, un valor de $A = 0{,}3$ significa que ξ es un 70% de μ; en consecuencia, podríamos generar el mismo nivel de bienestar del que disfrutamos con tan solo el 70% de la renta total. Dicho con otras palabras, podríamos sacrificar hasta un 30% del volumen total de renta sin pérdida de bienestar, si esta fuera redistribuida de forma apropiada.

Nótese que esta medida de desigualdad, A, depende de valor de referencia ξ, que se define a partir de la función de bienestar social, W. Por tanto depende de los siguientes factores:

1) de la estructura de la distribución de la renta actual, $\mathbf{y}_A$ en el gráfico 4.3;
2) de los juicios de valor implícitos en la forma exacta de la función de bienestar social, W;
3) de la forma funcional de las funciones de utilidad individuales, que determina la forma de las curvas de indiferencia en el gráfico 4.3;[94]
4) del supuesto de funciones de utilidad idénticas para todos los individuos.

[94] En el caso de funciones con elasticidad constante de la utilidad marginal, esta forma se deriva del valor asumido por el coeficiente ε.

Claramente el *coste social* de la desigualdad depende no solo de la distribución de la renta vigente, $\mathbf{y}_A$, sino también de nuestro grado de aversión a la desigualdad, que se reflejará en la curvatura de las curvas de indiferencia en el gráfico 4.3.

Como hemos indicado, Atkinson (1970) adopta la forma aditiva de la función de bienestar social empleada por Dalton (1920), es decir, una función utilitarista, $W(\mathbf{y}) = \Sigma_{i=1}^{n} u(y_i)$, y selecciona una familia de funciones de utilidad con aversión a la desigualdad constante, (4.7). La constancia en la aversión a la desigualdad es un requerimiento para que A verifique la propiedad de independencia de la escala, propiedad (1.6).[95]

Consiguientemente, la función de bienestar social que Atkinson (1970) toma como referencia viene dada por,

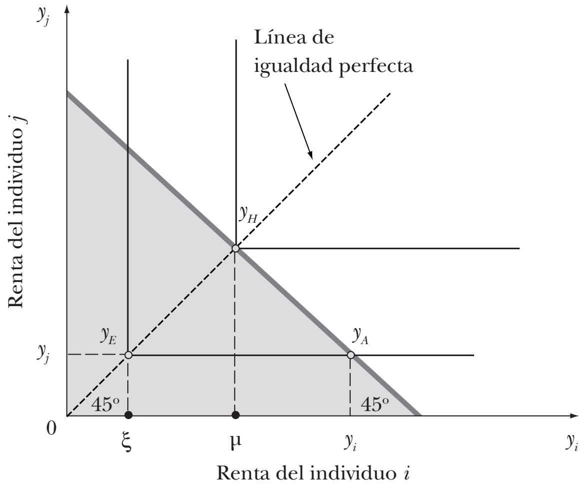
$$W(\mathbf{y}) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{y_i^{1-\varepsilon} - 1}{1-\varepsilon} & \varepsilon \neq 1 \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \log y_i & \varepsilon = 1 \end{cases} \tag{4.13}$$

En esta función de bienestar social, el parámetro ε tiene la misma interpretación que ya hemos examinado en el epígrafe anterior y en consecuencia mide el *grado de aversión a la desigualdad*. En términos gráficos este parámetro controla la curvatura de las curvas de indiferencia social en el gráfico 4.3 y por tanto afectará a la medición de la desigualdad para una distribución de renta dada.

Para $\varepsilon = 0$ la sociedad no exhibe ninguna preocupación por la desigualdad, de modo que el bienestar social corresponde simplemente a la suma de rentas de los individuos. La función de bienestar social es lineal y fue propuesta originariamente por Bentham (1907). En este caso las curvas de indiferencia son paralelas a la línea gruesa del gráfico 4.3, que representa el espacio de todas

[95] De los resultados de Pratt (1964) sobre la teoría de la decisión bajo incertidumbre, se desprende que la restricción que hay que imponer sobre la función de utilidad para que ξ/μ sea invariante ante cambios de escala en la distribución de la renta, es que *u(y)* sea de la forma (4.6). Una demostración de este resultado puede encontrase en Lambert (1993, cap. 4, teorema 4.2).

GRÁFICO 4.4: Renta igualitaria equivalente con extrema aversión a la desigualdad



Fuente: Elaboración propia.

las distribuciones de renta posibles. En consecuencia $A = 0$ cualquiera que sea la distribución efectiva de la renta. Conforme ε aumenta, el bienestar total toma en cuenta cada vez más el impacto negativo de la desigualdad. La concavidad de (4.7) se manifiesta en la convexidad de las curvas de indiferencia y obtenemos el caso general del gráfico 4.3. En el extremo, cuando $\varepsilon \to +\infty$, la función de bienestar social se transforma en una función tipo leximin, que liga el bienestar de la sociedad al del individuo con renta más baja (Rawls 1971).[96] En este caso las curvas de indiferencia se transforman en ángulos rectos, es decir, son del tipo *min* $\{y_i, y_j\}$ (Hammond 1975). El gráfico 4.4 ilustra esta situación de extrema aversión a la desigualdad.

Atkinson (1983) argumenta a este respecto que el parámetro ε representa el peso dado por la sociedad a la desigualdad en la distribución, mayores valores de ε indican que la sociedad es más opuesta a la desigualdad.

[96] Véase Villar (1999, caps. 16 y 17) para una discusión adicional sobre las funciones de bienestar social.

A partir de la expresión que define la medición de la desigualdad de Atkinson, (4.12), la definición de renta igualitaria equivalente, (4.11) y la forma funcional de la función de utilidad, (4.13), podemos definir la familia de índices de desigualdad de Atkinson, que dependen del parámetro de aversión a la desigualdad, ε.

De la definición de ξ, $n.u(\xi) = \Sigma_{i=1}^{n} u(y_i)$, obtenemos, para (4.13) y $\varepsilon \neq 1$,

$$nu(\xi) = n\frac{\xi^{1-\varepsilon} - 1}{1-\varepsilon}$$

$$\sum_{i=1}^{n} u(y_i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{y_i^{1-\varepsilon} - 1}{1-\varepsilon}$$

y por tanto,

$$n\frac{\xi^{1-\varepsilon} - 1}{1-\varepsilon} = \sum_{i=1}^{n} \frac{y_i^{1-\varepsilon} - 1}{1-\varepsilon} \qquad \Rightarrow \qquad \xi = \left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i^{1-\varepsilon}\right]^{\frac{1}{1-\varepsilon}}$$

Si aplicamos ahora la fórmula del índice de desigualdad propuesta por Atkinson (1970), $A = 1 - (\xi/\mu)$, obtendremos una familia uniparamétrica de índices de desigualdad dependientes del parámetro $\varepsilon > 0$, para $\varepsilon \neq 1$, dada por la siguiente fórmula,

$$A_\varepsilon = 1 - \frac{1}{\mu}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i^{1-\varepsilon}\right]^{\frac{1}{1-\varepsilon}} = 1 - \left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{y_i}{\mu}\right)^{1-\varepsilon}\right]^{\frac{1}{1-\varepsilon}}$$

Consideremos ahora el caso $\varepsilon = 1$, realizando el mismo tipo de deducción. Es decir,

$$nu(\xi) = n \log \xi$$

$$\sum_{i=1}^{n} u(y_i) = \sum_{i=1}^{n} \log y_i$$

y por tanto,

$$n \log \xi = \sum_{i=1}^{n} \log y_i \qquad \Rightarrow \qquad \xi = \exp\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \log y_i\right]$$

Por lo que el índice de Atkinson (1970) para $\varepsilon = 1$ viene dado por la siguiente fórmula,

$$A_1 = 1 - \frac{1}{\mu}\exp\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\log y_i\right] = 1 - \exp\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\log\left(\frac{y_i}{\mu}\right)\right]$$

Por consiguiente, la familia completa de índices de desigualdad de Atkinson viene dada, para ε > 0, por

$$A_\varepsilon = \begin{cases} 1 - \left[\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\left(\dfrac{y_i}{\mu}\right)^{1-\varepsilon}\right]^{\frac{1}{1-\varepsilon}} & \varepsilon \neq 1 \\ 1 - \exp\left[\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\log\left(\dfrac{y_i}{\mu}\right)\right] & \varepsilon = 1 \end{cases} \qquad (4.14)$$

Así, la consecuencia de diferentes grados de aversión a la desigualdad puede describirse cambiando un simple parámetro, ε. Nótese que, de esta forma, la ordenación de la desigualdad puede alterarse radicalmente eligiendo diferentes valores del parámetro ε.

Para un valor (finito) dado de ε > 0, $A_\varepsilon = 0$ cuando hay igualdad, por construcción, ya que en este caso ξ = μ. Sin embargo el valor máximo, cuando toda la renta la posee un solo individuo, solo puede ser determinado de forma exacta para 0 < ε ≤ 1. Cuando 0 < ε < 1, dicho valor máximo viene dado por

$$1 - n^{\frac{-\varepsilon}{1-\varepsilon}}$$

que tiende a 1 cuando $n \to \infty$. Para ε = 1, el valor de A_1 en el caso de máxima desigualdad es exactamente 1. Finalmente para ε > 1, A_ε no está definido para valores nulos de renta, pero un argumento límite permite demostrar que, en este caso, $A_\varepsilon \to 1$ conforme $y \to 0$.

Obsérvese también que para ε = 0, $A_0 = 0$, independiente de la distribución efectiva de renta. Además para una distribución de renta dada, **y**, A_ε siempre crece conforme ε > 0 aumenta, de forma que $\left(\partial A_\varepsilon / \partial \varepsilon\right) > 0$ (Cowell 1995). Cuando $\varepsilon \to +\infty$, $A_\varepsilon \to 1 - \left(y_1/\mu\right)$, de forma que solo la renta del más pobre importa. De esta forma A_ε tiene propiedades similares a los índices de Gini generalizados, G_ν, examinados en el capítulo 3.

La concavidad estricta de la función *u(y)*, plasmada en ε > 0 en (4.7), es la responsable de que la familia de índices de Atkinson verifique el principio de las transferencias de Pigou-Dalton.

En concreto, una transferencia δ, de un individuo rico, i, a uno pobre, j, sin que ello altere sus posiciones relativas, altera A_ε en una cuantía que viene dada por

$$\delta \frac{(1-A_\varepsilon)^\varepsilon}{n\mu^{1-\varepsilon}}\left[y_i^{-\varepsilon} - y_j^{-\varepsilon}\right] < 0$$

para $\varepsilon > 0$.

Finalmente, obtenemos una importante relación entre A_ε y la familia de índices de entropía generalizados, I_θ, del capítulo anterior. Para $\varepsilon \neq 1$, podemos escribir, a partir de (4.14),

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{y_i}{\mu}\right)^{1-\varepsilon} = \left(1 - A_\varepsilon\right)^{1-\varepsilon}$$

por lo que tomando $\theta = 1 - \varepsilon$ podemos escribir $I_{1-\varepsilon}$, a partir de (3.38), como

$$I_{1-\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon(1-\varepsilon)}\left[1 - \left(1 - A_\varepsilon\right)^{1-\varepsilon}\right] \tag{4.15}$$

con lo que $I_{1-\varepsilon}$ es una transformación monótona creciente de A_ε para $\varepsilon > 0$.

Para $\varepsilon = 1$, la regla de L'Hôpital aplicada a (4.15) implica

$$I_0 = -\log\left(1 - A_1\right) \qquad (4.16)^{97}$$

Lo que muestra que I_0 es una transformación monótonamente creciente de A_1.

Por tanto I_θ y A_ε, para un valor dado de $\varepsilon > 0$ y $\theta = 1 - \varepsilon$, son índices ordinalmente equivalentes y, en consecuencia, representan exactamente las mismas ordenaciones. Sin embargo, dado que la relación entre ambos índices no es lineal, no son cardinalmente equivalentes y, por tanto, no proporcionan la misma visión acerca de la reducción o ampliación de las desigualdades.

[97] De forma más directa , obsérvese que podemos escribir $A_1 = 1 - \left(\tilde{\mu}/\mu\right)$, de donde despejando $\tilde{\mu}/\mu$ y sustituyendo en (3.32) obtenemos directamente (4.16).

Obsérvese que $\varepsilon > 0$ implica $\theta < 1$, por tanto valores elevados de la aversión a la desigualdad se corresponden con valores de θ muy negativos, en particular $\varepsilon \to +\infty$ es equivalente a $\theta \to -\infty$. Un tema sobre el que volveremos brevemente en el epígrafe siguiente.

La familia de índices de Atkinson verifica todas las propiedades que mencionamos en el capítulo 1, excepto la descomponibilidad aditiva.

Observación (4.1): Existe toda una familia de índices de desigualdad que pueden obtenerse a la manera del índice de Atkinson, pero derivados de una formulación ligeramente distinta. Dichos índices se inspiran, como el de Atkinson (1970), en la modelización de la elección racional en condiciones de incertidumbre. El lector puede consultar el análisis de los índices de desigualdad desarrollado en Herrero (1987), a partir de la formulación del problema de decisión sin certidumbre de Fishburn (1984).

4.5. Aversión a la desigualdad

Hemos encontrado hasta ahora tres familias uniparamétricas de índices de desigualdad que dependen de un parámetro ético que, hemos argumentado en todos los casos, refleja la aversión a la desigualdad. Dicho parámetro era, $\nu > 1$, en el caso de la familia de índices de Gini, G_ν, θ en el caso de la familia de índices de entropía, I_θ, y $\varepsilon > 0$ en el caso de los índices de Atkinson, A_ε. Para una distribución de renta dada, $\mathbf{y}$, podemos variar nuestra estimación de la desigualdad, simplemente alterando el valor del parámetro correspondiente. Pero hemos de ser conscientes de que el parámetro de referencia no representa exactamente lo mismo en cada una de las familias de índices considerados. La cuestión clave es, pues, ¿cómo debemos interpretar el concepto de aversión a la desigualdad?

Existen, al menos, tres formas en las que podemos interpretar la idea genérica de aversión a la desigualdad y que podemos resumir en las siguientes cuestiones:

1) ¿Cómo debemos valorar las transferencias de renta entre los estratos ricos de la sociedad frente a las transferencias entre los estratos pobres?
2) ¿A que tasa está dispuesta la sociedad a intercambiar igualdad por niveles medios de renta?
3) ¿Son las diferencias (relativas al ranking) de rentas las que importan en términos de la valoración social, o el de los individuos en la distribución de la renta?

Podemos interpretar que cada una de las tres familias de índices uniparamétricos que hemos considerado selecciona una noción de aversión a la desigualdad, como respuesta a cada una de estas tres preguntas.

El parámetro θ, de la familia de índices de entropía generalizados, trata de responder básicamente a la primera cuestión. De hecho, obtuvimos dicha familia precisamente a partir de la valoración de las transferencias en diferentes partes de la distribución. No solo la igualación de rentas entre los más desvaforecidos debe ser considerada en el análisis de la desigualdad, sino también la igualación de rentas entre los más ricos puede tener su reflejo en la medición de la desigualdad, lo que se traducía en valores elevados de θ.

La segunda cuestión plantea el problema del intercambio entre eficiencia y equidad (Okun 1975). Esta relación de intercambio es central al concepto de renta igualitaria equivalente y, por tanto, juega un papel clave en la familia de índices de Atkinson a través del parámetro ε. Ya hemos observado como I_θ y A_ε, para un valor dado de $\varepsilon > 0$ y $\theta = 1 - \varepsilon$, son índices ordinalmente equivalentes, lo que muestra la conexión entre ambas visiones de la aversión a la desigualdad entre las dos familias de índices. Para $\varepsilon \leq 0$ esta equivalencia se pierde, ya que para $\varepsilon = 0$ el índice A_0 es indiferente al nivel de desigualdad en la sociedad, y para $\varepsilon < 0$ se pierde la concavidad de la función de utilidad, que es la condición necesaria para que la renta igualitaria equivalente se sitúe por debajo de la media y, consecuentemente, tenga sentido hablar de desigualdad como pérdida de bienestar.[98]

[98] Lasso de la Vega y Urrutia (2005a) muestran, sin embargo, cómo es posible extender la familia de índices de Atkinson, de forma que a cada miembro de esta familia

Finalmente, es posible pensar en ocasiones en las que la aversión a la desigualdad no sea medida en términos de rentas relativas, sino en términos de posiciones relativas de los individuos de la sociedad en la distribución. De esta forma la utilidad social marginal del individuo *i*, viene determinada, no por su renta, sino por su posición en el ranking en la distribución. Esta es la idea de aversión a la desigualdad que recoge la familia de índices de Gini *generalizados* a través del parámetro ν. Aunque no existe una equivalencia similar a la que existe entre I_θ y A_ε para G_ν y A_ε, si es posible derivar los índices de Gini generalizados a partir de la noción de renta igualitaria equivalente.

Consideremos el caso en el que la función de utilidad de los individuos es lineal en y, $\varepsilon = 0$, y la función de bienestar social, W, es la suma de las utilidades individuales, pero ponderadas de acuerdo a la función (3.21),

$$\omega_i(\nu) = \nu\left(\frac{n+1-i}{n}\right)^{\nu-1} \tag{3.21}$$

Recuérdese que $\nu = 2$ corresponde al índice de Gini ordinario.

Por tanto, la función de bienestar social en este caso es,

$$W(\mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{n} \nu\left(\frac{n+1-i}{n}\right)^{\nu-1}(y_i - 1) \tag{4.17}$$

En consecuencia, la renta igualitaria equivalente viene ahora dada por la solución de la ecuación,

$$\sum_{i=1}^{n} \nu\left(\frac{n+1-i}{n}\right)^{\nu-1}(\xi - 1) = \sum_{i=1}^{n} \nu\left(\frac{n+1-i}{n}\right)^{\nu-1}(y_i - 1) \tag{4.18}$$

y por tanto

$$\xi \sum_{i=1}^{n} \nu\left(\frac{n+1-i}{n}\right)^{\nu-1} = \sum_{i=1}^{n} \nu\left(\frac{n+1-i}{n}\right)^{\nu-1} y_i \tag{4.19}$$

extendida le corresponda un miembro de la familia de índices de entropía generalizados para todos los valores de $\varepsilon \in \mathbb{R}$, y los índices resultantes cumplan todas las propiedades del capítulo 1, excepto la descomponibilidad aditiva.

Recordando que el promedio de los pesos tiende a 1 conforme $n \to \infty$,

$$\frac{\nu}{n^{\nu}}\sum_{i=1}^{n}(n+1-i)^{\nu-1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

obtenemos

$$\xi \approx \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\nu\left(\frac{n+1-i}{n}\right)^{\nu-1} y_i \qquad (4.20)^{99}$$

Con lo que la medida de desigualdad de Atkinson, (4.12), genera la familia de índices de Gini generalizados,

$$G_{\nu} \approx 1-\frac{\nu}{\mu n^{\nu}}\sum_{i=1}^{n}\left[(n+1-i)^{\nu-1} y_i\right] \qquad (3.22)$$

La aversión por la desigualdad se introduce aquí no a través de la concavidad en la función de utilidad, sino a través de la asignación de diferentes pesos a los individuos, en función de su ranking en la distribución.

La aversión a la desigualdad es, pues, un término genérico que indica una cierta preferencia por la igualdad, cada familia de índices de desigualdad materializa esta preferencia en una determinada dirección.

[99] Al igual que anteriormente esta aproximación sería exacta en un mundo continuo.

5. Ordenaciones equivalentes con diferentes índices

5.1. Introducción

En los tres capítulos anteriores hemos pasado revista a los principales índices de desigualdad existentes en la literatura, tanto de tipo descriptivo como normativo. Hemos presentado una batería de indicadores que suponen diferentes formas de abordar la medición de la desigualdad, incluyendo familias de indicadores que permiten escoger el grado de aversión a la desigualdad mediante la determinación de un cierto parámetro.

Claramente los diferentes índices asocian distintas magnitudes a la desigualdad de una determinada distribución de renta. Pero cabe considerar la cuestión de si, a pesar de esta diferente cuantificación de la desigualdad, los índices ordenan de igual modo las distribuciones de renta. Es decir, dadas dos distribuciones de renta, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, ¿podemos ordenar de forma inequívoca ambas distribuciones de acuerdo con su nivel de desigualdad?

No resulta difícil comprobar que los distintos índices analizados pueden ordenar de manera diversa el grado de desigualdad existente entre ambas distribuciones de renta. Ello implica que nuestra apreciación de la desigualdad va a depender del tipo de índice que utilicemos para su medición. No nos referimos solo a la magnitud de la desigualdad, sino al aspecto más básico relativo al ranking generado. Es decir, al hecho de que dos índices distintos pueden llevarnos a conclusiones contrapuestas sobre qué distribución es más desigual. Resulta entonces importante tratar de dilucidar bajo qué condiciones podemos garantizar que un conjunto amplio de índices de desigualdad, o al menos aquellos considerados más relevantes, generan una misma ordenación del grado de desigualdad observado. En estos casos nuestras conclusiones cualitativas resultarán inequívocas, ya que podremos asegurar que una distribución es más desigual que otra, cualesquiera que sean las formas de medir esta.

Obsérvese que los índices que hemos estudiado, con excepción de la curva de Lorenz, proporcionan *ordenaciones completas* de distribuciones de renta (lo que la literatura denomina *medidas completas*). Por tanto, cuando comparamos dos distribuciones de renta cualesquiera, **x** e **y**, siempre podemos determinar uno de estos resultados: 1) **y** es más desigual que **x**, 2) **x** es más desigual que **y**, o 3) ambas distribuciones muestran el mismo grado de desigualdad. Esta propiedad deriva directamente de la posibilidad de determinar la valoración de la desigualdad mediante una función $I : \Im \mapsto \mathbb{R}$ que asigna un número real a cada distribución de renta, que constituye una medida de su grado de dispersión. Puesto que dos números reales cualesquiera son siempre comparables en términos de la relación ser mayor o igual que, nunca encontraremos problemas de comparabilidad.

Dado un índice de desigualdad, esta propiedad resulta muy conveniente porque siempre nos permite establecer comparaciones inequívocas entre cualquier par de distribuciones de renta. Sin embargo, cuando consideramos más de un posible índice de desigualdad, esta ordenación completa puede tener como resultado que dos índices produzcan ordenaciones diferentes.

Estas dificultades derivan del hecho de *resumir* la información contenida en un vector n-dimensional en un solo número (el valor del indicador). Los distintos índices de desigualdad pueden entenderse como *diferentes métricas* que permiten valorar vectores mediante números reales. La disparidad en la ordenación refleja así la diferente forma en que los distintos indicadores condensan la información de un vector en un número. Se plantea entonces de forma natural la cuestión de si podemos establecer comparaciones directas entre estos vectores, sin necesidad de condensar la información que contienen en un solo número. Este tipo de comparaciones resultarán por lo general muy robustas, si bien no cabe esperar que podamos generar ordenaciones completas.

Consideremos, a modo de ejemplo, la comparación entre los vectores (1,2), (2,1) y (3,2). Si la *medida* que asociamos a estos vectores es la suma de sus componentes, entonces el vector (3,2) es mayor que los otros dos, mientras que los vectores (1,2) y (2,1) son iguales. Si la medida del vector es, por el contrario, el producto de sus componentes entonces (3,2) es el mayor, (1,2) es un vector de tamaño intermedio y (2,1) es menor que los dos anteriores. Si comparamos directamente los vectores en términos de la relación ser mayor o igual, observamos que (3,2) es mayor o igual que (2,1) y también mayor o igual que (1,2). Por tanto cualquier medida habitual pondrá al vector (3,2) por encima de los demás. Sin embargo los vectores (1,2) y (2,1) no resultan comparables con este criterio.

Este sencillo ejemplo muestra que las ordenaciones parciales surgen de forma natural en la comparación de variables multidimensionales, como es el caso que nos ocupa. Estas ordenaciones, cuando sean posibles, permitirían una evaluación inequívoca del grado de desigualdad de dos distribuciones de renta. El precio que debemos pagar por ello es que, en muchos casos, no podremos aplicar la comparación.

En dos trabajos, desarrollados simultánea e independientemente, Dasgupta, Sen y Starret (1973), por un lado, y Rothschild y Stiglitz (1973), por otro, analizan esta cuestión, como una extensión de un análisis parcial desarrollado previamente en Atkinson (1970). Presentamos a continuación los resultados de este análisis.

5.2. Criterios de dominancia y ordenaciones parciales

Comenzaremos por especificar tres criterios de comparación muy generales, cada uno de los cuales incorpora una noción clara de igualitarismo, al tratar de responder a la cuestión: ¿Es la distribución $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ más igualitaria que la distribución $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$?

5.2.1. Dominancia de Lorenz

Recordemos que la curva de Lorenz, introducida en el capítulo 2, venía representada por el conjunto de puntos, (p_i, r_i), $\forall i \in N$, más la condición inicial dada por el punto (0, 0), donde $p_i = i/n$ representa el porcentaje de población con una renta igual o inferior a y_i, mientras que r_i representa el porcentaje de renta del que dispone dicha población,

$$r_i = L(p_i) = \left(\Sigma_{j=1}^{i} y_j\right) / \left(n.\mu\right)$$

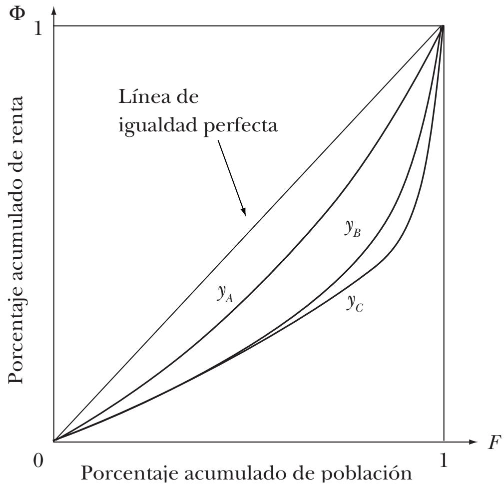
Sean **x** e **y** dos distribuciones de renta relativas a una misma población, con $\Sigma_{i=1}^{n} x_i = \Sigma_{i=1}^{n} y_i$. Diremos que la distribución **x** domina estrictamente en el sentido de Lorenz a la distribución **y**, lo que escribiremos como $\mathbf{x} \succ_L \mathbf{y}$, si

$$L_{\mathbf{x}}(p_i) \geq L_{\mathbf{y}}(p_i) \qquad \forall i \in N \tag{5.1}$$

con desigualdad estricta para algún $i < n$.[100]

Desde un punto de vista gráfico la dominancia de Lorenz significa que la curva de Lorenz que representa la distribución **x** está contenida en la curva de Lorenz de la distribución **y**. El gráfico 5.1 ilustra dos situaciones posibles de dominancia[101] de Lorenz para tres distribuciones de renta.

GRÁFICO 5.1: Dominancia de Lorenz



Fuente: Elaboración propia.

[100] La dominancia de Lorenz es conocida en la literatura matemática sobre las desigualdades bajo el término anglosajón *majorization* (Hardy, Littlewood y Pólya 1934; Arnold 1987; Steele 2004, cap. 13). Obsérvese que la condición de igual media implica que, si no hubiera alguna desigualdad estricta para algún *i*, entonces las distribuciones **x** e **y** serían idénticas.

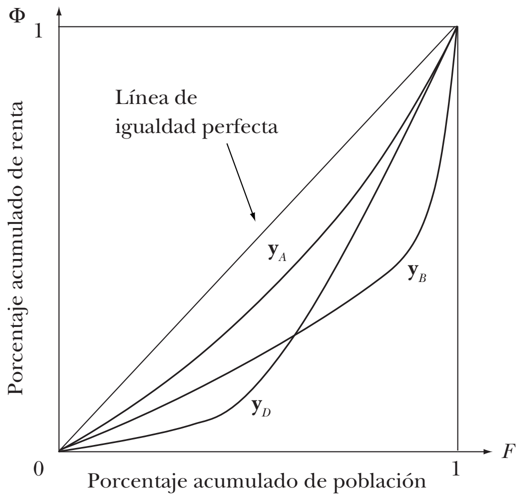
[101] El adverbio *estrictamente* será suprimido, a no ser que su eliminación induzca a confusión.

Observamos en este gráfico cómo la distribución $\mathbf{y}_A$ domina a las distribuciones $\mathbf{y}_B$ e $\mathbf{y}_C$, y cómo la distribución $\mathbf{y}_B$ domina a la distribución $\mathbf{y}_C$. Claramente la desigualdad es menor en $\mathbf{y}_A$ que en $\mathbf{y}_B$, y a su vez es menor en $\mathbf{y}_B$ que en $\mathbf{y}_C$.

La dominancia de Lorenz constituye por tanto un criterio muy robusto de igualdad. Escribiremos $\mathbf{x} \succ_L \mathbf{y}$ para indicar que la distribución $\mathbf{x}$ domina (de forma estricta) en el sentido de Lorenz a la distribución $\mathbf{y}$.

Adviértase que esta forma de ordenar las distribuciones constituye un *orden parcial*, de modo que será inaplicable en muchas circunstancias. En particular, en todos aquellos casos en que las curvas de Lorenz se crucen. Por tanto, en general encontraremos situaciones en las que la aplicación de este criterio no nos permite decidir qué distribución es más desigual. Consideremos el gráfico 5.2, observamos que $\mathbf{y}_A \succ_L \mathbf{y}_B$ y $\mathbf{y}_A \succ_L \mathbf{y}_D$, pero las distribuciones $\mathbf{y}_B$ e $\mathbf{y}_D$ se cruzan y en consecuencia no puede decirse que una sea más desigual que la otra en términos del criterio de ordenación de Lorenz. En este caso escribimos $\mathbf{y}_B \perp_L \mathbf{y}_D$, para indicar que estas distribuciones no son comparables bajo este criterio.

GRÁFICO 5.2: Intersección de curvas de Lorenz



Fuente: Elaboración propia.

Las siguientes propiedades de la relación de dominancia de Lorenz son de utilidad:

— La relación de dominancia de Lorenz es transitiva. Es decir, $\mathbf{y}_A \succ_L \mathbf{y}_B \quad \text{y} \quad \mathbf{y}_B \succ_L \mathbf{y}_C \quad \Rightarrow \quad \mathbf{y}_A \succ_L \mathbf{y}_C$. El gráfico 5.1 proporciona una ilustración de esta propiedad.

— Puesto que las distribuciones de renta, **x** e **y**, están ordenadas de menor a mayor, pertenecen a la misma población y tienen la misma media, es inmediato comprobar que $\mathbf{x} \succ_L \mathbf{y}$, si y solo si

$$\sum_{i=1}^{k} x_i \geq \sum_{i=1}^{k} y_i \qquad \forall k = 1, 2, \ldots, n$$

con desigualdad estricta para algún $k < n$.

— Si dos distribuciones, **x** e **y**, tienen idéntica curva de Lorenz, lo que es posible si los individuos permutan sus posiciones o se trata de distribuciones de diferentes poblaciones y/o con diferentes medias (un tema al que nos referiremos más adelante), entonces dichas distribuciones son equivalentes en términos del ordenamiento de Lorenz. En este caso escribimos, $\mathbf{x} \sim_L \mathbf{y}$.

— La dominancia de Lorenz constituye un ordenamiento parcial estricto y, en consecuencia, es asimétrico, esto es,

$$\mathbf{x} \succ_L \mathbf{y} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{y} \not\succeq_L \mathbf{x}$$

lo que indica que, ni la distribución **y** domina de forma estricta en el sentido de Lorenz a la distribución **x**, ni ambas son equivalentes según este criterio.

5.2.2. Dominancia de Dalton

El concepto de transferencia de Dalton fue introducido en el capítulo 1. Se trataba simplemente de una transferencia de renta de un individuo *rico* a un individuo *pobre,* sin que sus posiciones relativas cambien.

A partir de esta idea se definía el principio de las transferencias de Pigou-Dalton, como una propiedad que requería que una transferencia de Dalton redujera la desigualdad. Se trata de un requisito igualitarista que suele pedirse a cualquier índice de desigualdad. Diremos que una distribución **x** *domina en el sentido de Dalton* a otra distribución **y**, y lo escribiremos como $\mathbf{x} \succ_D \mathbf{y}$, si la distribución **x** puede ser obtenida a partir de la distribución **y** mediante una sucesión (finita) de transferencias de los individuos ricos a los individuos pobres, de modo que cada transferencia no altere la posición relativa de los individuos implicados.

Dada una distribución, **y**, una transferencia δ de un individuo rico i a un individuo pobre j, $y_j < y_i$, que no altere su ranking viene dada por,

$$\begin{aligned} x_j &= y_j + \delta \\ x_i &= y_i - \delta \\ x_k &= y_k \qquad \forall k \neq i, j \end{aligned}$$

con $x_j \leq x_i$, es decir,

$$0 < \delta \leq \frac{y_i - y_j}{2}$$

La dominancia en el sentido de Dalton constituye otro criterio igualitarista de ordenar distribuciones de renta. También en este caso la aplicación del criterio de comparación de distribuciones de renta nos proporciona únicamente un orden parcial ya que, si una distribución no se obtiene de otra mediante un conjunto de transferencias de Pigou-Dalton, entonces dichas distribuciones no serán comparables bajo este criterio.

5.2.3. Dominancia en bienestar

Consideremos, finalmente, la posibilidad de comparar distribuciones de renta en términos de una función de bienestar social definida directamente sobre el espacio de distribuciones de renta. Dada una distribución de renta **y**, sea $W(\mathbf{y}) = W(y_1, y_2, ..., y_n)$ la medida de bienestar asociada. Con esta formulación general hacemos que el bienestar social dependa de la distribución de renta, sin imponer una dependencia concreta de las funciones de utilidad individuales. Supondremos, como es habitual (más adelante volveremos sobre este punto), que la función de bienestar social verifica las siguientes propiedades:

— *Monotonía:* la función $W(\mathbf{y})$ es monótona, es decir, $\mathbf{y} > \mathbf{y}' \quad \Rightarrow \quad W(\mathbf{y}) > W(\mathbf{y}')$.[102]

— *Simetría:* dada una sociedad N, sean $\left(y_i\right)_{i \in N}$ y $\left(y_i'\right)_{i \in N}$ dos distribuciones de renta tales que $\left(y_i'\right)_{i \in N}$ se obtiene como una permutación de $\left(y_i\right)_{i \in N}$. Entonces, $W\left(\left(y_i\right)_{i \in N}\right) = W\left(\left(y_i'\right)_{i \in N}\right)$.

— *Cuasiconcavidad estricta:* la función $W(\mathbf{y})$ es estrictamente cuasicóncava si, $\forall \mathbf{y} \neq \mathbf{y}' \in \mathbb{R}^n_{++}$ y $\forall \lambda \in (0,1)$ se cumple que: $W\left(\lambda \mathbf{y} + (1-\lambda)\mathbf{y}'\right) > min\left\{W(\mathbf{y}), W(\mathbf{y}')\right\}$.

La monotonía establece que la renta es un bien socialmente deseable (aumentar la renta de algunos individuos, sin disminuir la de nadie, aumenta el bienestar social). Pero adviértase que también nos está diciendo que aumentar la renta de todos aumenta siempre el bienestar social, cualquiera que sea la variación de la desigualdad que ello implique, lo que dista mucho de ser un juicio de valor indiscutible. En realidad, esta propiedad es todavía más fuerte, ya que el incremento de la renta de un solo individuo, no importa la magnitud o su posición en el ranking, aumentará el bienestar agregado. La propiedad de monotonía es esencialmente equivalente a la de que $u(y)$ es creciente en y en la formulación de Dalton-Atkinson.

La simetría requiere que la función solo dependa de los valores de las rentas de modo que si permutamos las rentas de dos individuos cualesquiera, el bienestar no varía. Esta es esencialmente la misma propiedad que requerimos para los índices de desigualdad y que introdujimos en el capítulo 1. La simetría es una propiedad de tratamiento igualitario. Nos dice que la función de bienestar social no es sensible a qué individuo particular ostenta cada una de las rentas. Por ello, si permutamos arbitrariamente la distribución de la renta, el bienestar social no cambia.

La cuasiconcavidad estricta implica que una combinación convexa de dos distribuciones cualesquiera, de un volumen de renta

[102] La desigualdad $\mathbf{y} > \mathbf{y}'$, debe entenderse en un sentido vectorial, es decir, al menos algún elemento de $\mathbf{y}$ debe ser estrictamente mayor que el correspondiente elemento de $\mathbf{y}'$, mientras que el resto no debe ser menor, por tanto $y_i \geq y_i'$, con desigualdad estricta al menos para algún i.

total dado, aumenta de forma inequívoca el bienestar social.[103] O dicho de otro modo, si una distribución de renta es mejor que otra, entonces cualquier combinación convexa de ambas es mejor que la peor (adviértase que una combinación convexa de dos distribuciones de renta representa siempre un grado de dispersión intermedio entre las dos extremas). Ello equivale a decir que una redistribución de renta siempre aumenta el bienestar social. Esta propiedad está relacionada obviamente con el principio de las transferencias de Dalton que establece que una redistribución reduce la desigualdad.

Diremos que una función de bienestar $W(\mathbf{y})$ que verifica las propiedades de monotonía, simetría y cuasiconcavidad estricta es una *función de bienestar social igualitaria*. Ello nos permite establecer el siguiente criterio de comparación de distribuciones de renta: una distribución $\mathbf{x}$ *domina en términos de bienestar social* a la distribución $\mathbf{y}$ cuando se cumpla $W(\mathbf{x}) > W(\mathbf{y})$, para toda función de bienestar social igualitaria, en este caso escribiremos $\mathbf{x} \succ_W \mathbf{y}$.

Adviértase que de nuevo tenemos aquí una ordenación parcial de las distribuciones de renta, puesto que la condición de dominancia que requerimos hace referencia a todas las funciones de bienestar social igualitarias. Por tanto, si $W(\mathbf{x}) > W(\mathbf{y})$ para una cierta función de bienestar social igualitaria W y dos distribuciones de renta $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$, al tiempo que $\tilde{W}(\mathbf{x}) < \tilde{W}(\mathbf{y})$ para otra función de bienestar social igualitaria $\tilde{W}$, entonces las distribuciones de renta $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ no resultan comparables en términos de dominancia en bienestar.

El siguiente resultado resume las relaciones entre estos tres principios de comparación sobre distribuciones de renta.[104]

---

[103] La cuasiconcavidad estricta es una propiedad más débil que la concavidad estricta, que vendría definida por,

$$W\left(\lambda\mathbf{y} + (1-\lambda)\mathbf{y}'\right) > \lambda W(\mathbf{y}) + (1-\lambda)W(\mathbf{y}')$$

Por tanto, concavidad implica cuasiconcavidad, pero no a la inversa.

[104] La aportación de Atkinson (1970) mostró cómo dominancia de Lorenz, de Dalton y de bienestar eran equivalentes en un mundo en el que la función de bienestar social era utilitarista de la forma introducida en el capítulo 4. La aportación de Dasgupta, Sen y Starret (1973) y Rothschild y Stiglitz (1973) fue generalizar este resultado a un mundo en el que el bienestar social depende directamente de $\mathbf{y}$, determinando las propiedades que debe cumplir W, y liberando el análisis de las funciones de utilidad individuales, $u(y)$.

Teorema (5.1) (Dasgupta, Sen y Starret 1973; Rothschild y Stiglitz 1973)

Sean **x** e **y** dos distribuciones de una cantidad dada de renta, relativas a una misma población. Entonces, las siguientes comparaciones resultan equivalentes,

1) $\mathbf{x} \succ_L \mathbf{y}$
2) $\mathbf{x} \succ_D \mathbf{y}$
3) $\mathbf{x} \succ_W \mathbf{y}$

Demostración

Véase el apéndice 4.

Este interesante teorema establece las condiciones para que distintos criterios de desigualdad generen la misma ordenación de distribuciones de renta. Por su propia naturaleza admite una lectura más positiva y otra más negativa.

La parte positiva de este resultado nos indica que, cuando es posible establecer una de las relaciones, $\succ_L$, $\succ_D$, $\succ_W$, entre dos distribuciones de renta, entonces los tres criterios resultan equivalentes. No es necesario, pues, preocuparse por la forma de la función de bienestar social $W(\mathbf{y})$; si esta cumple las propiedades de monotonía, simetría y cuasiconcavidad estricta, la dominancia de Lorenz es suficiente para garantizar un mayor nivel de bienestar en la distribución más igualitaria. Afortunadamente la dominancia de Lorenz es sencilla de observar en la práctica.

El teorema (5.1) proporciona así una forma muy robusta de ordenar las distribuciones de renta: para una población y un volumen de renta total dados, cualquiera de los índices de desigualdad relativa que ofrezca un tratamiento simétrico a los individuos, esté normalizado, sea continuo y cumpla el principio de las transferencias de Pigou-Dalton ordenará las distintas distribuciones de renta de igual manera al evaluar el grado de desigualdad, siempre y cuando las correspondientes curvas de Lorenz no se crucen.

La parte negativa del resultado anterior no es menos obvia: solo podemos establecer conclusiones inequívocas acerca de la ordenación de la desigualdad de distribuciones de renta alternativas cuando las correspondientes curvas de Lorenz no se intersecten.

En otro caso, según qué tipo de índice escojamos, podemos concluir que una distribución es más desigual que otra, o viceversa.

El gráfico 5.2 proporciona una intuición sobre la naturaleza de esta consecuencia. Si comparamos las distribuciones $\mathbf{y}_B$ e $\mathbf{y}_D$, observamos que las curvas de Lorenz de estas dos distribuciones se cruzan en un determinado cuantil, de forma que ante la pregunta de cuál de estas dos distribuciones es más desigual, la respuesta dependerá del índice de desigualdad particular que utilicemos. La distribución representada por $\mathbf{y}_B$ es más igualitaria en el extremo inferior frente a la representada por $\mathbf{y}_D$, que es más igualitaria en el extremo superior. Qué clase de desigualdad es *peor* o *mejor* en esta situación es algo que depende de juicios de valor, más allá del principio de las transferencias de Pigou-Dalton. Cuando una distribución domina a otra en el sentido de Lorenz, como en el caso de $\mathbf{y}_A$ frente a las otras dos, este problema no se plantea y todas aquellas medidas de desigualdad que satisfagan el principio de las transferencias de Pigou-Dalton proporcionarán el mismo ranking entre distribuciones. Pero cuando no se da tal dominancia, como sucede con $\mathbf{y}_B$ e $\mathbf{y}_D$, el ranking dependerá de juicios de valor, implícitos o explícitos, acerca de la importancia de la desigualdad en diferentes partes de la distribución.

Hay otro aspecto a considerar a la hora de valorar los resultados del teorema (5.1), que afectan a su aplicabilidad. En realidad, este teorema está condicionado a que las comparaciones entre distribuciones de renta tengan la misma media y estén referidas a un mismo tamaño de población.[105] Desde luego en muchos casos prácticos estos supuestos no van a verificarse porque tendremos que comparar distribuciones de renta correspondientes a dos sociedades diversas o a una misma sociedad en distintos momentos del tiempo. En ambos casos cabe esperar que las distribuciones de renta a considerar presenten diferentes niveles medios de riqueza y distintas poblaciones.

Esta limitación del resultado sobre la equivalencia de ordenaciones sugiere dos tipos de reflexiones. Por una parte, nos llevan a

---

[105] En consecuencia el volumen total de renta a repartir es el mismo bajo ambas distribuciones.

preguntarnos si es posible extender los resultados del teorema (5.1) al caso de distribuciones de renta con distinta población y/o con distinta media bajo determinados supuestos (Dasgupta, Sen y Starret 1973; Rothschild y Stiglitz 1973; Sen 1973; o Anand 1983, 339-340).[106] Por otra, se revalorizan los índices de desigualdad que proporcionan ordenaciones completas sobre distribuciones de renta, independientemente del tamaño o la renta media de la población.

Veamos cómo podemos extender el teorema (5.1) a escenarios más generales, relajando los supuestos de idéntica población y volumen de renta a repartir. En la segunda parte de este trabajo retomamos la discusión de los índices de desigualdad como medidas completas de distribución de la renta, abordando el problema desde un enfoque normativo que nos permite disponer de criterios para seleccionar entre los diversos índices de desigualdad.

5.3. Población variable

Consideremos la siguiente propiedad adicional para la función de bienestar social *W*.

Principio de réplica de las poblaciones:

Dada una sociedad N con una distribución de renta $(y_i)_{i\in N}$. Consideremos una nueva sociedad N^k que consiste en una réplica de k veces la sociedad N con su correspondiente distribución de renta, $(y_i)_{i\in N^k}$. Es decir,

$$N^k = (\underbrace{N, N, \ldots, N}_{k}) = \{\underbrace{1,1,\ldots,1}_{k}, \underbrace{2,2,\ldots 2}_{k}, \ldots, \underbrace{n,n,\ldots,n}_{k}\}$$

y la distribución de renta correspondiente,

$$(y_i)_{i\in N^k} = \Big(\underbrace{(y_i)_{i\in N}, (y_i)_{i\in N}, \ldots, (y_i)_{i\in N}}_{k}\Big)$$

[106] Adviértase, no obstante, que cuanto más amplio sea el campo de aplicación de este resultado (más distribuciones empíricas de renta puedan ser comparadas), menos probable resultará encontrar situaciones en las que las correspondientes curvas de Lorenz no se intersecten.

$$= \Big(\underbrace{y_1, y_1, \ldots, y_1}_{k}, \underbrace{y_2, y_2, \ldots, y_2}_{k}, \ldots, \underbrace{y_n, y_n, \ldots, y_n}_{k}\Big)$$

Entonces, $W\left(n^k, (y_i)_{i \in N^k}\right) = kW\left(n, (y_i)_{i \in N}\right)$.

Esta propiedad implica que la unión de poblaciones idénticas entre sí no altera el bienestar per cápita, es decir, el bienestar medio del conjunto debe ser igual al bienestar medio de cada una de las partes. Esta no es una propiedad muy exigente y corresponde a un requerimiento sobre los índices de desigualdad que ya introdujimos en el capítulo 1.

Consideremos ahora que las distribuciones de renta objeto de comparación tienen diferente tamaño, $\mathbf{y} = (y_i)_{i \in N} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ y $\mathbf{x} = (x_i)_{i \in M} = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$, aunque idéntica media, $n\Sigma_{i=1}^{m} x_i = m\Sigma_{i=1}^{n} y_i$.

En este nuevo contexto, el concepto de dominancia de Lorenz no se ve afectado, puesto que dicha curva solo depende de porcentajes de renta y población, tras una ordenación no decreciente del vector de rentas. La dominancia de Dalton tampoco. Pero la dominancia en términos de bienestar debe ser redefinida en términos per cápita.

En concreto, sea W una función de bienestar social igualitaria que satisface el principio de réplica de la poblaciones y sean $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ dos distribuciones de renta con la misma media, correspondientes a poblaciones de tamaño m y n respectivamente.

Diremos que la distribución $\mathbf{x}$ domina en términos de bienestar social a la distribución $\mathbf{y}$, $\mathbf{x} \succ_W \mathbf{y}$, cuando se cumpla

$$\frac{W(\mathbf{x})}{m} > \frac{W(\mathbf{y})}{n}$$

para toda función de bienestar social igualitaria que cumpla el principio de réplica de poblaciones.

Con esta redefinición de la dominancia en términos de bienestar el teorema (5.1) es nuevamente de aplicación. Dasgupta, Sen y Starret (1973) demuestran este resultado.

5.4. Variaciones en la renta media

Aunque hemos relajado la constancia en la población, todavía subsiste el problema de comparar sociedades con diferente renta per cápita. Un tema que podríamos relacionar con el crecimiento económico o el desarrollo, es decir con cómo efectuar ordenaciones de distribuciones de renta en situaciones de crecimiento o cuándo las sociedades bajo comparación presentan niveles diferentes de desarrollo económico. Estos casos son de gran importancia práctica.

Sería técnicamente posible abordar el problema de forma similar al caso de población variable. Es decir, podríamos introducir una propiedad adicional sobre W y efectuar las comparaciones en términos de bienestar per cápita. La propiedad que deberíamos introducir en este caso sería la de homogeneidad de grado uno en rentas para $W(\mathbf{y})$, de forma que, para cualquier constante positiva λ, el bienestar de una distribución $\lambda\mathbf{y}$ corresponde a λ veces el bienestar de la distribución $\mathbf{y}$. Formalmente,

$$W(\lambda\mathbf{y}) = W(\lambda y_1, \lambda y_2, \ldots, \lambda y_n) = \lambda W(\mathbf{y}) \qquad \forall \lambda > 0$$

Esta propiedad está relacionada con la de independencia de la escala para los índices de desigualdad introducida en el capítulo 1. Sin embargo, como mencionamos entonces, con ello se ignora el efecto de las diferencias absolutas entre niveles de renta. Este aspecto, que ya resulta discutible en términos de índices de desigualdad, resulta restrictivo en términos de funciones de bienestar social (en particular cuando estas dependen de las funciones de utilidad individuales). Por ello optaremos por analizar la dominancia entre distribuciones sin recurrir a este expediente.

La posibilidad de hacer juicios distributivos que sean independientes del volumen total de renta a repartir tendría sentido solo si la ordenación relativa de los niveles de bienestar de las distribuciones implicadas fuese neutral a la multiplicación de la renta de todos los individuos por un escalar positivo. Sin embargo, no hay razones claras para hacer que nuestros juicios acerca del bienestar social sean independientes de la escala en este sentido. Por ello, extender el ordenamiento estricto parcial de Lorenz al caso en el que hay variaciones en la renta media no es directo.

Hay situaciones, sin embargo, en las que si podemos progresar. Un primer resultado que podemos obtener inmediatamente a partir del teorema (5.1), cuando las funciones de bienestar social son igualitarias, es la siguiente proposición.

Proposición (5.1) (Shorrocks 1983)

Sean **x** e **y** dos distribuciones de renta tales que $\mu_{\mathbf{x}} \geq \mu_{\mathbf{y}}$. Entonces,

$$\mathbf{x} \succ_L \mathbf{y} \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{x} \succ_W \mathbf{y}$$

Una demostración de este resultado puede verse en Shorrocks (1983, teorema 1) o Lambert (1993, cap. 3).

Lo que esta proposición nos indica es bastante intuitivo. Si **x** domina de forma estricta en el sentido de Lorenz a la distribución **y**, y además $\mu_{\mathbf{x}} \geq \mu_{\mathbf{y}}$, entonces debemos concluir que **x** domina en términos de bienestar social a **y**, recordemos que las funciones de bienestar social igualitarias son monótonas en las rentas. Por tanto, menor desigualdad relativa, unido a una renta per cápita mayor (estrictamente hablando, no menor), siempre será preferible en términos de bienestar.

Los casos no concluyentes son, pues, aquellos en los que mayor renta per cápita va asociada con mayores niveles de desigualdad relativa, o menor renta per cápita coincide con una distribución más igualitaria, además de aquellos casos en los que las curvas de Lorenz de ambas distribuciones se cruzan. ¿Es posible obtener algún criterio sencillo que permita hacer recomendaciones indiscutibles en términos de bienestar a partir de las curvas de Lorenz y las rentas medias de las distribuciones bajo comparación? La respuesta, para un gran conjunto de situaciones, la proporcionó la generalización de la curva de Lorenz realizada por Shorrocks (1983).[107]

Shorrocks (1983) define la *curva de Lorenz generalizada, GL*, para una distribución de renta **y**, como el resultado de escalar las ordenadas de Lorenz por la renta media de la distribución, μ. Es decir

[107] Los resultados sobre la curva de Lorenz generalizada que mencionamos también aparecen en Kolm (1969) y Kakwani (1984).

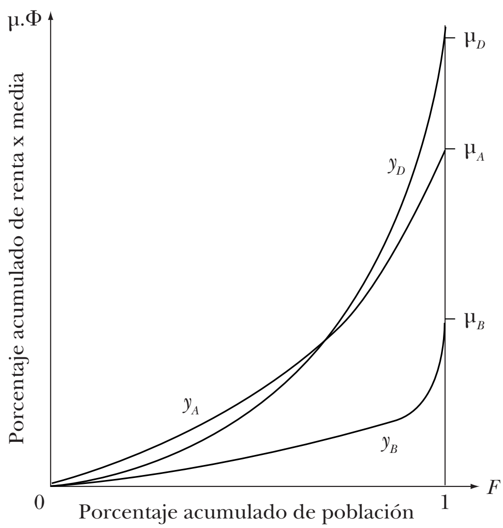
GL es el conjunto de puntos $\left[p_i, \mu L(p_i)\right] = \left[p_i, GL(p_i)\right]$, donde $L(p_i)$ viene dado por (2.12) y $GL(p_i) = \mu L(p_i)$, o alternativamente el gráfico dado por $\left[F(y), \mu\Phi(y)\right]$ donde $\Phi(y)$ viene dado por (2.13).[108] El gráfico 5.3 muestra el resultado de escalar las distribuciones del gráfico 5.2 por las medias de las distribuciones respectivas. La impresión visual en términos distributivos es sustancialmente diferente en ambos gráficos.

A partir de esta definición diremos que la distribución **x** domina estrictamente en el sentido de Lorenz generalizado a la distribución **y**, si

$$GL_{\mathbf{x}}(p_i) \geq GL_{\mathbf{y}}(p_i) \qquad \forall i \in N \tag{5.2}$$

con desigualdad estricta para algún $i < n$. Escribiremos en este caso $\mathbf{x} \succ_{GL} \mathbf{y}$.

GRÁFICO 5.3: **Curva de Lorenz generalizada**



Fuente: Elaboración propia.

[108] Obsérvese que la curva de Lorenz generalizada es diferente de la *curva de Lorenz absoluta,* introducida por Moyes (1987), pero idéntica a la curva de Lorenz absoluta de Yitzhaki y Olkin (1991).

Esta definición es la extensión natural de (5.1) y constituye el criterio básico para realizar juicios distributivos con población y volumen total de renta variable. Dada una función de bienestar social $W(\mathbf{y})$ que verifica las propiedades de monotonía, simetría, cuasiconcavidad estricta y réplica de poblaciones, el siguiente teorema generaliza el resultado del teorema (5.1).

Teorema (5.2) (Shorrocks 1983)

Sean **x** e **y** dos distribuciones de renta. Entonces, las siguientes comparaciones resultan equivalentes,

1) $\mathbf{x} \succ_{GL} \mathbf{y}$

2) $\mathbf{x} \succ_{W} \mathbf{y}$

Shorrocks (1983, teorema 2) demuestra este resultado.

El teorema (5.2) muestra que, aun en el caso en que la renta media varíe, una ordenación inequívoca en términos de bienestar es posible, si y solo si las curvas de Lorenz generalizadas no se cruzan. Obtenemos esta situación particular bajo las condiciones de la proposición (5.1), cuando $\mathbf{x} \succ_{L} \mathbf{y}$ y además $\mu_{\mathbf{x}} \geq \mu_{\mathbf{y}}$, pero también en muchos otros casos en los que el crecimiento de la renta per cápita media sea capaz de compensar los empeoramientos en la distribución. Afortunadamente la curva de Lorenz generalizada es sencilla de construir en la práctica.

Este tipo de situaciones puede ser observado en la comparación de los gráficos 5.2 y 5.3. Escalar por la media de las distribuciones respectivas altera sustancialmente las dominancias observadas. Así $\mathbf{y}_A \succ_L \mathbf{y}_D$ en el gráfico 5.2, pero las curvas de Lorenz generalizadas de ambas distribuciones se cruzan en el gráfico 5.3. Por su parte, mientras que $\mathbf{y}_D \succ_{GL} \mathbf{y}_B$ en el gráfico 5.3, las curvas ordinarias de Lorenz se cruzan en el gráfico 5.2. Por tanto la dominancia generalizada de Lorenz puede alterar sustancialmente los resultados, ya que en muchos casos prácticos las variaciones en las ordenadas de Lorenz suelen ser pequeñas en comparación con las variaciones en las rentas medias.

5.5. Dominancia estocástica

Este capítulo ha introducido el concepto de dominancia de Lorenz, y su relación en términos de una función de bienestar social muy general, a partir de la aportación original de Atkinson (1970) y diversas extensiones posteriores. Atkinson (1970) tomó como referencia los trabajos de Rothschild y Stiglitz (1970) sobre la decisión bajo incertidumbre y riesgo, de hecho, su concepción de la aversión a la desigualdad es la imagen especular de la aversión al riesgo. Continuando con esta semejanza es posible introducir otros criterios de dominancia que, utilizados con frecuencia en el análisis del comportamiento bajo incertidumbre, aparecen también en el análisis de la desigualdad. Aunque estos criterios no jugarán un papel relevante en los capítulos que restan de este volumen, sí conviene tener conocimiento de ellos, especialmente por su vinculación con la dominancia de Lorenz bajo ciertas condiciones y por su relación con el análisis de la pobreza.

La dominancia estocástica entre distribuciones está mejor definida en relación con la función de distribución de la renta, $F(y)$, presentada en la introducción (Bawa 1975), si bien en lo que a nosotros respecta examinaremos su estrecha relación con los cuantiles y las proporciones de renta que hemos venido manejando hasta ahora.

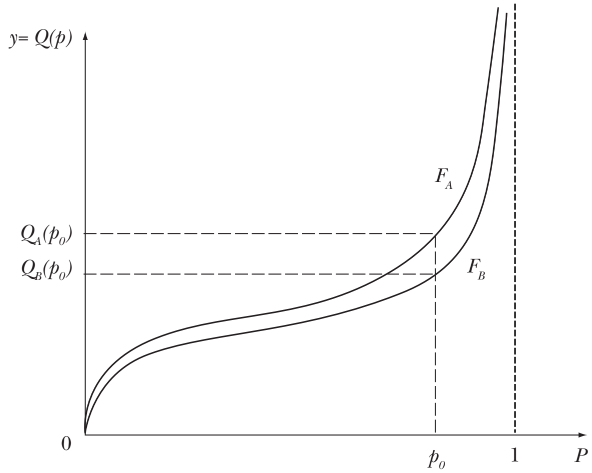
5.5.1. Dominancia estocástica de primer orden, SD_1

Sean **x** e **y** dos distribuciones de renta con funciones de distribución $F_{\mathbf{x}}(x)$ y $F_{\mathbf{y}}(y)$ respectivamente. Diremos que la distribución **x** presenta *dominancia estocástica de primer orden* respecto a la distribución **y**, si

$$F_{\mathbf{x}}(z) \leq F_{\mathbf{y}}(z) \qquad \forall z \in \mathbb{R}_{++} \tag{5.3}$$

con desigualdad estricta en alguna parte del dominio de definición de rentas. Por tanto $F_{\mathbf{x}}(x)$ nunca estará por encima de $F_{\mathbf{y}}(y)$ y en algún tramo estará por debajo. Por definición de F, para un nivel de renta dado, la proporción de población con una renta igual o inferior a dicho nivel nunca será mayor bajo la distribución **x** que bajo la distribución **y**. Escribiremos en este caso, $\mathbf{x} \succ_{SD_1} \mathbf{y}$.

GRÁFICO 5.4: Dominancia estocástica de primer orden, *F*



Fuente: Elaboración propia.

Utilizando la función cuantil, Q, que no es más que la inversa de F, obtenemos una forma alternativa de expresar la dominancia estocástica de primer orden. La distribución **x** presenta dominancia estocástica de primer orden respecto a la distribución **y**, si

$$Q_{\mathbf{x}}(p_i) \geq Q_{\mathbf{y}}(p_i) \qquad \forall i \in N \tag{5.4}$$

con desigualdad estricta para algún $i > 0$. El gráfico 5.4 ilustra la dominancia estocástica de primer orden para dos distribuciones dadas, $F_A \equiv \mathbf{y}_A$ y $F_B \equiv \mathbf{y}_B$, donde $\mathbf{y}_A \succ_{SD_1} \mathbf{y}_B$.

Recordando la parodia de los «enanos y gigantes» (Pen 1971), citada en el introducción en referencia a la función cuantil, observamos que dominancia estocástica de primer orden implica *menos enanos* y una ganancia generalizada en todos los cuantiles de la distribución.[109]

Puesto que el área bajo la función cuantil es la media de la distribución, $\mathbf{x} \succ_{SD_1} \mathbf{y} \Rightarrow \mu_{\mathbf{x}} > \mu_{\mathbf{y}}$. En consecuencia para todas las funciones de bienestar social W que cumplan las propiedades de

---

[109] Recuérdese que la ordenación de los individuos no es, necesariamente, la misma en ambas distribuciones y, por tanto, no todos los individuos tienen por qué tener una renta más elevada.

monotonía y simetría, es posible demostrar que (Quirk y Saposnik 1962; Saposnik 1981, 1983):

$$\mathbf{x} \succ_{SD_1} \mathbf{y} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{x} \succ_{W} \mathbf{y} \tag{5.5}$$

Este resultado indica que la función cuantil contiene información relevante en términos de bienestar. Si los cuantiles de **x** no son nunca inferiores a los cuantiles de **y**, y al menos un cuantil es estrictamente mayor, entonces cualquier función de bienestar monótona y simétrica asignará mayor bienestar a **x** que a **y**. Esta dominancia, sin embargo, no incorpora ningún criterio igualitario y en consecuencia es sustancialmente diferente de la considerada en el teorema (5.1).

5.5.2. Dominancia estocástica de segundo orden, SD_2

Una forma de introducir aspectos igualitarios en el criterio de dominancia que acabamos de formular es comparar áreas bajo las funciones de distribución *F*, en lugar de comparar sus valores.

Diremos que la distribución **x** presenta *dominancia estocástica de segundo orden* respecto a la distribución **y**, si[110]

$$\int_0^z F_{\mathbf{x}}(u)du \leq \int_0^z F_{\mathbf{y}}(u)du \qquad \forall z \in \mathbb{R}_{++} \tag{5.6}$$

con desigualdad estricta en alguna parte del dominio de definición de rentas, escribiremos en este caso, $\mathbf{x} \succ_{SD_2} \mathbf{y}$. Obviamente

$$\mathbf{x} \succ_{SD_1} \mathbf{y} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x} \succ_{SD_2} \mathbf{y}$$

pero no a la inversa.

Para examinar por qué la dominancia estocástica de segundo orden introduce aspectos igualitarios basta con considerar una formulación alternativa de la desigualdad (5.6) a partir de la inversa de *F*, la función cuantil, $Q(p) = F^{-1}(p)$. Es posible demostrar que, dada la relación entre *F* y *Q*,

$$\int_0^z \left[F_{\mathbf{y}}(u) - F_{\mathbf{x}}(u)\right]du$$

[110] En una formulación discreta, las integrales deben sustituirse por sumatorios.

es no negativo para $\forall z \in \mathbb{R}_{++}$, si y solo si $\int_0^p \left[Q_{\mathbf{x}}(q) - Q_{\mathbf{y}}(q)\right] dq$ es no negativo para $\forall p \in [0,1]$ (Foster y Shorrocks 1988a, 1988b), por lo que, alternativamente, **x** presenta dominancia estocástica de segundo orden respecto a la distribución **y**, si

$$\int_0^p Q_{\mathbf{x}}(q)dq \geq \int_0^p Q_{\mathbf{y}}(q)dq \qquad \forall p \in [0,1] \qquad (5.7)$$

con desigualdad estricta en algún $p \in [0, 1]$.

Pero $\int_0^p Q(q)dq$ no es más que la curva de Lorenz generalizada,

$$\mu L(p_i) = \frac{\Sigma_{j=1}^{i} y_j}{n}$$

en la versión discreta o el área bajo la función cuantil del gráfico 5.4 en la versión continua. Por lo tanto la dominancia estocástica de segundo orden se reduce a la dominancia de Lorenz generalizada (5.2), es decir, $\succ_{SD_1} \equiv \succ_{GL}$.

En consecuencia, sabemos por los resultados anteriores que para todas las funciones de bienestar social W que sean igualitarias y cumplan el principio de réplica de poblaciones, tendremos (Iritani y Kuga 1983; Thistle 1989a, 1989b):

$$\mathbf{x} \succ_{SD_2} \mathbf{y} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{x} \succ_W \mathbf{y} \qquad (5.8)$$

que no es más que el teorema (5.2) enunciado anteriormente.

Por supuesto, si las distribuciones bajo comparación tienen la misma media, o solo estamos interesados en la desigualdad relativa y consideramos distribuciones normalizadas, entonces la dominancia estocástica de segundo orden se reduce a la dominancia de Lorenz, lo que en esencia nos devuelve al principio del capítulo.

Observación (5.3): La dominancia estocástica puede ser generalizada de forma recursiva a órdenes superiores (Davidson y Duclos 2000). Así, por ejemplo, una condición adicional sobre la *sensibilidad de las transferencias*, que otorgue una mayor sensibilidad a las transferencias en la parte inferior de la distribución que en la parte superior, nos llevaría al concepto de dominancia estocástica de tercer orden (Shorrocks y Foster 1987).

5.6. Más sobre Lorenz, Dalton, desigualdad y bienestar

El principio de las transferencias de Dalton es una propiedad normativa que cumplen casi todos los índices de desigualdad interesantes. Hemos visto en este capítulo que la dominancia de Lorenz y la dominancia de Dalton resultan equivalentes, es decir, ordenan del mismo modo las distribuciones de renta que resultan comparables. Dado que la dominancia de Lorenz supone un orden parcial y los índices de desigualdad generan ordenaciones completas, podemos preguntarnos en qué condiciones estos índices son consistentes en relación al criterio de Lorenz. Es decir, si cada vez que una distribución domina en sentido de Lorenz a otra, el índice de desigualdad le asigna un valor menor. Más concretamente querríamos saber si el hecho de que un índice de desigualdad verifique el principio de las transferencias de Dalton garantiza que este índice sea consistente en relación al criterio de Lorenz.

La respuesta definitiva a esta cuestión viene dada por el siguiente teorema:

Teorema (5.3) (Foster 1985)

Un índice de desigualdad $I(\cdot)$ es consistente con el criterio de dominancia de Lorenz, si y solo si verifica la propiedades de simetría (propiedad 1.2), principio de réplica de poblaciones (propiedad 1.3), principio de transferencias de Dalton (propiedad 1.4) e independencia de la escala (propiedad 1.6).

Por tanto, si al comparar dos distribuciones de renta $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, observamos que la curva de Lorenz asociada a $\mathbf{x}$ está completamente contenida en la curva asociada a la distribución $\mathbf{y}$, sabemos que $I(\mathbf{x})$ será menor o igual que $I(\mathbf{y})$, para cualquier índice de desigualdad que verifique los principios de simetría, réplica de poblaciones, transferencias de Dalton e independencia de la escala.

Hemos visto también en el teorema (5.1) la equivalencia entre dominancia en términos de desigualdad (ya sea aplicando Lorenz o Dalton) y dominancia en términos de bienestar. Esta relación plantea también una pregunta adicional cuando consideramos los índices de desigualdad. ¿Existe una relación biunívoca entre desigualdad y bienestar? O, dicho de otro modo, si tomamos cualquier índice de desigualdad que cumpla el principio de transferencias de Dalton y cualquier función de bienestar social igualitaria, dadas dos distribuciones de renta $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, ¿podemos asegurar que $I(\mathbf{x}) < I(\mathbf{y})$, si y solo si $W(\mathbf{x}) > W(\mathbf{y})$?.

La respuesta es negativa (Esteban 1976, Sen 1978, Blackorby y Donaldson, 1978). Existen funciones de bienestar social igualitarias que son consistentes con diferentes índices de desigualdad que no resultan ordinalmente equivalentes. Blackorby y Donaldson (1978), prueban que si la función de bienestar es homogénea (preferencias sociales homotéticas), entonces esta inconsistencia desaparece. Dutta y Esteban (1992) determinan las condiciones necesarias y suficientes para que un índice de desigualdad sea consistente con una única función de bienestar social.

Es interesante señalar aquí que la propiedad de homogeneidad en la función de bienestar social tiene implicaciones sobre la naturaleza de las funciones de utilidad que implícitamente la configuran. En efecto, como muestran Blackorby y Donaldson (1982) y discute sistemáticamente D'Aspremont (1985), la homogeneidad de la función de bienestar social impone condiciones sobre las preferencias de los individuos. En particular la homogeneidad exige que las preferencias resulten comparables interpersonalmente en términos de una unidad común, cualquiera que sea, y un origen fijo (D'Aspremont 1985, sec. 3.5). Este origen puede interpretarse como una línea de pobreza o un punto de referencia desde el que medir las ganancias de utilidad de los individuos. De este modo, podemos interpretar que la homogeneidad de la función de bienestar introduce implícitamente un criterio de comparabilidad interpersonal.

5.7. Consideraciones finales

5.7.1. A modo de resumen

Este capítulo comenzó con una pregunta concreta acerca de la ordenación de dos distribuciones de renta, $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$. Debemos, pues, finalizar con una respuesta concreta.

Los conceptos introducidos a lo largo del capítulo nos permiten establecer las siguientes conclusiones. Si todo lo que nos preocupa es la desigualdad en un sentido relativo, tal y como fue definida en el capítulo 1, entonces todos los índices que satisfagan las propiedades (1.1) a (1.6) introducidas en dicho capítulo, proporcionaran la misma ordenación en desigualdad, siempre y cuando las correspondientes curvas de Lorenz de ambas distribuciones no se crucen. Si dichas curvas se intersectan, entonces diferentes índices podrán proporcionar diferentes ordenaciones. Estas diferentes ordenaciones dependen esencialmente de la valoración que establece cada índice, de forma implícita, sobre la importancia de la desigualdad en diferentes partes de la distribución. En estos casos debemos concluir que la comparación de las distribuciones no es inequívoca.[111]

Si las curvas de Lorenz no se cruzan y la renta media de ambas distribuciones, **x** e **y**, es la misma, entonces bajo criterios bastante generales la ordenación de Lorenz es equivalente a una ordenación en términos de bienestar social.

Si la renta media de ambas distribuciones es diferente, entonces se plantea un problema de valoración adicional: cómo valorar socialmente el *tamaño* y la *distribución* del pastel. Es decir, qué sustituibilidad resulta admisible entre desigualdad y renta media. Si la desigualdad relativa es lo único que nos preocupa (lo que significa en este contexto que un aumento proporcional en la renta se traduce en un aumento de igual magnitud en el bienestar), entonces podemos extender trivialmente los resultados anteriores.

En un contexto más general hemos de recurrir al estudio de las curvas de Lorenz generalizadas para poder establecer comparaciones inequívocas de distribuciones de renta. También en este caso aplica el principio general anterior: cuando las curvas de Lorenz generalizadas no se cruzan, es posible establecer una ordenación inequívoca, pero en caso contrario obtenemos, de nuevo, una situación de no comparabilidad entre distribuciones.

Todo ello significa que la selección de una adecuada medida de desigualdad es un elemento esencial para la valoración de la distribución de la renta y la implementación de políticas igualitarias.

[111] Alternativamente sería posible concluir que las distribuciones no son comparables, $\mathbf{x} \perp_L \mathbf{y}$, y conformarnos con un análisis por tramos de la distribución.

La curva de Lorenz debe ser siempre examinada en la práctica y, siguiendo la terminología de Sen (1967), conviene considerar las medidas de desigualdad como juicios *tentativos*,[112] que recomiendan y justifican una determinada acción, pero no de una forma absolutamente imperiosa.[113]

5.7.2. Observación final

Por simplicidad hemos definido la dominancia de Lorenz en términos estrictos, lo que equivale a establecer una relación de preferencia estricta *(ser mejor que*, o *ser menos desigual que)* entre las distribuciones de renta consideradas. Obviamente se trata de una ordenación parcial puesto que hay distribuciones de renta que resultan incomparables con este criterio.

Cabría también definir la relación de dominancia en términos más débiles, es decir, ser mejor o igual que o a lo sumo tan desigual como desde el punto de vista de la desigualdad. Obtendríamos así un preorden parcial en lugar de un orden parcial y podríamos considerar la existencia de distribuciones de renta *indiferentes*, esto es, con el mismo grado de bienestar o desigualdad.

Esta relación de indiferencia entre dos distribuciones $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ se define como sigue: $\mathbf{x}$ es tan desigual como $\mathbf{y}$ si $\mathbf{x}$ domina débilmente a $\mathbf{y}$ en el sentido de Lorenz, al tiempo que $\mathbf{y}$ domina débilmente a $\mathbf{x}$. Por supuesto, cuando estamos hablando de dos distribuciones con la misma población y la misma media, dos distribuciones de renta son indiferentes, si y solo si, son iguales entre sí. Pero esta conclusión no se aplica al caso de distribuciones relativas a poblaciones diferentes.

Si nos concentramos en dominancias de Lorenz que incluyan la posibilidad de equivalencia entre dos distribuciones, lo que indicaremos como $\mathbf{x} \succeq_L \mathbf{y}$, entonces el ordenamiento a considerar

---

[112] *De no obligado cumplimiento*, sería una traducción más literal de su expresión.

[113] El hecho de que, tal y como argumenta Sen (1973, cap. 3), las comparaciones en términos de desigualdad y bienestar entre distribuciones sean imprecisas por su propia naturaleza ha llevado a algunos autores a buscar caminos alternativos a los ordenamientos parciales como forma de progresar. En concreto, una parte de la literatura ha adaptado las técnicas de los conjuntos borrosos a la medición de la desigualdad, un enfoque que no seguiremos en este trabajo, pero remitimos al lector a Basu (1987) y Ok (1995, 1996) si está interesado en este tema.

en términos de bienestar hace referencia a la relación de desigualdad débil $W(\mathbf{x}) \geq W(\mathbf{y})$, *por lo menos tan grande como*, en lugar de la relación *mayor que*, que hemos considerado anteriormente.[114]

Consideraciones de inferencia estadística, que no trataremos aquí, recomiendan considerar la desigualdad como un preorden, ya que siempre existirá un entorno dentro del cual dos distribuciones puedan ser consideradas como equivalentes.

En este caso menos estricto todos los resultados anteriores relativos a los teoremas (5.1) y (5.2) y a la proposición (5.1), son igualmente válidos sustituyendo las relaciones $\succ_T$ por $\succeq_T$, lo que permite debilitar las propiedades que debe cumplir ahora la función de bienestar social, *W*.[115] En concreto, podemos sustituir la propiedad de cuasi-concavidad estricta, por la cuasi-concavidad, es decir, cuando $\forall \mathbf{y}, \mathbf{y}' \in \mathbb{R}^n_{++}$ y $\forall \lambda \in [0,1]$ se cumple que:

$$W\left(\lambda \mathbf{y} + (1-\lambda)\mathbf{y}'\right) \geq min\left\{W(\mathbf{y}), W(\mathbf{y}')\right\}$$

Así pues, la cuasiconcavidad implica que una combinación convexa de dos distribuciones cualesquiera, de un volumen de renta total dado, no disminuye el bienestar social.

[114] Si fuera necesario realizaríamos esta comparación en términos per cápita.

[115] En el caso de la equivalencia entre distribuciones, $\mathbf{x} \sim_L \mathbf{y}$ o $\mathbf{x} \sim_W \mathbf{y}$, no tiene mucho sentido la consideración del criterio de Dalton, ya que en el caso de equivalencia en términos de Lorenz o en términos de bienestar entre dos distribuciones no sería necesario efectuar transferencia de Pigou-Dalton alguna para obtener **x** a partir de **y**, si bien puede ser necesaria la permutación de rentas entre individuos.

6. Descomponibilidad (I)

6.1. Introducción

Una de las aplicaciones más interesantes de los índices de desigualdad es la de proporcionarnos información acerca de cuál es el origen de esta desigualdad y cuál es la importancia relativa de los diversos factores que originan la desigualdad global observada. Este conocimiento supone una ayuda sustantiva a la hora de diseñar medidas coherentes de política económica tendentes a reducir el grado de desigualdad.

En determinadas circunstancias resulta posible extraer este tipo de información mediante una adecuada descomposición de los índices de desigualdad en componentes explicativos diferenciados. Descomponer un índice en una serie de factores equivale a determinar qué parte de la desigualdad total puede ser atribuida a cada uno de esos factores. Inevitablemente, para poder desarrollar un análisis de la importancia relativa de los diversos factores en la explicación de la desigualdad, se requiere que los índices empleados sean de naturaleza cardinal, es decir, que su valor nos proporcione información no solo acerca de *mayor o menor*, sino de *cuánto mayor o cuánto menor*.

Desde un punto de vista sustantivo hay dos tipos distintos de descomponibilidad que son interesantes: la descomponibilidad por subgrupos de población y la descomponibilidad por factores generadores de renta.

La *descomponibilidad por subgrupos de población* se refiere al análisis de la desigualdad en una sociedad compuesta por una colección de grupos poblacionales (determinados a partir de criterios demográficos, espaciales, socioculturales, etc.), de forma que la partición sea exhaustiva y los grupos sean mutuamente excluyentes. El objeto central de la descomposición por subgrupos de población se refiere a la atribución de la desigualdad global a los distintos grupos que constituyen la sociedad. Es este tipo de descomponibilidad al que hacía referencia la propiedad (1.7).

La *descomponibilidad por factores generadores de renta* trata de asignar la desigualdad total a los diferentes componentes de la renta de los individuos (renta del trabajo, renta del capital, transferencias, etc.).

Desde un punto de vista formal, la descomponibilidad admite diversas variantes. La más intuitiva es la descomponibilidad aditiva, que expresa la desigualdad total como la suma de la desigualdad *dentro de* y la desigualdad *entre* las categorías consideradas, donde esta desigualdad se mide según el propio índice de desigualdad tomado como referencia. Pero veremos que no siempre es posible obtener este tipo de descomponibilidad, lo que obliga a considerar otras formas diferentes o más generales.

Nos ocuparemos en este capítulo y en el próximo de discutir, sistemáticamente las posibilidades de efectuar este tipo de descomposiciones, extendiendo los resultados preliminares del capítulo 1 y que ya han aparecido en diversos casos concretos a lo largo de los capítulos precedentes. Nos centraremos en el caso de la descomponibilidad por subgrupos de población, puesto que es el tipo de descomponibilidad que ofrece resultados más interesantes y de mayor aplicación práctica. Más concretamente, vamos a dedicar este capítulo al estudio de la descomponibilidad aditiva aplicada a los subgrupos de población. En el capítulo siguiente consideramos formas más generales de descomponibilidad aplicadas al caso de subgrupos de población y abordamos también el estudio de la descomponibilidad por factores generadores de renta.[116]

---

[116] Adicionalmente, en el caso de regiones o países, en los que la renta per cápita puede expresarse como un producto de factores, Esteban (1994), Duro y Esteban (1998), Goerlich (1998, 2001) y Cheng y Li (2006) estudian una descomposición aditiva de los índices de Theil (1967) a partir de la descomposición multiplicativa de la renta per cápita.

6.2. Descomponibilidad aditiva por subgrupos de población

Comenzaremos precisando la noción de descomponibilidad, en la que estamos inicialmente interesados, y que ya fue formulada como la propiedad (1.7). Aunque este tipo de descomponibilidad es tremendamente útil desde el punto de vista aplicado, como tendremos ocasión de comprobar, veremos que no es el único enfoque posible. De hecho, enfoques alternativos pueden arrojar luz adicional sobre la estructura de los índices de desigualdad habitualmente utilizados en la práctica.

Sea N una sociedad compuesta por n individuos con una distribución de renta dada por el vector $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$. Supongamos ahora que esta sociedad podemos considerarla como la unión de G grupos no vacíos, exhaustivos y mutuamente excluyentes entre sí, clasificados por el índice $g = 1, 2, 3, \ldots, G$. Normalmente, esta división de la sociedad en grupos se realiza a partir de algún criterio independiente del proceso de generación de las rentas.[117] Denotaremos por n_g el número de individuos del grupo g y por $\mathbf{y}^g = (y_1^g, y_2^g, \ldots, y_{n_g}^g)$ su vector de rentas. La distribución de renta de la sociedad N puede expresarse ahora como $\mathbf{y} = (\mathbf{y}^1, \mathbf{y}^2, \ldots, \mathbf{y}^G)$. Sea $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_G)$ el vector de rentas medias de cada grupo, siendo μ_g la renta media del grupo g, $\mathbf{n} = (n_1, n_2, \ldots, n_G)$ el vector del número de individuos de cada grupo, y sea ι_{n_g} un vector unitario con n_g componentes, es decir

$$\iota_{n_g} = (\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{n_g})$$

Diremos que un índice de desigualdad, $I(n,\mathbf{y})$, es *aditivamente descomponible* si puede ser escrito como

$$I(n, \mathbf{y}) = \underbrace{\sum_{g=1}^{G} \omega_g^G(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{n}) I(n_g, \mathbf{y}^g)}_{\substack{\textit{Componente} \\ \textit{intragrupos}}} + \underbrace{I(n, \mu_1 \iota_{n_1}, \ldots, \mu_G \iota_{n_G})}_{\substack{\textit{Componente} \\ \textit{intergrupos}}} \qquad (6.1)$$

---

[117] La descomponibilidad nos introduce, de forma limitada, en el mundo de la multidimensionalidad, ya que ahora tomamos en consideración otras características de los individuos más allá de su renta, y. En este caso concreto, la pertenencia a un grupo determinado, de forma que, en términos de la notación hecha en la introducción, la distribución de la renta viene dada por la lista de pares (3) (v. introducción), donde el atributo a indica la pertenencia a uno de los grupos G en que se encuentra dividida la población.

para un conjunto de coeficientes estrictamente positivos $\omega_g^G > 0$, que son, en realidad, funciones que dependen de μ, de ***n*** y del número *G* de subgrupos de la partición, y donde $I(n_g, \mathbf{y}^g)$ es el índice de desigualdad aplicado a la distribución del grupo *g*, ω_g^G es la ponderación asignada a dicho grupo en el componente intragrupos de la descomposición y $I(n, \mu_1 \iota_{n_1}, \ldots, \mu_G \iota_{n_G})$ es el componente intergrupos, esto es, el índice de desigualdad aplicado a la *distribución suavizada* que resulta de asignar a cada individuo la renta media del grupo al que pertenece (es decir, la desigualdad que obtendríamos si realizáramos transferencias internas dentro de cada grupo de forma que se eliminara la desigualdad en el seno de dichos grupos). El lector puede consultar a este respecto los trabajos de Yoshida (1977), Bourguignon (1979), Shorrocks (1980), Cowell (1980), Toyoda (1980), Berry, Bourguignon y Morrison (1981, 1983).

Obsérvese que, con esta definición de descomponibilidad, el componente intergrupos es independiente de la desigualdad dentro de los grupos individuales, y de forma similar, los coeficientes $\omega_g^G(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{n})$ pueden variar con los vectores de rentas medias de cada grupo $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_G)$ y del número de individuos de cada grupo $\mathbf{n} = (n_1, n_2, \ldots, n_G)$, pero son independientes del nivel de desigualdad existente dentro de cada uno de los grupos.

Nuestro concepto inicial de descomponibilidad es, pues, muy restrictivo ya que requiere que la *desigualdad global* pueda ser expresada de forma exacta como la *suma de dos componentes:*

1) La *desigualdad intragrupos,* constituida a su vez por una suma ponderada de los de los índices de desigualdad aplicados a la distribución de cada uno de los grupos, donde las ponderaciones reflejan el tamaño relativo de los mismos[118] y son independientes del nivel de desigualdad existente dentro de los grupos.
2) La *desigualdad intergrupos,* constituida por la aplicación del índice de desigualdad a una población compuesta por la unión de las poblaciones de los distintos grupos, donde a

[118] En consecuencia, estas ponderaciones dependerán solo de las proporciones de renta y/o población de cada uno de los grupos.

cada individuo le asignamos la renta media del grupo al que pertenece. De este modo, se anula la desigualdad dentro de los grupos para este cálculo y, adicionalmente, este término resulta independiente del nivel de desigualdad existente dentro de los grupos.

Adviértase que, si bien este tipo de descomponibilidad tiene una fácil interpretación y resulta muy práctica en las aplicaciones empíricas, no está exento de críticas. En particular cuando efectuamos una aproximación normativa al análisis de la desigualdad. Para ilustrarlo podemos imaginar una sociedad compuesta por seis personas divididas en dos grupos de tres, con rentas (1, 1, 7), (1, 1, 7). Ahora se produce una redistribución en el primer grupo, que pasa a tener un vector de rentas igualitario (3, 3, 3). La desigualdad intergrupos no ha variado (sigue siendo cero) y tampoco la desigualdad dentro del segundo grupo. Sin embargo cabría pensar que los individuos del segundo grupo están ahora peor en el conjunto de la sociedad (tienen una desigualdad mayor en relación a la del primer grupo). Y este aspecto no cabe en esta formulación de la descomponibilidad. Volveremos sobre este tema en el capítulo siguiente.

6.3. Descomponibilidad de la varianza

La idea principal de la descomponibilidad aditiva de los índices de desigualdad se remonta a un resultado estadístico bien conocido, el *análisis de varianza* o ANOVA, del que ya hablamos someramente en el capítulo 2. Es fácil comprobar que, dada una partición de la población como la mencionada anteriormente, la varianza $\sigma^2 = (1/n)\Sigma_{i=1}^{n}(y_i - \mu)^2$ es descomponible aditivamente. Esto es,

$$\begin{aligned}
\sigma^2 &= \frac{1}{n}\sum_{g=1}^{G}\sum_{i=1}^{n_g}\left(y_i^g - \mu\right)^2 \\
&= \frac{1}{n}\sum_{g=1}^{G}\sum_{i=1}^{n_g}\left(y_i^g - \mu_g + \mu_g - \mu\right)^2 \\
&= \frac{1}{n}\sum_{g=1}^{G}\sum_{i=1}^{n_g}\left[\left(y_i^g - \mu_g\right)^2 + 2\left(y_i^g - \mu_g\right)\left(\mu_g - \mu\right) + \left(\mu_g - \mu\right)^2\right]
\end{aligned}$$

$$= \sum_{g=1}^{G} \frac{n_g}{n} \underbrace{\sum_{i=1}^{n_g} \frac{1}{n_g} \left(y_i^g - \mu_g \right)^2}_{\sigma_g^2} + \frac{2}{n} \sum_{g=1}^{G} \left(\mu_g - \mu \right) \underbrace{\sum_{i=1}^{n_g} \left(y_i^g - \mu_g \right)}_{=0}$$

$$+ \sum_{g=1}^{G} \frac{n_g}{n} \left(\mu_g - \mu \right)^2$$

$$= \sum_{g=1}^{G} \frac{n_g}{n} \sigma_g^2 + \sum_{g=1}^{G} \frac{n_g}{n} \left(\mu_g - \mu \right)^2$$

donde $\sigma_g^2 = \frac{1}{n_g} \sum_{i=1}^{n_g} \left(y_i^g - \mu_g \right)^2$ es la varianza del grupo *g*.

El primer término de la expresión final de este desarrollo nos da, por tanto, la suma ponderada de las varianzas dentro de los grupos. Este es el componente intragrupos de la descomposición (6.1), que pondera la dispersión dentro de cada uno de los grupos por su importancia demográfica.

El segundo término de la expresión anterior es una medida de la varianza entre los grupos, una suma ponderada de los cuadrados de las desviaciones de las medias de cada grupo respecto a la media global. Este es el componente intergrupos de la descomposición (6.1), que pondera la desviación de cada grupo respecto a la media global por su importancia demográfica.

Por tanto, si llamamos

1) $\sigma_W^2 = \sum_{g=1}^{G} \frac{n_g}{n} \sigma_g^2$, y

2) $\sigma_B^2 = \sum_{g=1}^{G} \frac{n_g}{n} \left(\mu_g - \mu \right)^2$

podemos expresar la varianza total σ^2 como la suma de los componentes intragrupos e intergrupos, $\sigma^2 = \sigma_W^2 + \sigma_B^2$, lo que nos da la varianza de la distribución de la renta en la sociedad como la suma de estos dos componentes. Por su parte, las ratios σ_W^2 / σ^2 y σ_B^2 / σ^2 nos dan las aportaciones porcentuales a la varianza global de los componentes *dentro de* y *entre,* respectivamente.[119]

[119] Es posible además una analogía con el análisis de regresión tradicional (Anand 1983).

Sin embargo, la varianza no es un índice de desigualdad relativo (no verifica la propiedad 1.6), sino un índice absoluto. Para evitar este problema vimos en el capítulo 2, que podíamos usar en su lugar el coeficiente de variación, *CV*, que elevado al cuadrado sí puede ser descompuesto de forma aditiva.[120] Dividiendo la fórmula para la descomposición de la varianza por μ^2, obtenemos

$$CV^2 = \sum_{g=1}^{G} \frac{n_g}{n} \frac{\mu_g^2}{\mu^2} \underbrace{\frac{\sigma_g^2}{\mu_g^2}}_{CV_g^2} + \frac{1}{\mu^2} \sum_{g=1}^{G} \frac{n_g}{n} \left(\mu_g - \mu\right)^2 \tag{6.2}$$

En consecuencia, el componente entre grupos no es más que el cuadrado del coeficiente de variación ponderado entre las medias de cada grupo, y el componente dentro de los grupos no es más que una suma ponderada de los cuadrados de los coeficientes de variación de cada uno de los grupos. Obsérvese, sin embargo, que en este caso las ponderaciones no suman la unidad y que dichas ponderaciones deben ajustarse respecto a la descomposición de la varianza por el término μ_g^2/μ^2, para tomar en consideración la diferencia entre el factor de normalización del grupo g, μ_g, y el factor de normalización de la población, μ. De esta forma la importancia demográfica, n_g/n, se ajusta al alza o a la baja en función de que la media del grupo sea mayor o menor que la media global de la población.

Resulta interesante observar que los términos porcentuales de la contribución dentro de cada grupo y entre los grupos son idénticos para CV^2 que para σ^2. Por tanto, si bien es cierto que σ^2 no es una medida de desigualdad independiente de la escala, sus contribuciones en el análisis de la varianza sí lo son.

También en el capítulo 2 habíamos visto otra forma alternativa de convertir la varianza en un indicador relativo, mediante el recurso a tomar transformaciones logarítmicas de las rentas y considerar la varianza tras dicha transformación. Es decir,

$$VL = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(\log y_i - \log \tilde{\mu}\right)^2$$

donde $\tilde{\mu}$ representa la media geométrica.

---

[120] Recuérdese que CV^2 no es más que la varianza aplicada a la distribución de la renta relativa, y_i/μ.

La relación entre la media geométrica global, $\tilde{\mu} = \left(\Pi_{i=1}^{n} y_i\right)^{1/n}$ y las medias geométricas de cada uno de los grupos de la población, $\tilde{\mu}_g = \left(\Pi_{i=1}^{n_g} y_i^g\right)^{1/n_g}$, puede expresarse como:

$$\tilde{\mu} = \left(\prod_{i=1}^{n} y_i\right)^{1/n} = \left(\prod_{g=1}^{G}\prod_{i=1}^{n_g} y_i^g\right)^{1/n} = \left(\prod_{g=1}^{G}\tilde{\mu}_g^{n_g}\right)^{1/n} = \prod_{g=1}^{G}\tilde{\mu}_g^{n_g/n}$$

que, en términos logarítmicos, puede escribirse como

$$\log\tilde{\mu} = \sum_{g=1}^{G}\frac{n_g}{n}\log\tilde{\mu}_g$$

Si aplicamos ahora la descomposición ANOVA al indicador *VL*, obtenemos:

$$\begin{aligned}
VL &= \frac{1}{n}\sum_{g=1}^{G}\sum_{i=1}^{n_g}\left(\log y_i^g - \log\tilde{\mu}\right)^2 \\
&= \frac{1}{n}\sum_{g=1}^{G}\sum_{i=1}^{n_g}\left(\log y_i^g - \log\tilde{\mu}_g + \log\tilde{\mu}_g - \log\tilde{\mu}\right)^2 \\
&= \frac{1}{n}\sum_{g=1}^{G}\sum_{i=1}^{n_g}\left[\begin{array}{l}\left(\log y_i^g - \log\tilde{\mu}_g\right)^2 \\ +2\left(\log y_i^g - \log\tilde{\mu}_g\right)\left(\log\tilde{\mu}_g - \log\tilde{\mu}\right) + \left(\log\tilde{\mu}_g - \log\tilde{\mu}\right)^2\end{array}\right] \\
&= \sum_{g=1}^{G}\frac{n_g}{n}\underbrace{\sum_{i=1}^{n_g}\frac{1}{n_g}\left(\log y_i^g - \log\tilde{\mu}_g\right)^2}_{VL_g} \\
&\quad + \frac{2}{n}\sum_{g=1}^{G}\left(\log\tilde{\mu}_g - \log\tilde{\mu}\right)\underbrace{\sum_{i=1}^{n_g}\left(\log y_i^g - \log\tilde{\mu}_g\right)}_{=0} \\
&\quad + \sum_{g=1}^{G}\frac{n_g}{n}\left(\log\tilde{\mu}_g - \log\tilde{\mu}\right)^2 \\
&= \sum_{g=1}^{G}\frac{n_g}{n}VL_g + \sum_{g=1}^{G}\frac{n_g}{n}\left(\log\tilde{\mu}_g - \log\tilde{\mu}\right)^2
\end{aligned}$$

donde $VL_g = \dfrac{1}{n_g}\displaystyle\sum_{i=1}^{n_g}\left(\log y_i^g - \log\tilde{\mu}_g\right)^2$

es la varianza de los logaritmos del grupo *g*.

Observamos, de esta forma, cómo el componente intragrupos pondera la desigualdad dentro de cada grupo, medida por VL_g, por la participación de la población del grupo en la población total, al igual que sucede con la varianza,

$$VL_W = \sum_{g=1}^{G} \frac{n_g}{n} VL_g$$

Sin embargo, el componente intergrupos es algo diferente respecto al de la definición de índice de desigualdad aditivamente descomponible dada en (6.1). De acuerdo con la definición de descomponibilidad aditiva que estamos manejando, el componente intergrupos debe corresponderse con el índice de desigualdad aplicado a la distribución que resulta de asignar a cada individuo la renta *media aritmética* del grupo al que pertenece, como si realizáramos transferencias internas dentro de cada grupo, de forma que se eliminara la desigualdad en el seno de dichos grupos. Por el contrario el componente intergrupos en la descomposición de VL,

$$VL_B = \sum_{g=1}^{G} \frac{n_g}{n} \left(\log \tilde{\mu}_g - \log \tilde{\mu} \right)^2$$

asigna a cada individuo la renta media geométrica del grupo al que pertenece, $\tilde{\mu}_g$. Esta peculiar forma de eliminar la desigualdad dentro de cada grupo hace que la descomposición de VL no sea aditivamente descomponible en el sentido definido por (6.1). Obsérvese que igualar la renta per cápita de cada individuo del grupo g, digamos, mediante un sistema de transferencias interno, manteniendo μ_g constante afectará tanto a $\tilde{\mu}_g$ como a $\tilde{\mu}$ y, en consecuencia, también a sus logaritmos, por tanto el componente intergrupos no es independiente de la distribución dentro de cada grupo, tal y como requiere la definición (6.1). Una aplicación estricta del componente intergrupos de la definición (6.1), $I(n, \mu_1 \iota_{n_1}, \ldots, \mu_G \iota_{n_G})$, en el caso de VL generaría el término,

$$VL(n, \mu_1 \iota_{n_1}, \ldots, \mu_G \iota_{n_G}) = \sum_{g=1}^{G} \frac{n_g}{n} \left(\log \mu_g - \sum_{g=1}^{G} \frac{n_g}{n} \log \mu_g \right)^2 \qquad (6.3)$$

claramente diferente de VL_B.[121]

[121] Adicionalmente recuérdese que la varianza de los logaritmos no verifica el principio de las transferencias de Pigou-Dalton.

Así pues para preservar una descomposición exacta, la varianza de los logaritmos utiliza la media geométrica, en lugar de la media aritmética, en la medición de la desigualdad de la distribución de la renta entre los grupos de la población. De esta forma, *VL* usa una definición alternativa de *renta representativa* del grupo de referencia e ilustra bien el hecho de que el *enfoque contable* de la descomponibilidad, representado por la utilización de medias aritméticas como medias representativas de los grupos de la población, puede no ser aplicable en algunos casos.[122] Más adelante volveremos sobre esta cuestión.

La idea de usar valores de renta representativa distintos de la media aritmética aparece también en el contexto de los índices normativos de desigualdad. En particular, Blackorby, Donaldson y Ausberg (1981) parten de la noción de *renta igualitaria equivalente* de Atkinson (1970) a la hora de analizar la distribución intergrupos, ξ_g, lo que permite enmarcar el análisis de la descomponibilidad en el contexto del bienestar social. Sin embargo su descomposición no es exacta, es decir, no genera una descomposición entre dos únicos componentes independientes, intragrupos e intergrupos.[123]

Por un argumento similar la *varianza logarítmica,*

$$LV = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\log y_i - \log \mu\right)^2$$

tampoco resulta descomponible aditivamente en la forma indicada por (6.1). Puesto que *LV* no es una verdadera varianza, en el sentido que las desviaciones de log y_i no se miden respecto a su media, la descomposición ANOVA depende del valor respecto al cual midamos las desviaciones de log y_i^g para cada uno de los grupos. Veámoslo.

[122] Obsérvese que no existe una forma funcional que relacione la media aritmética con la media geométrica, y que con generalidad lo único que podemos decir es que $\tilde{\mu} \leq \mu$, tal y como ya observamos en el capítulo 4.

[123] Foster y Shneyerov (1999, 2000) exploran descomposiciones aditivas exactas a partir de una renta representativa de los grupos de la población potencialmente diferente de la media aritmética, y en la que las medias generalizadas que introdujimos en el capítulo 4 juegan un papel preponderante. Estas descomposiciones aparecerán más adelante en este capítulo y el siguiente.

Si medimos las desviaciones de $\log y_i^g$ respecto al logaritmo de la media aritmética del grupo, $\log \mu_g$, como parecería natural en este caso, entonces el componente intragrupos es una media ponderada de las varianzas logarítmicas de cada grupo,

$$LV_W = \sum_{g=1}^{G} \frac{n_g}{n} LV_g = \sum_{g=1}^{G} \frac{n_g}{n} \sum_{i=1}^{n_g} \frac{1}{n_g} \left(\log y_i^g - \log \mu_g \right)^2$$

donde las ponderaciones reflejan de nuevo la importancia demográfica de los grupos. Por su parte, obtenemos un componente intergrupos consistente con la descomposición (6.1),

$$LV_B = \sum_{g=1}^{G} \frac{n_g}{n} \left(\log \mu_g - \log \mu \right)^2$$

Sin embargo, en este caso el producto cruzado en la descomposición ANOVA no se anula, por lo que no obtenemos una descomposición exacta entre dos únicos componentes.

Para obtener una descomposición exacta entre dos únicos componentes podemos medir las desviaciones de $\log y_i^g$, para cada uno de los grupos, respecto a $\log \tilde{\mu}_g$, tal y como hace la varianza de los logaritmos, *VL*. En este caso el producto cruzado en la descomposición ANOVA se anula, pero el componente intragrupos resulta coincidente con el que aparece en la descomposición de *VL*,

$$LV_W^* = \sum_{g=1}^{G} \frac{n_g}{n} VL_g = \sum_{g=1}^{G} \frac{n_g}{n} \sum_{i=1}^{n_g} \frac{1}{n_g} \left(\log y_i^g - \log \tilde{\mu}_g \right)^2$$

lo que no es consistente con la definición de descomponibilidad recogida en (6.1). Y además el componente intergrupos asigna de nuevo a cada individuo la renta media geométrica del grupo al que pertenece, $\tilde{\mu}_g$.

$$LV_B^* = \sum_{g=1}^{G} \frac{n_g}{n} \left(\log \tilde{\mu}_g - \log \mu \right)^2$$

lo que, como ya hemos observado, tampoco es consistente con la definición de descomponibilidad recogida en (6.1).

6.4. Descomponibilidad de los índices de Theil y de los índices de entropía generalizados

6.4.1. Índices de Theil

Los dos índices de Theil, que analizamos en el capítulo 3, son aditivamente descomponibles en el sentido que hemos definido, además de cumplir con el resto de propiedades deseables mencionadas en el capítulo 1.

El primer índice de Theil (1967), $T = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{y_i}{\mu}\log\frac{y_i}{\mu}$, puede descomponerse aditivamente como sigue:

$$\begin{aligned}
T &= \frac{1}{n}\sum_{g=1}^{G}\sum_{i=1}^{n_g}\frac{y_i^g}{\mu}\log\frac{y_i^g}{\mu} \\
&= \sum_{g=1}^{G}\sum_{i=1}^{n_g}\frac{y_i^g}{n\mu}\log\frac{y_i^g}{\mu_g}\frac{\mu_g}{\mu} \\
&= \sum_{g=1}^{G}\sum_{i=1}^{n_g}\frac{y_i^g}{n\mu}\left(\log\frac{y_i^g}{\mu_g}+\log\frac{\mu_g}{\mu}\right) \\
&= \sum_{g=1}^{G}\left[\sum_{i=1}^{n_g}\frac{y_i^g}{n\mu}\log\frac{y_i^g}{\mu_g}+\sum_{i=1}^{n_g}\frac{y_i^g}{n\mu}\log\frac{\mu_g}{\mu}\right] \\
&= \sum_{g=1}^{G}\frac{n_g\mu_g}{n\mu}\underbrace{\sum_{i=1}^{n_g}\frac{y_i^g}{n_g\mu_g}\log\frac{y_i^g}{\mu_g}}_{T^g}+\sum_{g=1}^{G}\frac{n_g\mu_g}{n\mu}\log\frac{\mu_g}{\mu}
\end{aligned}$$

El primer término de la expresión final de este desarrollo nos da la suma ponderada de los índices T dentro de los grupos. El componente intragrupos de la descomposición (6.1), que pondera la dispersión dentro de cada uno de los grupos por su proporción de renta dentro del total,

$$\frac{n_g\mu_g}{n\mu} = \frac{\Sigma_{i=1}^{n_g}y_i^g}{\Sigma_{i=1}^{n}y_i}$$

Obsérvese cómo en este caso las ponderaciones suman la unidad y también que damos más peso a los grupos con mayores rentas.

El segundo término de la expresión anterior no es más que el índice T aplicado a las medias de cada grupo, es decir el índice T entre los grupos. Este es el componente intergrupos de la descomposición (6.1).

De aquí,

$$T = \sum_{g=1}^{G} \frac{n_g \mu_g}{n\mu} T^g + \sum_{g=1}^{G} \frac{n_g \mu_g}{n\mu} \log \frac{\mu_g}{\mu} \qquad (6.4)$$

La ecuación (6.4) nos da la descomposición del índice de Theil T en dos términos: la desigualdad entre grupos y la desigualdad dentro de los grupos.

Por tanto, si llamamos

1) $T_W = \sum_{g=1}^{G} \frac{n_g \mu_g}{n\mu} T^g$, y

2) $T_B = \sum_{g=1}^{G} \frac{n_g \mu_g}{n\mu} \log \frac{\mu_g}{\mu}$

podemos escribir $T = T_W + T_B$.

El segundo índice de Theil (1967), $T^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \log \frac{\mu}{y_i}$, se descompone como,

$$\begin{aligned} T^* &= \frac{1}{n} \sum_{g=1}^{G} \sum_{i=1}^{n_g} \log \frac{\mu}{y_i^g} \\ &= \sum_{g=1}^{G} \sum_{i=1}^{n_g} \frac{1}{n} \log \frac{\mu_g}{y_i^g} \frac{\mu}{\mu_g} \\ &= \sum_{g=1}^{G} \sum_{i=1}^{n_g} \frac{1}{n} \left(\log \frac{\mu_g}{y_i^g} + \log \frac{\mu}{\mu_g} \right) \\ &= \sum_{g=1}^{G} \frac{n_g}{n} \left[\frac{1}{n_g} \sum_{i=1}^{n_g} \log \frac{\mu_g}{y_i^g} + \log \frac{\mu}{\mu_g} \right] \\ &= \sum_{g=1}^{G} \frac{n_g}{n} \underbrace{\frac{1}{n_g} \sum_{i=1}^{n_g} \log \frac{\mu_g}{y_i^g}}_{T^{*g}} + \sum_{g=1}^{G} \frac{n_g}{n} \log \frac{\mu}{\mu_g} \end{aligned}$$

A partir de aquí, y al igual que en el caso anterior, el primer término de la expresión final de este desarrollo nos da la suma ponderada de los índices T^* dentro de los grupos. El componente intragrupos de la descomposición (6.1), que pondera la dispersión dentro de cada uno de los grupos por su proporción de población dentro del total, n_g/n. Obsérvese de nuevo cómo en este caso las ponderaciones suman la unidad.

El segundo término de la expresión anterior no es más que el índice T^* aplicado a las medias de cada grupo, es decir el índice T^* entre los grupos. Este es el componente intergrupos de la descomposición (6.1).[124]

De aquí,

$$T^* = \sum_{g=1}^{G} \frac{n_g}{n} T^{*g} + \sum_{g=1}^{G} \frac{n_g}{n} \log \frac{\mu}{\mu_g} \qquad (6.5)$$

La ecuación (6.5) nos da la descomposición del segundo índice de Theil T^* en dos términos: la desigualdad entre grupos y la desigualdad dentro de los grupos.

Por tanto, si llamamos

1) $T_W^* = \sum_{g=1}^{G} \frac{n_g}{n} T^{*g}$, y

2) $T_B^* = \sum_{g=1}^{G} \frac{n_g}{n} \log \frac{\mu}{\mu_g}$

podemos escribir $T^* = T_W^* + T_B^*$.

La facilidad en la descomposición de los índices T y T^* fue aprovechada por Theil (1979a, 1979b, 1989) en una serie de trabajos, iniciando así una avalancha de aplicaciones prácticas en este tipo de análisis.

6.4.2. Índices de entropía generalizados

Así pues, solo algunos de los índices que hemos examinado en los capítulos 2, 3 y 4 son aditivamente descomponibles en el sentido definido por la propiedad (1.7), y que aquí describe la ecuación (6.1). Ya habíamos comentado que ni el índice de Gini, ni la familia de índices de desigualdad de Atkinson (1970) eran descomponibles en este sentido. La cuestión es saber si existe una familia de índices de desigualdad que verifique esta forma de descomposición y, en caso afirmativo, cómo son los coeficientes $\omega_g^G(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{n})$ de la misma.

---

[124] Recordemos que existe una relación entre *VL*, *LV* y T^*, que viene dada por $LV = VL + T^{*2}$, lo que muestra de nuevo porque *LV* no es descomponible en el sentido recogido en (6.1).

Este problema fue resuelto por Shorrocks (1980), quien estableció una correspondencia directa entre la forma de la descomposición (6.1) y la familia de índices de entropía generalizados derivada en el capítulo 3, I_θ. De hecho, Shorrocks (1980) derivó esta familia a partir de la imposición de la descomponibilidad aditiva, (6.1), en lugar de a partir de la generalización del logaritmo como función de información, tal y como examinamos en el capítulo 3.

En concreto Shorrocks (1980) mostró que, para $n \geq 2$, bajo las propiedades (1.1), (1.2), (1.5*) y (1.7), se cumple que:

1) Existe un conjunto de funciones $\theta(\mu, n)$, que son positivas y continuas, tal que

$$\omega_g^G(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{n}) = \frac{\theta(\mu_g, n_g)}{\theta(\mu, n)}$$

Por tanto los coeficientes del componente intragrupos son todos positivos, aunque su suma no está restringida (Shorrocks 1980, teorema 1).

2) Un índice de desigualdad, $I(n,\mathbf{y})$, puede escribirse entonces como

$$I(n, \mathbf{y}) = \frac{1}{\theta(\mu, n)} \sum_{i=1}^{n} \left[\phi(y_i) - \phi(\mu) \right] \qquad (6.6)$$[125]

donde $\phi'(\mu)$ es continua y $\varphi(\cdot)$ es estrictamente convexa (Shorrocks 1980, teorema 2).

Adicionalmente Shorrocks (1980, teorema 3) muestra que todos los índices de la forma (6.6) satisfacen el principio de las transferencias de Pigou-Dalton, propiedad (1.4). Y finalmente muestra que si adicionalmente imponemos los requisitos del principio de réplica de las poblaciones, propiedad (1.3), y la independencia de la escala (homogeneidad de grado cero en rentas), propiedad (1.6), entonces obtenemos el teorema (1.1), que reproducimos aquí de nuevo.

---

[125] Este resultado funciona en las dos direcciones de forma que $I(n,\mathbf{y})$ satisface las propiedades (1.1), (1.2), (1.5*) y (1.7), si y solo si, puede escribirse en la forma (6.6).

Teorema (1.1)

Una función $I : \Im \mapsto \mathbb{R}$ verifica las propiedades (1.1), (1.2), (1.3), (1.4), (1.5*), (1.6) y (1.7), si y solo si, es de la forma:

$$I_\theta(n, \mathbf{y}) = \frac{1}{n}\frac{1}{\theta(\theta-1)}\sum_{i=1}^{n}\left[\left(\frac{y_i}{\mu}\right)^\theta - 1\right]$$

o bien una transformación proporcional creciente de esta función, $\alpha I_\theta(n, \mathbf{y})$ con $\alpha > 0$, y donde θ es un parámetro real que puede tomar cualquier valor, positivo, cero o negativo.

Demostración

Véase Shorrocks (1980), sección 6, teorema 5.

De esta forma cualquier índice de entropía generalizado,

$$I_\theta(n, \mathbf{y}) = \frac{1}{n}\frac{1}{\theta(\theta-1)}\sum_{i=1}^{n}\left[\left(\frac{y_i}{\mu}\right)^\theta - 1\right]$$

para $\theta \neq 0,1$,[126] puede descomponerse de la siguiente forma,

$$\begin{aligned}
I_\theta(n, \mathbf{y}) &= \frac{1}{n}\frac{1}{\theta(\theta-1)}\sum_{g=1}^{G}\sum_{i=1}^{n_g}\left[\left(\frac{y_i^g}{\mu}\right)^\theta - 1\right] \\
&= \frac{1}{\theta(\theta-1)}\sum_{g=1}^{G}\frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^{n_g}\left(\frac{y_i^g}{\mu}\right)^\theta - n_g\right] \\
&= \frac{1}{\theta(\theta-1)}\sum_{g=1}^{G}\frac{n_g}{n}\left[\sum_{i=1}^{n_g}\frac{1}{n_g}\left(\frac{y_i^g}{\mu_g}\frac{\mu_g}{\mu}\right)^\theta - 1\right] \\
&= \frac{1}{\theta(\theta-1)}\sum_{g=1}^{G}\frac{n_g}{n}\left(\frac{\mu_g}{\mu}\right)^\theta\left[\sum_{i=1}^{n_g}\frac{1}{n_g}\left(\frac{y_i^g}{\mu_g}\right)^\theta - \left(\frac{\mu}{\mu_g}\right)^\theta\right] \\
&= \frac{1}{\theta(\theta-1)}\sum_{g=1}^{G}\frac{n_g}{n}\left(\frac{\mu_g}{\mu}\right)^\theta\left[\sum_{i=1}^{n_g}\frac{1}{n_g}\left(\frac{y_i^g}{\mu_g}\right)^\theta - \frac{n_g}{n_g} + 1 - \left(\frac{\mu}{\mu_g}\right)^\theta\right]
\end{aligned}$$

[126] Los casos $\theta = 0$ y $\theta = 1$ se corresponden con los índices de Theil (1967), cuya descomposición ya hemos examinado.

$$=\frac{1}{\theta(\theta-1)}\sum_{g=1}^{G}\frac{n_g}{n}\left(\frac{\mu_g}{\mu}\right)^{\theta}\left[\frac{1}{n_g}\sum_{i=1}^{n_g}\left[\left(\frac{y_i^g}{\mu_g}\right)^{\theta}-1\right]+1-\left(\frac{\mu}{\mu_g}\right)^{\theta}\right]$$

$$=\sum_{g=1}^{G}\frac{n_g}{n}\left(\frac{\mu_g}{\mu}\right)^{\theta}\underbrace{\frac{1}{n_g}\frac{1}{\theta(\theta-1)}\sum_{i=1}^{n_g}\left[\left(\frac{y_i^g}{\mu_g}\right)^{\theta}-1\right]}_{I_\theta^g}$$

$$+\frac{1}{\theta(\theta-1)}\sum_{g=1}^{G}\frac{n_g}{n}\left[\left(\frac{\mu_g}{\mu}\right)^{\theta}-1\right]$$

Al igual que en los casos anteriores el primer término de la expresión final de este desarrollo nos da la suma ponderada de los índices I_θ dentro de los grupos. El componente intragrupos en la descomposición (6.1). Los pesos en esta suma vienen dados por

$$\omega_g^G(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{n})=\frac{n_g}{n}\left(\frac{\mu_g}{\mu}\right)^{\theta} \tag{6.7}$$

que dependen de esta forma del parámetro de valoración social θ, que recogía la sensibilidad del índice I_θ ante transferencias entre ricos y pobres en función de en que parte de la distribución se realicen dichas transferencias.

Es interesante observar cómo estos pesos pueden escribirse en función de las proporciones de población y de renta de cada uno de los grupos,

$$\omega_g^G(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{n})=\frac{n_g}{n}\left(\frac{\mu_g}{\mu}\right)^{\theta}=\left(\frac{n_g}{n}\right)^{1-\theta}\left(\frac{n_g\mu_g}{n\mu}\right)^{\theta} \tag{6.8}$$

Lo que permite observar claramente cómo las ponderaciones suman la unidad solo en dos casos, θ = 1 y θ = 0, que se corresponden con las descomposiciones de los dos índices de Theil (1967), *T*, (6.4), y *T**, (6.5), que ya hemos examinado.

Así pues, salvo en el caso θ = 0, los pesos del componente intragrupos ajustan las ponderaciones demográficas, n_g/n, por un término que mide la renta media relativa del grupo en cuestión, respecto a la media del total de la población, y cuya importancia final viene gobernada por el parámetro θ,

$$\left(\frac{\mu_g}{\mu}\right)^{\theta}$$

El segundo término de la expresión anterior no es más que el índice I_θ aplicado a las medias de cada grupo, es decir, el índice I_θ entre los grupos. Este es el componente intergrupos de la descomposición (6.1).

De aquí,

$$I_\theta(n,\mathbf{y}) = \sum_{g=1}^{G} \frac{n_g}{n}\left(\frac{\mu_g}{\mu}\right)^{\theta} I_\theta^g + \frac{1}{\theta(\theta-1)} \sum_{g=1}^{G} \frac{n_g}{n}\left[\left(\frac{\mu_g}{\mu}\right)^{\theta} - 1\right] \qquad (6.9)$$

La ecuación (6.9) nos da la descomposición de los índices de entropía generalizados en dos términos: la desigualdad entre grupos y la desigualdad dentro de los grupos.

Por tanto, si llamamos

1) $I_{\theta,W} = \sum_{g=1}^{G} \frac{n_g}{n}\left(\frac{\mu_g}{\mu}\right)^{\theta} I_\theta^g$, y

2) $I_{\theta,B} = \frac{1}{\theta(\theta-1)} \sum_{g=1}^{G} \frac{n_g}{n}\left[\left(\frac{\mu_g}{\mu}\right)^{\theta} - 1\right]$

podemos escribir $I_\theta = I_{\theta,W} + I_{\theta,B}$.

Este desarrollo muestra la parte «si» del teorema (1.1). La parte «solo si», es decir, el hecho de que solo los índices de entropía generalizados verifican la descomponibilidad aditiva definida por (6.1), además del resto de propiedades, es notablemente más compleja de demostrar y se basa en el análisis funcional (Aczél 1966; Aczél y Dhombres 1989).

La descomponibilidad aditiva definida por (6.1) es una propiedad intuitiva que resulta muy útil para abordar ciertos problemas distributivos, al menos desde un punto de vista del análisis político. La *aditividad* implica que es posible descomponer la desigualdad de la sociedad como una suma exacta de componentes que reflejan la desigualdad entre los grupos y las desigualdades dentro de los grupos. Además, el uso de medias aritméticas como indicadores de renta representativa de los grupos facilita la interpretación en términos de transferencias.

6.5. Una reconsideración de la descomponibilidad aditiva

De la discusión anterior se deduce que los índices T y T^* son los únicos capaces de satisfacer, además de las propiedades generales enunciadas, la restricción adicional de que el componente intragrupos sea una media ponderada de los índices de desigualdad dentro de los grupos. Es decir, introducir en la definición (6.1) la condición de que $\Sigma_{g=1}^{G}\omega_g^G(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{n})=1$, prácticamente equivale a determinar los índices T y T^* que son, efectivamente, los más utilizados en la práctica. En este caso, los índices dentro de cada uno de los grupos deben ponderarse por sus participaciones de renta o de población dentro del total. Consecuentemente, con esta *aproximación contable* a la descomponibilidad es posible determinar con precisión la importancia porcentual de cada grupo dentro del componente intragrupos.

¿Puede parecer razonable exigir que el componente intragrupos, $\Sigma_{g=1}^{G}\omega_g^G(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{n})I_\theta^g$, sea una media ponderada de la desigualdad entre los diferentes grupos? En principio cabría pensar que, excepto por el carácter más intuitivo de este tipo de coeficientes, no hay realmente ninguna razón a priori para exigir esta propiedad. Sin embargo, ya Theil (1967) observó que, cuando $\Sigma_{g=1}^{G}\omega_g^G(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{n})\neq 1$, el término $1-\Sigma_{g=1}^{G}\omega_g^G(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{n})$ es proporcional al componente intergrupos en la descomposición (6.9). En consecuencia, al margen de los dos casos analizados por Theil (1967), $\theta=1$ y $\theta=0$, los pesos en la descomposición (6.1) no son independientes del componente intergrupos. Hay pues buenas razones para considerar esta restricción.

La propiedad de descomponibilidad aditiva (6.1) impone restricciones muy importantes sobre los índices de desigualdad que debemos considerar, especialmente si imponemos la condición adicional de que los pesos en el componente intragrupos deben sumar la unidad. Pero en realidad el problema de asignar de forma consistente la desigualdad a los diferentes grupos que integran la población es más general. La literatura más reciente sobre este tema se ha ocupado de analizar otros tipos de descomponibilidad. Dedicamos lo que resta de este capítulo y el siguiente a presentar algunos de estos desarrollos.

Con objeto de entender adecuadamente la naturaleza de estas generalizaciones de la descomponibilidad aditiva, conviene examinar con cierto detalle una cuestión de interpretación. Así podremos clarificar algunas preguntas de relevancia práctica sobre qué podemos decir y qué no, cuando descomponemos un determinado índice de desigualdad.

Para centrar el tema imaginemos que estamos analizando la distribución de la renta desde el punto de vista del género. Mujeres y hombres son, pues, los dos subgrupos de población que constituyen la sociedad de referencia. Considérese entonces la siguiente pregunta: «¿Cuánta desigualdad en la distribución de la renta es posible atribuir a las diferencias de género entre los individuos?» (Shorrocks 1980; Anand 1983). Esta pregunta, aparentemente clara, puede ser interpretada en diferentes direcciones. Las dos más obvias son las siguientes:[127]

1) ¿Cuánta desigualdad observaríamos si las diferencias de sexo entre los individuos fueran el único origen de las diferencias en la distribución de la renta?
2) ¿En cuánto disminuiría la desigualdad global si las diferencias en la distribución de la renta asociadas al sexo fueran eliminadas?

La primera interpretación sugiere comparar el nivel global de desigualdad con el que observaríamos si la desigualdad fuera nula dentro de cada grupo de la población total, pero se mantuvieran las diferencias en términos de renta per cápita media entre los sexos. Para índices aditivamente descomponibles en el sentido definido por (6.1), esto anula el componente intragrupos y deja solo el componente intergrupos en la descomposición, $I(n, \mu_1 \iota_{n_1}, \ldots, \mu_G \iota_{n_G})$.

Así pues, un proceso de redistribución interna dentro de cada grupo anula el componente intragrupos, puesto que $I(n_g, \mathbf{y}^g) = 0$, $\forall g$. Este proceso no afecta ni a los pesos, $\omega_g^G(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{n})$, ni al componente intergrupos, $I(n, \mu_1 \iota_{n_1}, \ldots, \mu_G \iota_{n_G})$, puesto que ni la población, ni

[127] Potenciales ambigüedades en problemas de descomposición son examinadas adicionalmente en Davies y Shorrocks (1978).

las medias de cada grupo se ven afectados por estas transferencias internas. La desigualdad observada tras el proceso redistributivo se corresponde con la desigualdad en una *distribución suavizada,* en la que a cada individuo se le asigna la renta media del grupo al que pertenece.

La segunda interpretación sugiere comparar el nivel global de desigualdad con el que observaríamos si las rentas medias de cada grupo, clasificado por sexo, fueran idénticas, pero la desigualdad dentro de cada grupo se mantuviera intacta. Para índices aditivamente descomponibles en el sentido definido por (6.1), esto anula el componente intergrupos, $I(n, \mu_1 \iota_{n_1}, \ldots, \mu_G \iota_{n_G}) = 0$ y deja intactos los índices de cada uno de los grupos, $I(n_g, \mathbf{y}^g)$. Sin embargo la reducción en la desigualdad global no viene dada solo por $I(n, \mu_1 \iota_{n_1}, \ldots, \mu_G \iota_{n_G})$, ya que el proceso de igualación de medias entre grupos altera los pesos $\omega_g^G(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{n})$ y, en consecuencia, el componente intragrupos.

Así pues, este experimento conceptual implica un proceso de transferencias entre grupos hasta igualar sus medias, lo que anula el componente intergrupos, $I(n, \mu_1 \iota_{n_1}, \ldots, \mu_G \iota_{n_G}) = 0$, al tiempo que se escalan proporcionalmente las rentas individuales de cada grupo para mantener la desigualdad, dentro del mismo, intacta. De esta forma, la desigualdad observada tras este proceso redistributivo se corresponde con la desigualdad de una *distribución estandarizada,* en la que la renta de cada individuo se ha visto escalada por un factor tal, que la media del grupo al que pertenece coincide con la media global de la población (Love y Wolfson 1976).

Este mecanismo, sin embargo, afecta a los pesos, $\omega_g^G(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{n})$, siempre y cuando estos dependan de las medias de los diferentes grupos, lo que hace que la reducción en la desigualdad no coincida con el valor del componente intergrupos. Solo cuando los pesos no dependen de las medias de los diferentes grupos, y recogen solo la importancia demográfica, entonces las respuestas a las dos interpretaciones coinciden.

Recuérdese que en el caso de los índices de entropía generalizada solo cuando $\theta = 0$, es decir T^*, se verifica que los pesos del componente intragrupos son estrictamente demográficos y, por tanto, solo este índice proporcionaría una respuesta numérica idéntica a las dos interpretaciones anteriores.

Este argumento apoyaría la utilización de ponderaciones demográficas en la descomposición de la desigualdad por subgrupos de población (Shorrocks 1980). Obsérvese que el argumento anterior a favor de la utilización de T^*, $\theta = 0$, descansa en buscar una descomposición tal que, las ponderaciones utilizadas para obtener el componente intragrupos, $\omega_g^G(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{n})$, sean independientes del procedimiento utilizado para eliminar la desigualdad entre grupos, es decir del procedimiento utilizado para hacer nulo el término $I(n, \mu_1 \iota_{n_1}, \ldots, \mu_G \iota_{n_G})$ en (6.1).[128]

6.6. Descomponibilidad (aditiva) independiente del camino

El argumento que acabamos de esgrimir sugiere una forma alternativa de enfocar el problema de la descomponibilidad.

El punto de partida es la consideración de un cierto nivel de *renta representativa,* $\kappa(\mathbf{y})$, para una distribución de renta dada. Este nivel puede corresponderse con la media aritmética, μ, que constituye el caso más simple, con la media geométrica o, como sucede por ejemplo en el trabajo de Atkinson (1970), con la *renta igualitaria equivalente,* ξ (que bajo los supuestos adoptados sobre la función de utilidad, (4.7), terminaba siendo una media generalizada de orden $1 - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$). Más generalmente podemos considerar la existencia de una función $\kappa : \Im \mapsto \mathbb{R}_{++}$, tal que, para cualquier distribución de renta, F, nos proporcione un valor representativo del nivel de prosperidad asociado a dicha distribución.

Supongamos que esta función, $\kappa(\mathbf{y})$, verifica las siguientes propiedades:

[128] En nuestro ejemplo hemos supuesto que dicho procedimiento requiere de un mecanismo de transferencias de renta entre grupos y son estas transferencias las que alteran $\omega_g^G(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{n})$, a menos que dichas ponderaciones sean independientes de $\boldsymbol{\mu}$. Si hubiéramos supuesto que es factible la movilidad de individuos entre los grupos, entonces podríamos haber llegado a otra conclusión sobre que valor de θ hace que las respuestas a las dos interpretaciones coincidan. Sin embargo, no permitimos el cambio de género por el momento.

— *Simetría:* si permutamos las rentas, el valor del nivel de renta representativo no se altera.
— *Principio de réplica de las poblaciones:* la unión de poblaciones idénticas no altera el valor del nivel de renta representativo.
— *Monotonía:* la función $\kappa(\mathbf{y})$ es monótona, es decir, $\mathbf{y} > \mathbf{y}' \quad \Rightarrow \quad \kappa(\mathbf{y}) > \kappa(\mathbf{y}')$.[129]
— *Homogeneidad de grado uno:* $\forall\lambda > 0$, se verifica que $\kappa(\lambda\mathbf{y}) = \lambda\kappa(\mathbf{y})$.
— *Normalización:* bajo completa igualdad, la renta de cualquier individuo coincide con el nivel de renta representativa, es decir si $y_i = \mu \quad \forall\, i$, entonces $\kappa(\mathbf{y}) = \mu$.
— *Continuidad:* la función $\kappa(\mathbf{y})$ es continua en $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n_{++}$.

Todas estas propiedades resultan naturales en nuestro contexto y son satisfechas por la media aritmética, μ, por la media geométrica, $\tilde{\mu}$, y también por las medias generalizadas, o de orden α, μ_α, introducidas en el capítulo 4, con excepción de los valores extremos, $\alpha \to \pm\infty$, ya que en este caso obtendríamos como niveles representativos la renta máxima, y_n, o la renta mínima, y_1, de la distribución, y no se verifica la propiedad de monotonía. Obsérvese que, por el mismo motivo, la mediana, $Q(0{,}5)$, o cualquier otro cuantil de la distribución, $Q(p)$, no es candidato a constituir un nivel representativo del nivel de prosperidad asociado a una distribución bajo las propiedades exigidas a $\kappa(\mathbf{y})$.

Así pues, para una función dada $\kappa(\mathbf{y})$, definimos la desigualdad intergrupos, I_B, como el nivel de desigualdad que obtendríamos a partir de una distribución suavizada, en la que a cada individuo se le asigna la renta representativa del grupo al que pertenece, $\kappa_g(\mathbf{y}^g)$. Por tanto,[130]

$$I_B = I\left(n, \kappa_1(\mathbf{y}^1)\iota_{n_1}, \ldots, \kappa_G(\mathbf{y}^G)\iota_{n_G}\right) \tag{6.10}$$

[129] La desigualdad $\mathbf{y} > \mathbf{y}'$, debe entenderse en un sentido vectorial, es decir, al menos algún elemento de $\mathbf{y}$ debe ser estrictamente mayor que el correspondiente elemento de $\mathbf{y}'$, mientras que el resto no debe ser menor, por tanto $y_i \geq y_i'$, con desigualdad estricta al menos para algún i.

[130] La definición de la distribución suavizada, $(\kappa_1\iota_{n_1}, \ldots, \kappa_G\iota_{n_G})$, hace uso implícito de la propiedad de normalización.

Por su parte, definimos la desigualdad intragrupos, I_W, como el nivel de desigualdad que obtendríamos a partir de una distribución estandarizada, en la que la distribución de cada grupo es escalada de forma que el nivel de renta representativo del grupo coincida con el nivel de renta representativo del total de la población, $\kappa_g = \kappa$, $\forall g$. En consecuencia, la distribución de renta del grupo g, $\mathbf{y}^g = (y_1^g, y_2^g, \ldots, y_{n_g}^g)$, deberá ser multiplicada por el factor κ/κ_g. Por tanto,[131]

$$I_W = I\left(n, \kappa(\mathbf{y})\left(\frac{1}{\kappa_1(\mathbf{y}^1)}\mathbf{y}^1, \ldots, \frac{1}{\kappa_G(\mathbf{y}^G)}\mathbf{y}^G\right)\right) \tag{6.11}$$

Ambos componentes, (6.10) y (6.11), pueden ser utilizados de forma independiente como base para la descomposición de la desigualdad global en los componentes intragrupos e intergrupos. La descomponibilidad (aditiva) independiente del camino exige que ambos componentes sean consistentes, de forma que sumen la desigualdad global (Shorrocks 1999; Foster y Shneyerov 2000).

Propiedad (6.1): Descomponibilidad aditiva independiente del camino

Dada una sociedad N compuesta por G subgrupos de población, exhaustivos y mutuamente excluyentes, existe una función representativa del nivel de renta de la población, $\kappa(\mathbf{y})$, tal que:

$$I(n, \mathbf{y}) = I\left(n, \kappa(\mathbf{y})\left(\frac{1}{\kappa_1(\mathbf{y}^1)}\mathbf{y}^1, \ldots, \frac{1}{\kappa_G(\mathbf{y}^G)}\mathbf{y}^G\right)\right) + I\left(n, \kappa_1(\mathbf{y}^1)\iota_{n_1}, \ldots, \kappa_G(\mathbf{y}^G)\iota_{n_G}\right)$$

La propiedad (6.1) puede ser entendida de la siguiente forma. Podemos pasar de la distribución actual, $\mathbf{y}$, a la situación de igualdad perfecta, mediante dos caminos alternativos, que implican en

[131] La definición de la distribución estandarizada,

$$\left(\frac{\kappa}{\kappa_1}\mathbf{y}^1, \ldots, \frac{\kappa}{\kappa_G}\mathbf{y}^G\right)$$

hace uso implícito de la propiedad de homogeneidad de grado uno en rentas.

cada caso una distribución intermedia, la distribución suavizada y la distribución estandarizada respectivamente:

1) A lo largo del primer camino asignamos a cada individuo la renta representativa del grupo al que pertenece, lo que genera un nivel de desigualdad $I_B = I(n, \kappa_1 \iota_{n_1}, \ldots, \kappa_G \iota_{n_G})$, y en consecuencia, la contribución a la desigualdad global del componente intragrupos viene dada por $I_{W'} = I(n, \mathbf{y}) - I_B$.
2) A lo largo del segundo camino estandarizamos la distribución de cada grupo de forma que el nivel de renta representativo del grupo coincida con el nivel de renta representativo del total de la población, lo que genera un nivel de desigualdad

$$I_W = I\left[n, \kappa\left(\left(1/\kappa_1\right)\mathbf{y}^1, \ldots, \left(1/\kappa_G\right)\mathbf{y}^G\right)\right]$$

y en consecuencia la contribución a la desigualdad global del componente intergrupos viene dada por

$$I_{B'} = I(n, \mathbf{y}) - I_W$$

Aunque ambos caminos pueden ser razonables para medir las contribuciones de los componentes intragrupos e intergrupos la propiedad (6.1) exige que $I_{W'} = I_W$ y $I_{B'} = I_B$. Por lo tanto *independencia del camino* es equivalente a la independencia de los componentes intragrupos e intergrupos. El esquema 6.1 ilustra esta situación.

ESQUEMA 6.1: Descomposición de la desigualdad independiente del camino

$$I_B = I\left(n, \kappa_1(\mathbf{y}^1)\iota_{n_1}, \ldots, \kappa_G(\mathbf{y}^G)\iota_{n_G}\right)$$

$$I_{W'} = I(n, \mathbf{y}) - I_B$$

$$I(n, \mathbf{y}) \qquad\qquad I(n, \mu\iota_n) = 0$$

$$I_W = I\left\{n, \kappa(\mathbf{y})\left[\frac{1}{\kappa_1(\mathbf{y}^1)}\mathbf{y}^1, \ldots, \frac{1}{\kappa_G(\mathbf{y}^G)}\mathbf{y}^G\right]\right\}$$

$$I_{B'} = I(n, \mathbf{y}) - I_W$$

$$\boxed{\text{Propiedad (7.1)} \;\Rightarrow\; \begin{cases} I_{W'} = I_W \\ I_{B'} = I_B \end{cases}}$$

Fuente: Elaboración propia.

Foster y Shneyerov (2000) demostraron dos resultados interesantes en este contexto, bajo las propiedades (1.1), (1.2), (1.3), (1.5) y (1.6) se cumple que:

1) Los índices de desigualdad que cumplen la propiedad (6.1) tienen un componente intragrupos que es una suma ponderada de los índices de desigualdad dentro de cada uno de los grupos, y donde la ponderaciones reflejan la importancia demográfica del grupo, es decir, podemos escribir (6.11) como (Foster y Shneyerov 2000, proposición 1):

$$I_W = \sum_{g=1}^{G} \frac{n_g}{n} I(n, \mathbf{y}^g) \tag{6.12}$$

2) Las únicas funciones representativas del nivel de prosperidad de la sociedad, $\kappa(\mathbf{y})$, consistentes con la propiedad (6.1), son las medias de orden α, μ_α, introducidas en el capítulo 4, por tanto (Foster y Shneyerov 2000, proposición 2),

$$\kappa(\mathbf{y}) = \mu_\alpha(\mathbf{y}) = \left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i^\alpha\right]^{\frac{1}{\alpha}} \qquad -\infty < \alpha < +\infty \tag{6.13}$$

Estos dos resultados nos permiten reformular la propiedad (6.1) de la siguiente forma:

Propiedad (6.1'): Descomponibilidad aditiva independiente del camino

Dada una sociedad N compuesta por G subgrupos de población, exhaustivos y mutuamente excluyentes, se cumple que:

$$I(n, \mathbf{y}) = \sum_{g=1}^{G} \frac{n_g}{n} I(n_g, \mathbf{y}^g) + I\left(n, \mu_{\alpha,1}\iota_{n_1}, \ldots, \mu_{\alpha,G}\iota_{n_G}\right)$$

Ya hemos observado cómo $I_0 = T^*$ es el único miembro de la familia de índices de entropía generalizada que verifica la propiedad (6.1'), lo que corresponde al caso $\alpha = 1$. Además, la descomposición ANOVA aplicada a *VL* nos permitió observar que este índice era descomponible utilizando como renta representativa la media geométrica, $\tilde{\mu}$, que se corresponde con el caso $\alpha = 0$. La cuestión, al igual que en lo referente a la propiedad (1.7), es determinar qué otros índices cumplen esta propiedad.

Foster y Shneyerov (2000) demostraron el siguiente resultado:

Teorema (6.1)

Una función $I:\Im \mapsto \mathbb{R}$ verifica las propiedades (1.1), (1.2), (1.3), (1.5), (1.6) y (6.1)', si y solo si, es de la forma:

$$P_\alpha(n,\mathbf{y}) = \begin{cases} \frac{1}{2}VL(\mathbf{y}) & \alpha = 0 \\ \frac{1}{\alpha}\log\frac{\mu_\alpha}{\tilde{\mu}} & \alpha \neq 0 \end{cases}$$

o bien una transformación proporcional creciente de esta función, $\phi P_\alpha(n,\mathbf{y})$ con $\phi > 0$, y donde α es un parámetro real que puede tomar cualquier valor, positivo, cero o negativo.[132]

Demostración

Véase Foster y Shneyerov (2000, sección 4, proposición 3).

De esta forma cualquier índice

$$P_\alpha(n,\mathbf{y}) = \frac{1}{\alpha}\log\frac{\mu_\alpha}{\tilde{\mu}}$$

para $\alpha \neq 0$,[133] puede descomponerse en la forma recogida por la propiedad (6.1'). Obsérvese que:

1) Por construcción, el nivel de renta representativo de la distribución suavizada, $\mu_{\alpha,B}$, es idéntico al de la distribución estandarizada, $\mu_{\alpha,W}$, e idéntico en ambos casos al de la distribución original, μ_α.[134]

[132] No se permite, sin embargo, $\alpha \to \pm\infty$, por las razones expuestas en el texto. En realidad, para estos valores extremos se verifica la descomponibilidad de la propiedad (6.1), pero la función representativa del nivel de prosperidad asociado a la distribución no verifica la propiedad de monotonía, y queda excluida a priori (Foster y Shneyerov 2000).

[133] El caso $\alpha=0$ se corresponde con *VL* cuya descomposición ya hemos analizado al principio del capítulo.

[134] Para la partición de la población considerada podemos escribir μ_α como,

$$\mu_\alpha = \left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i^\alpha\right]^{\frac{1}{\alpha}} = \left[\frac{1}{n}\sum_{g=1}^{G}\sum_{i=1}^{n_g}(y_i^g)^\alpha\right]^{\frac{1}{\alpha}} = \left[\sum_{g=1}^{G}\frac{n_g}{n}\sum_{i=1}^{n_g}\frac{1}{n_g}(y_i^g)^\alpha\right]^{\frac{1}{\alpha}} = \left[\sum_{g=1}^{G}\frac{n_g}{n}\mu_{\alpha,g}^\alpha\right]^{\frac{1}{\alpha}}$$

2) La relación entre las medias geométricas de las tres distribuciones viene dada por $\tilde{\mu}_W = \mu_\alpha \left(\tilde{\mu}/\tilde{\mu}_B\right)$.[135]

Y, en consecuencia,

$$
\begin{aligned}
P_{\alpha,W} + P_{\alpha,B} &= \frac{1}{\alpha}\left[\log\frac{\mu_{\alpha,W}}{\tilde{\mu}_W} + \log\frac{\mu_{\alpha,B}}{\tilde{\mu}_B}\right] \\
&= \frac{1}{\alpha}\left[\log\frac{\mu_\alpha}{\mu_\alpha\dfrac{\tilde{\mu}}{\tilde{\mu}_B}} + \log\frac{\mu_\alpha}{\tilde{\mu}_B}\right] \\
&= \frac{1}{\alpha}\left[\log\frac{\mu_\alpha}{\tilde{\mu}_B} - \log\frac{\tilde{\mu}}{\tilde{\mu}_B}\right] \\
&= \frac{1}{\alpha}\left[\log\mu_\alpha - \log\tilde{\mu}\right] \\
&= \frac{1}{\alpha}\log\frac{\mu_\alpha}{\tilde{\mu}} = P_\alpha(n,\mathbf{y})
\end{aligned}
$$

Y aplicando la definición de μ_α a la distribución suavizada,

$$\mu_{\alpha,B} = \left[\sum_{g=1}^{G}\frac{n_g}{n}\mu_{\alpha,g}^{\alpha}\right]^{\frac{1}{\alpha}} = \mu_\alpha$$

y a la distribución estandarizada,

$$\mu_{\alpha,W} = \left[\frac{1}{n}\sum_{g=1}^{G}\sum_{i=1}^{n_g}\mu_\alpha^\alpha\frac{(y_i^g)^\alpha}{\mu_{\alpha,g}^\alpha}\right]^{\frac{1}{\alpha}} = \mu_\alpha\left[\sum_{g=1}^{G}\frac{n_g}{n}\frac{1}{\mu_{\alpha,g}^\alpha}\sum_{i=1}^{n_g}\frac{1}{n_g}(y_i^g)^\alpha\right]^{\frac{1}{\alpha}} = \mu_\alpha\left[\sum_{g=1}^{G}\frac{n_g}{n}\frac{1}{\mu_{\alpha,g}^\alpha}\mu_{\alpha,g}^\alpha\right]^{\frac{1}{\alpha}} = \mu_\alpha$$

obtenemos el resultado mencionado.

[135] La media geométrica de la distribución suavizada viene dada por,

$$\tilde{\mu}_B = \prod_{g=1}^{G}\mu_{\alpha,g}^{n_g/n}$$

y la media geométrica de la distribución estandarizada viene dada por,

$$\tilde{\mu}_W = \mu_\alpha\frac{\left(\prod_{g=1}^{G}\prod_{i=1}^{n_g}y_i^g\right)^{1/n}}{\prod_{g=1}^{G}\mu_{\alpha,g}^{n_g/n}} = \mu_\alpha\frac{\left(\prod_{i=1}^{n}y_i\right)^{1/n}}{\tilde{\mu}_B} = \mu_\alpha\frac{\tilde{\mu}}{\tilde{\mu}_B}$$

lo que justifica la relación mencionada en el texto.

Lo que muestra la descomponibilidad mencionada. Al igual que sucede con el teorema (1.1), el resultado de Foster y Shneyerov (2000) indica que solo la familia de índices $P_\alpha(n,\mathbf{y})$ satisface la descomponibilidad aditiva independiente del camino.

Obsérvese que

$$P_\alpha(n,\mathbf{y}) = \frac{1}{\alpha}\log\frac{\mu_\alpha}{\tilde{\mu}}$$

para $\alpha \neq 0$, puede escribirse como

$$\begin{aligned} P_\alpha(n,\mathbf{y}) &= \frac{1}{\alpha}\left(\log\mu_\alpha - \log\tilde{\mu}\right) \\ &= \frac{1}{\alpha}\left(\log\mu_\alpha - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\log y_i\right) \\ &= \frac{1}{\alpha}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\log\frac{\mu_\alpha}{y_i} \end{aligned} \tag{6.14}$$

Lo que muestra claramente la relación entre $P_\alpha(n,\mathbf{y})$ y T^*, (3.31), que es un caso particular de esta familia cuando $\alpha=1$, $P_1 = T^* = I_0$. La fórmula (6.14) muestra también que esta familia de índices recoge las distancias, no entre y_i y μ, sino entre y_i y μ_α.

En la nota técnica A.1.2 se presenta algunas propiedades de $P_\alpha(n,\mathbf{y})$ que es conveniente conocer. Al margen de ellas, la propiedad más importante es que no todos los miembros de esta familia verifican el principio de las transferencias de Pigou-Dalton, lo que se observa a partir del hecho de que la varianza de los logaritmos es un miembro de dicha familia. De hecho la propiedad (1.4) no se exigió en el teorema (6.1).

El efecto sobre $P_\alpha(n,\mathbf{y})$, para $\alpha \neq 0$, de una pequeña transferencia δ de un individuo rico, *i*, a otro pobre, *j*, sin que ello altere sus posiciones relativas viene dado por,

$$\delta\frac{1}{\alpha n}\left[\left(\frac{y_j^{\alpha-1}}{\mu_\alpha^\alpha} - \frac{1}{y_j}\right) - \left(\frac{y_i^{\alpha-1}}{\mu_\alpha^\alpha} - \frac{1}{y_i}\right)\right]$$

cuyo signo depende del parámetro α que regula el signo de $\left(y_j^{\alpha-1} - y_i^{\alpha-1}\right)$. En concreto para $\alpha \geq 1$, $\left(y_j^{\alpha-1} - y_i^{\alpha-1}\right) \leq 0$, y el efecto de dicha transferencia es negativo, por lo que en estos casos se verifica el principio de las transferencias de Pigou-Dalton.

Por el contrario, para $\alpha < 1$ debemos estudiar el comportamiento de la función

$$\frac{1}{\alpha n}\left(\frac{y^{\alpha-1}}{\mu_\alpha^\alpha} - \frac{1}{y}\right)$$

Un análisis de la misma revela que, en este caso, dicha función alcanza su máximo en $(1-\alpha)^{-1/\alpha}\mu_\alpha$, siendo creciente en y para valores inferiores y decreciente en y para valores superiores. Por tanto, el efecto de dicha transferencia es negativo para $y_j < y_i < (1-\alpha)^{-1/\alpha}\mu_\alpha$, tal y como requiere el principio de las transferencias de Pigou-Dalton, pero positivo para $(1-\alpha)^{-1/\alpha}\mu_\alpha < y_j < y_i$.

En consecuencia, de forma similar a lo que ocurre con la varianza de los logaritmos, *VL*, que se corresponde con el caso $\alpha = 0$, y la varianza logarítmica, *LV*, el principio de las transferencias no se cumple para todos los miembros de la familia $P_\alpha(n, \mathbf{y})$. Resulta interesante observar que el valor más bajo de α para el cual se cumple dicho principio coincide con el segundo índice de Theil, es decir para $\alpha = 1$, $P_1 = T^* = I_0$.

7. Descomponibilidad (II)

7.1. Consistencia subgrupal

Muchas cuestiones de interés práctico no requieren una descomposición aditiva exacta de la desigualdad por grupos de población; basta simplemente una comparación entre los niveles de desigualdad global e intergrupos. Así pues, aunque la forma aditiva de (6.1) es atractiva, puede ser innecesariamente restrictiva en muchas circunstancias de orden práctico. Consideremos la siguiente propiedad más débil que la propiedad (1.7), y que relaja la aditividad.

Propiedad (7.1): Consistencia subgrupal
(v. Shorrocks [1984, 1988], Sen y Foster [1997])

Dada una sociedad N compuesta por G subgrupos de población, exhaustivos y mutuamente excluyentes, se cumple que:

$$I(n,\mathbf{y}) = \Phi\left(I(n_1,\mathbf{y}^1), I(n_2,\mathbf{y}^2), \ldots, I(n_G,\mathbf{y}^G); \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{n}\right)$$

donde Φ es una función continua y estrictamente creciente en cada uno de los primeros G argumentos.

La *consistencia subgrupal* establece que el índice de desigualdad puede expresarse como una función de los índices de los diferentes grupos, de sus medias y de sus tamaños poblacionales. Se trata obviamente de una extensión de la noción de descomponibilidad aditiva analizada hasta ahora. En lugar de exigir la aditividad en la descomposición, se pide ahora que el índice de desigualdad sea estrictamente creciente en los índices parciales, correspondientes a los distintos grupos de la partición.

Adviértase que esta propiedad no indica nada acerca de la magnitud del incremento total de la desigualdad, en relación con el aumento de la desigualdad en cada uno de los grupos y, en consecuencia, solo se trata de una correspondencia direccional. En el ejemplo del capítulo anterior, que clasificaba a la población según género, hombres y mujeres, la consistencia subgrupal solo requiere que si aumenta la desigualdad dentro del grupo de hombres, manteniéndose la desigualdad entre las mujeres y permaneciendo constantes las poblaciones y rentas medias de ambos grupos, entonces la desigualdad global deberá aumentar. No se imponen restricciones sobre la magnitud de dicho aumento.[136] Esta propiedad parece pues bastante más débil que la descomponibilidad aditiva y con un cierto atractivo, aunque como veremos más adelante no está exenta de críticas. La propiedad (7.1) puede ser vista como un requerimiento mínimo para la descomponibilidad por subgrupos de población, ya que si no se cumple podríamos encontrar situaciones en la que la desigualdad en cada grupo aumenta y, manteniendo las rentas medias y las proporciones de población, la desigualdad global disminuye.

Es obvio que la descomponibilidad aditiva (propiedad 1.7) implica la consistencia subgrupal (propiedad 7.1). Si se mantienen constantes el componente intergrupos y las ponderaciones dentro de cada grupo, ya que $\boldsymbol{\mu}$ y $\boldsymbol{n}$ no cambian, entonces cualquier aumento de la desigualdad en uno solo de los grupos se traducirá en un aumento de la desigualdad global. Así pues la familia de índices de entropía generalizados satisface la propiedad de consistencia subgrupal. La cuestión que se plantea ahora es: ¿Qué índices, además de esta familia, satisface la propiedad (7.1)?

Shorrocks (1984) demostró el siguiente resultado:

Teorema (7.1)

Una función $I : \mathfrak{I} \mapsto \mathbb{R}$ verifica normalización (propiedad 1.1), simetría (propiedad 1.2), principio de réplica de las poblaciones (propiedad 1.3), principio de las transferencias de Dalton (pro-

[136] Nótese el paralelismo entre la descomponibilidad y el principio de las transferencias de Pigou-Dalton. Por ejemplo, si uno de los grupos consta solo de dos personas entonces un aumento de la desigualdad en dicho grupo debe implicar, *ceteris paribus*, un incremento de la desigualdad global debido al principio de las transferencias. La descomponibilidad en este sentido es, sin embargo, mucho más general.

piedad 1.4), continuidad (propiedad 1.5), independencia de la escala (propiedad 1.6) y consistencia subgrupal (propiedad 7.1), si y solo si es de la forma:[137]

$$I_\theta(n,\mathbf{y}) = \frac{1}{n}\frac{1}{\theta(\theta-1)}\sum_{i=1}^{n}\left[\left(\frac{y_i}{\mu}\right)^{\theta} - 1\right]$$

o bien una transformación monótona creciente de esta función, $J\left(I_\theta(n,\mathbf{y})\right)$ siendo J una función continua y estrictamente creciente en I_θ, y donde θ es un parámetro real que puede tomar cualquier valor, positivo, cero o negativo.

Demostración

Véase Shorrocks (1984, sección 4, teorema 5).

El teorema (7.1) muestra que relajar el elemento aditivo de la descomponibilidad expande el conjunto de índices de desigualdad solamente a aquellos que resultan ordinalmente equivalentes a los de la familia de entropía generalizada. Esto es suficiente para incorporar la familia de índices de Atkinson (1970) al conjunto de índices descomponibles en este sentido más general, aunque no pertenezcan a la clase de los aditivamente descomponibles.[138] El índice de Gini, por el contrario, tampoco no resulta descomponible en el sentido de la propiedad (7.1).

Observación (7.1): Obsérvese que la propiedad (7.1) ha sido definida en términos de la media aritmética y, en consecuencia, el único miembro de la familia $P_\alpha(n,\mathbf{y})$ que verifica dicha propiedad es $P_0 = T^*$. Sería posible, alternativamente, definir la propiedad de consistencia subgrupal en términos de otras rentas representativas, por ejemplo, las medias de orden α. Bajo esta condición entonces todos los miembros de la familia $P_\alpha(n,\mathbf{y})$ cumplirían esta propiedad más general, de forma que la desigualdad global au-

[137] Obsérvese que la propiedad de diferenciabilidad ha sido reducida simplemente a la de continuidad.

[138] Es esta equivalencia ordinal la que es aprovechada por Lasso de la Vega y Urrutia (2005a) para extender la familia de índices de Atkinson (1970) para todos los valores de $\varepsilon \in \mathbb{R}$.

mentaría al aumentar la desigualdad en cualquiera de los grupos, manteniendo fijos el tamaño de la población, n, y las rentas representativas de cada uno de los diferentes grupos.

7.2. Consistencia subgrupal y principio de transferencias de Dalton

Volvemos ahora al mundo en el que la media aritmética constituye el indicador básico del nivel representativo de prosperidad de la sociedad, y examinamos las restricciones que la propiedad (7.1) impone sobre la clase de información que las medidas descomponibles, en este sentido general, deben satisfacer.

La propiedad (7.1) requiere que si cambia la desigualdad en un subgrupo poblacional, el cambio en la desigualdad total debe ser del mismo signo. Esto equivale a eliminar cualquier interdependencia entre los grupos, es decir el sentimiento de la desigualdad en cada grupo no depende, de ninguna manera, de cuál es la desigualdad de dicho grupo en relación al resto de la sociedad; cada grupo se mira así mismo, pero no hay interdependencias con el resto de la población. Es posible que, en ocasiones, esta independencia no refleje bien nuestra percepción de la desigualdad, razón por la cual la propiedad (7.1) es menos indiscutible de lo que a primera vista parece.

Consideremos el siguiente ejemplo sencillo de Sen y Foster (1997). Supongamos una partición de la sociedad en hombres y mujeres, como en el ejemplo del capítulo anterior, en la que la distribución para los hombres es $\mathbf{y}_{VA} = (1,3,8,8)$ mientras que para las mujeres es completamente igualitaria $\mathbf{y}_M = (y_f, y_f)$. Consideremos ahora una redistribución de renta que afecta únicamente al grupo de los hombres, de forma que su nueva distribución es $\mathbf{y}_{VB} = (2,2,7,9)$, obtenida a partir de una transferencia progresiva y otra regresiva. La consistencia subgrupal implica que el cambio en la desigualdad global coincidirá con la dirección del cambio en la desigualdad en el grupo de hombres, y ello independientemente de la distribución en el grupo de mujeres, es decir del valor de y_f. Efectivamente, todos los índices de la familia de entropía generalizada, o aquellos que sean ordinalmente equivalentes a estos, satisfacen esta propiedad.

En concreto, dado $\mathbf{y}_A = (1,3,8,8,y_f,y_f)$ e $\mathbf{y}_B = (2,2,7,9,y_f,y_f)$ obtenemos que $I_\theta(\mathbf{y}_A) > I_\theta(\mathbf{y}_B)$ para $\theta < 2$ y $I_\theta(\mathbf{y}_A) < I_\theta(\mathbf{y}_B)$ para $\theta > 2$, lo que no depende de si el grupo de mujeres está, en promedio, en mejor o peor situación que el grupo de hombres.

Consideremos ahora dos casos extremos para la renta de las mujeres, $y_f = 2$ e $y_f = 8$. De esta forma tenemos dos cambios distributivos posibles a analizar:

1) de $y'_A = (1,2,2,3,8,8)$ a $y'_B = (2,2,2,2,7,9)$, y
2) de $y^*_A = (1,3,8,8,8,8)$ a $y^*_B = (2,2,7,8,8,9)$.

Aunque para un valor dado de θ la dirección del cambio en la desigualdad es la misma en ambos casos,[139] la intuición sugiere que el paso de y'_A a y'_B implica una disminución de la desigualdad, mientras que el paso de y^*_A a y^*_B implica un aumento de la misma.[140]

Este juicio está fundado en que, en el primer caso, un mayor número de individuos pasa a disfrutar de la misma renta, mientras que, en el segundo caso, ocurre justo lo contrario. Visto de otra forma, la formulación de este juicio de valor mira a todas partes, no solo a lo que ocurre en el grupo en el que tiene lugar el cambio distributivo.

Esta es precisamente la razón por la cual el índice de Gini no es descomponible por subgrupos de población en ninguno de los sentidos que hemos analizado anteriormente. Al calcular el efecto total de un cambio distributivo, el índice de Gini considera no

[139] Obviamente, la dirección en la que varíe la desigualdad depende de a qué parte de la distribución demos más peso. Para $\theta < 2$, I_θ es más sensible a alteraciones en la parte baja de la distribución y, en consecuencia, la transferencia progresiva en esta parte domina a la transferencia regresiva en la parte superior, por lo que el paso de $\mathbf{y}_A$ a $\mathbf{y}_B$ es identificado como una disminución de la desigualdad. Por el contrario, para $\theta > 2$, I_θ es más sensible a alteraciones en la parte alta de la distribución y, en consecuencia, la transferencia regresiva en esta parte domina a la transferencia progresiva en la parte inferior, por lo que el paso de $\mathbf{y}_A$ a $\mathbf{y}_B$ es identificado como un incremento de la desigualdad.

[140] Precisamente este es el comportamiento que muestra el índice de Gini por las razones que veremos más adelante.

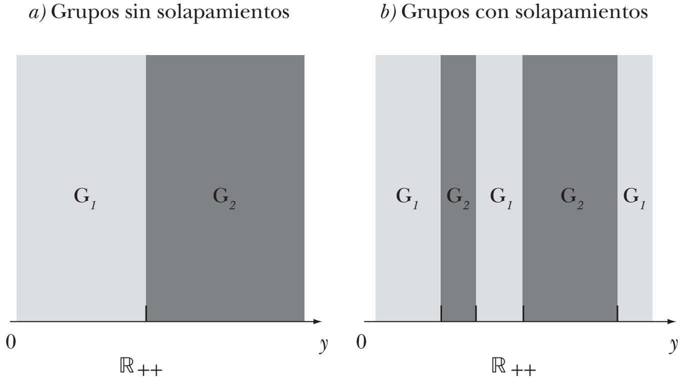
solo las alteraciones dentro del grupo afectado, sino las posiciones relativas de todos los individuos en la sociedad.

Recuérdese el capítulo 3 donde se expone que el efecto de una transferencia de Pigou-Dalton sobre el índice de Gini depende de las diferencias de ranking entre los individuos entre los que tiene lugar dicha transferencia,

$$\delta \frac{2}{\mu n^2}[j-i] < 0$$

para $j < i$, y por tanto, el efecto de dicha transferencia, en general, depende del conjunto de la sociedad, no solo del grupo en el que tiene lugar. Las diferencias de ranking entre los individuos dentro del grupo al que pertenecen, según un determinado criterio de clasificación, no tienen por qué coincidir con sus diferencias de ranking dentro del conjunto de la sociedad, excepto en el caso particular en el que los grupos no tengan rentas en común. El gráfico 7.1 ofrece dos particiones posibles: a) sin ningún tipo de solapamiento, en el que el individuo más rico del primer grupo es más pobre que el más pobre del segundo grupo, y b) con solapamientos entre los grupos, donde el criterio de clasificación es tal que las rentas de los individuos de ambos grupos se encuentran entremezcladas. De esta forma, la renta media del grupo no nos proporciona ninguna información acerca de las posiciones relativas de dos individuos pertenecientes a grupos diferentes.

GRÁFICO 7.1: Particiones posibles de la población



Fuente: Elaboración propia.

Así pues, cuando la desigualdad depende de la posición relativa que ocupan los individuos en el conjunto de la distribución, entonces una redistribución dentro de un grupo afecta a las posiciones relativas de los individuos en el conjunto de la sociedad. La dirección del cambio en la desigualdad dentro del grupo no tiene por qué coincidir con la dirección del cambio en la desigualdad global, ya que ahora sí importan los niveles de ingresos de los individuos de los otros grupos.

En el ejemplo anterior los hombres con rentas 1 y 3 están separados por las dos mujeres cuando $y_f = 2$, pero no cuando $y_f = 8$. De esta forma, en el primer caso, la transferencia progresiva pesa más que la regresiva y la desigualdad disminuye. Justo lo contrario sucede en el segundo caso. Obsérvese que si miramos solo a la distribución del grupo de hombres, entonces el efecto de ambas transferencias se compensa y el índice de Gini permanece inalterado dentro de este grupo ante el cambio distributivo.[141]

Así pues, la consistencia subgrupal obliga a los índices que la cumplan a omitir cierto tipo de información que puede ser de interés en determinadas comparaciones. Información que hace referencia a las posiciones relativas de los individuos de los grupos respecto al conjunto de la sociedad.

Hemos mencionado antes el paralelismo entre la propiedad de consistencia subgrupal y el principio de las transferencias de Dalton. De hecho la crítica a la consistencia subgrupal que acabamos de presentar puede mirarse también como un cuestionamiento del principio de transferencias de Dalton.

La intuición es bastante sencilla. Imaginemos que en un bloque de pisos en un barrio pobre uno de los vecinos recibe una donación de un millón de dólares de un tío rico de América del que no tenía noticias, cuyo patrimonio asciende a miles de millones de euros. ¿Se habrá reducido la desigualdad? Si aplicamos el principio de transferencias de Dalton a nivel global la respuesta es inequívoca: sí. Sin embargo la percepción social será probablemente distinta. En el mundo del tío de América esta donación

---

[141] Véase Mookherjee y Shorrocks (1982) o Cowell (1988) para ejemplos adicionales relacionados con esta cuestión.

resulta imperceptible mientras que en el barrio pobre ha creado un rico (v. Kolm 1999).

Es interesante en este sentido el experimento realizado por Amiel y Cowell (1999). Estos autores proponen una serie de comparaciones numéricas a más de un millar de estudiantes, que deben determinar la mayor o menor desigualdad entre las distribuciones de renta que comparan. Se observa que únicamente el 35% de los encuestados muestra estar de acuerdo con el principio de transferencias de Dalton. Este resultado cambia drásticamente cuando se plantea una formulación verbal y no numérica de esta propiedad, pasando el grado de acuerdo al 60% de los encuestados.[142]

Dada la relación entre el principio de transferencias de Dalton y la dominancia de Lorenz, analizadas en el capítulo 5, es obvio que las críticas a este principio afectan también al criterio de Lorenz. Lo que apuntarían estas críticas es que el hecho de que una curva de Lorenz esté completamente contenida en otra puede no resultar suficientemente informativo, si esta inclusión distorsiona mucho la forma de la curva de modo que la estructura se modifique sustancialmente en algunas partes de la misma.

En el fondo lo que subyace es la idea de que ceñir la noción de desigualdad a una medida global de la dispersión de rentas tiene limitaciones. Podemos encontrar que existen ciertas características de las distribuciones de renta que resultan conceptualmente relevantes, pero que tienen mal acomodo en esta aproximación convencional de los índices de desigualdad. Un caso especialmente relevante es el de la *polarización*, introducido por Esteban y Ray (1994), que muestra cómo las distribuciones de renta pueden describir situaciones sociales con muy diversos grados de conflictividad potencial, sin que los índices de desigualdad lleguen a captarlo.

Remitimos al lector a la discusión más detallada de estos aspectos que ofrece el trabajo de Ruiz-Castillo (2007).

[142] Yaari y Bar-Hilell (1984) habían ya mostrado que la percepción empírica de la desigualdad no resulta siempre acorde con la formulación convencional.

7.3. Otras nociones de descomponibilidad

Veremos en el teorema (8.1) que sustituir la descomponibilidad aditiva por la consistencia subgrupal expande el conjunto admisible de índices mediante la inclusión de transformaciones monótonas de la familia de entropía generalizada, I_θ. En cierto sentido, pues, esta extensión no consigue añadir nuevas percepciones al problema de medición de la desigualdad. Shorrocks (1984) sugiere dos direcciones en las que el tratamiento de la descomponibilidad puede ser extendido: la consideración de otras medias diferentes de la aritmética como rentas representativas en el proceso de agregación; y la imposición de restricciones sobre el tipo de particiones admisibles de la población. Examinamos a continuación brevemente estas extensiones.[143]

7.3.1. Descomponibilidad general aditiva

Manteniendo ahora la aditividad, extendemos la propiedad (6.1) para incluir las medias de orden α, ya que hemos observado cómo estas medias constituyen una generalización natural del nivel de prosperidad de una sociedad.

Propiedad (7.2): Descomponibilidad general aditiva

Dada una sociedad N compuesta por G subgrupos de población, exhaustivos y mutuamente excluyentes, se cumple que:

$$I(n,\mathbf{y}) = \sum_{g=1}^{G} \omega_g^G(\boldsymbol{\mu}_\alpha, \boldsymbol{n}).I(n_g, \mathbf{y}^g) \; + \; I\left(n, \mu_{\alpha,1}\iota_{n_1}, \ldots, \mu_{\alpha,G}\iota_{n_G}\right)$$

para $\alpha \in \mathbb{R}$ y un conjunto de coeficientes ω_g^G, que son en realidad funciones que dependen de $\boldsymbol{\mu}_\alpha$, de $\boldsymbol{n}$ y del número G de subgrupos de la partición.

[143] Estas extensiones no agotan, en modo alguno, la dilatada literatura sobre descomponibilidad por subgrupos de población. Así, por ejemplo, Cowell (2005) extiende la familia de índices de entropía generalizada en la dirección de los *índices de desigualdad* intermedios y muestra su relación con los principios generales de la descomponibilidad. En otra dirección, Lasso de la Vega y Urrutia (2003) muestran cómo los índices de igualdad de Atkinson (1970), $1-A_\varepsilon$, son multiplicativamente descomponibles para el tipo de particiones que estamos considerando. Resultado que puede ser de utilidad en un análisis dinámico de las contribuciones de los diferentes grupos a los cambios en la *igualdad global*. En un trabajo posterior, Lasso de la Vega y Urrutia (2005b) exploran la descomposición multiplicativa independiente del camino.

Por tanto $I(n,\mathbf{y})$ puede ser expresado como una suma ponderada de los índices de desigualdad de cada uno de los grupos, el componente intragrupos, más la desigualdad de una distribución suavizada, el componente intergrupos, y donde tanto los pesos y como la distribución suavizada dependen de los tamaños poblacionales y de las medias de orden α de cada grupo. La propiedad (7.2) es pues una generalización directa de la propiedad (6.1), simplemente sustituyendo μ por μ_α.

Claramente, la familia de índices de entropía generalizados satisface la propiedad (7.2), simplemente tomando $\alpha = 1$. La cuestión, al igual que anteriormente, es qué otros índices cumplen esta propiedad.

Consideremos una propiedad más débil que el principio de las transferencias de Pigou-Dalton, que solo exige que la propiedad (1.4) se cumpla en distribuciones de renta de dos personas.

Propiedad (7.3): Principio de las transferencias de Dalton para poblaciones de dos individuos

Dada una sociedad N, de tamaño $n=2$ y sean $\mathbf{y}_A$ e $\mathbf{y}_B$ dos distribuciones de renta tales que $\mathbf{y}_B$ se obtiene mediante una transferencia de Dalton a partir de $\mathbf{y}_A$. Entonces, $I(n,\mathbf{y}_B) < I(n,\mathbf{y}_A)$.

Observación (7.2): La propiedad (7.3) constituye una debilitación considerable de la propiedad (1.4), ya que requiere que el principio de las transferencias de Pigou-Dalton solo se cumpla en distribuciones de renta con solo dos personas. Muchos índices que no verifican la propiedad (1.4) verifican la propiedad (7.3), por ejemplo R, M o P_α.

Foster y Shneyerov (1999) demostraron el siguiente resultado:

Teorema (7.2)

Una función $I : \mathfrak{I} \mapsto \mathbb{R}$ verifica las propiedades (1.1), (1.2), (1.3), (1.6), (7.2) y (7.3), si y solo si es de la forma:[144]

[144] Obsérvese que no se exige ni diferenciabilidad ni continuidad. Continuidad simplificaría la demostración pero no es necesaria.

$$I^*_{\theta\alpha}(n,\mathbf{y})=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta(\theta-\alpha)}\left[\left(\dfrac{\mu_\theta}{\mu_\alpha}\right)^\theta-1\right] & \theta\neq 0,\quad \alpha\neq\theta\\ \dfrac{1}{\alpha}\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\left(\dfrac{y_i}{\mu_\alpha}\right)^\alpha\log\dfrac{y_i}{\mu_\alpha} & \theta\neq 0,\quad \alpha=\theta\\ \dfrac{1}{\alpha}\log\dfrac{\mu_\alpha}{\tilde{\mu}} & \theta=0,\quad \alpha\neq 0\\ \dfrac{1}{2}VL(\mathbf{y}) & \theta=0,\quad \alpha=0\end{cases}$$

o bien una transformación proporcional creciente de esta función, $\phi I^*_{\theta\alpha}(n,\mathbf{y})$ con $\phi>0$, y donde θ y α son parámetros reales que pueden tomar cualquier valor, positivo, cero o negativo.

Demostración

Véase Foster y Shneyerov (1999, sección 3, proposición 2).

El teorema (7.2) introduce una familia de índices de desigualdad, muy general, que depende de dos parámetros y que incluye como caso particular otras familias que ya hemos examinado. En concreto para $\alpha = 1$ obtenemos la familia de índices de entropía generalizados, $I^*_{\theta 1} = I_\theta$, y para $\theta = 0$ obtenemos la familia de índices descomponibles independientes del camino, $I^*_{0\alpha} = P_\alpha$. El caso $\theta = \alpha \neq 0$ constituye una clara generalización del índice de desigualdad de Theil, T.

Obsérvese que para $\theta \neq 0$, $\alpha \neq \theta$ podemos escribir $I^*_{\theta\alpha}(n,\mathbf{y})$ como

$$I^*_{\theta\alpha}(n,\mathbf{y})=\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{\theta(\theta-\alpha)}\sum_{i=1}^{n}\left[\left(\frac{y_i}{\mu_\alpha}\right)^\theta-1\right] \tag{7.1}$$

De esta forma cualquier índice del tipo (7.1), para $\theta\neq 0$, $\alpha\neq\theta$,[145] puede descomponerse de la siguiente forma,

[145] El caso $\theta = 0$ se corresponden con P_α, cuya descomposición ya hemos examinado, y el caso $\theta = \alpha \neq 0$ se sigue de la descomposición de T.

$$
\begin{aligned}
I_{\theta\alpha}^{*}(n,\mathbf{y}) &= \frac{1}{n}\frac{1}{\theta(\theta-\alpha)}\sum_{g=1}^{G}\sum_{i=1}^{n_g}\left[\left(\frac{y_i^g}{\mu_\alpha}\right)^{\theta}-1\right] \\
&= \frac{1}{\theta(\theta-\alpha)}\sum_{g=1}^{G}\frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^{n_g}\left(\frac{y_i^g}{\mu_\alpha}\right)^{\theta}-n_g\right] \\
&= \frac{1}{\theta(\theta-\alpha)}\sum_{g=1}^{G}\frac{n_g}{n}\left[\sum_{i=1}^{n_g}\frac{1}{n_g}\left(\frac{y_i^g}{\mu_{\alpha,g}}\frac{\mu_{\alpha,g}}{\mu_\alpha}\right)^{\theta}-1\right] \\
&= \frac{1}{\theta(\theta-\alpha)}\sum_{g=1}^{G}\frac{n_g}{n}\left(\frac{\mu_{\alpha,g}}{\mu_\alpha}\right)^{\theta}\left[\sum_{i=1}^{n_g}\frac{1}{n_g}\left(\frac{y_i^g}{\mu_{\alpha,g}}\right)^{\theta}-\left(\frac{\mu_\alpha}{\mu_{\alpha,g}}\right)^{\theta}\right] \\
&= \frac{1}{\theta(\theta-\alpha)}\sum_{g=1}^{G}\frac{n_g}{n}\left(\frac{\mu_{\alpha,g}}{\mu_\alpha}\right)^{\theta}\left[\sum_{i=1}^{n_g}\frac{1}{n_g}\left(\frac{y_i^g}{\mu_{\alpha,g}}\right)^{\theta}-\frac{n_g}{n_g}+1-\left(\frac{\mu_\alpha}{\mu_{\alpha,g}}\right)^{\theta}\right] \\
&= \frac{1}{\theta(\theta-\alpha)}\sum_{g=1}^{G}\frac{n_g}{n}\left(\frac{\mu_{\alpha,g}}{\mu_\alpha}\right)^{\theta}\left[\frac{1}{n_g}\sum_{i=1}^{n_g}\left[\left(\frac{y_i^g}{\mu_{\alpha,g}}\right)^{\theta}-1\right]+1-\left(\frac{\mu_\alpha}{\mu_{\alpha,g}}\right)^{\theta}\right] \\
&= \sum_{g=1}^{G}\frac{n_g}{n}\left(\frac{\mu_{\alpha,g}}{\mu_\alpha}\right)^{\theta}\underbrace{\frac{1}{n_g}\frac{1}{\theta(\theta-\alpha)}\sum_{i=1}^{n_g}\left[\left(\frac{y_i^g}{\mu_{\alpha,g}}\right)^{\theta}-1\right]}_{I_{\theta\alpha}^{g}} \\
&\quad+\frac{1}{\theta(\theta-\alpha)}\sum_{g=1}^{G}\frac{n_g}{n}\left[\left(\frac{\mu_{\alpha,g}}{\mu_\alpha}\right)^{\theta}-1\right]
\end{aligned}
$$

En concreto, en este caso, podemos escribir

$$
\begin{aligned}
I_{\alpha\alpha}^{*} &= \frac{1}{n}\frac{1}{\alpha}\sum_{g=1}^{G}\sum_{i=1}^{n_g}\left(\frac{y_i^g}{\mu_\alpha}\right)^{\alpha}\log\frac{y_i^g}{\mu_\alpha} \\
&= \frac{1}{n}\frac{1}{\alpha}\sum_{g=1}^{G}\sum_{i=1}^{n_g}\left(\frac{y_i^g}{\mu_\alpha}\right)^{\alpha}\log\frac{y_i^g}{\mu_{\alpha,g}}\frac{\mu_{\alpha,g}}{\mu_\alpha} \\
&= \frac{1}{n}\frac{1}{\alpha}\sum_{g=1}^{G}\sum_{i=1}^{n_g}\left(\frac{y_i^g}{\mu_\alpha}\right)^{\alpha}\left(\log\frac{y_i^g}{\mu_{\alpha,g}}+\log\frac{\mu_{\alpha,g}}{\mu_\alpha}\right) \\
&= \frac{1}{n}\frac{1}{\alpha}\sum_{g=1}^{G}\left[\sum_{i=1}^{n_g}\left(\frac{y_i^g}{\mu_\alpha}\right)^{\alpha}\log\frac{y_i^g}{\mu_{\alpha,g}}+\sum_{i=1}^{n_g}\left(\frac{y_i^g}{\mu_\alpha}\right)^{\alpha}\log\frac{\mu_{\alpha,g}}{\mu_\alpha}\right] \\
&= \sum_{g=1}^{G}\frac{n_g}{n}\left(\frac{\mu_{\alpha,g}}{\mu_\alpha}\right)^{\alpha}\underbrace{\frac{1}{n_g}\frac{1}{\alpha}\sum_{i=1}^{n_g}\left(\frac{y_i^g}{\mu_{\alpha,g}}\right)^{\alpha}\log\frac{y_i^g}{\mu_{\alpha,g}}}_{I_{\alpha\alpha,g}^{*}}+\frac{1}{\alpha}\sum_{g=1}^{G}\frac{n_g}{n}\left(\frac{\mu_{\alpha,g}}{\mu_\alpha}\right)^{\alpha}\log\frac{\mu_{\alpha,g}}{\mu_\alpha}
\end{aligned}
$$

El primer término de la expresión final de este desarrollo nos da la suma ponderada de los índices $I^*_{\theta\alpha}$ dentro de los grupos, esto es el componente intragrupos. Resulta interesante observar que los pesos de esta suma vienen dados por

$$\omega_g^G(\boldsymbol{\mu}_\alpha, \boldsymbol{n}) = \frac{n_g}{n}\left(\frac{\mu_{\alpha,g}}{\mu_\alpha}\right)^\theta \tag{7.2}$$

Este esquema de ponderación es muy similar al que obteníamos para la descomposición de la familia de índices de entropía generalizados, pero en el que se utilizan medias de orden α en lugar de medias aritméticas. Por tanto, los pesos dependen tanto de la importancia demográfica de los grupos como de los niveles relativos de prosperidad de la sociedad, donde dicha prosperidad es medida mediante la media generalizada μ_α.

El segundo término de la expresión anterior no es más que el índice $I^*_{\theta\alpha}$ aplicado a las rentas representativas de cada grupo, las medias de orden α, es decir el índice $I^*_{\theta\alpha}$ entre los grupos. Este es el componente intergrupos de la descomposición en la propiedad (7.2).

Al igual que sucede con los teoremas (1.1), (6.1) y (7.1), el resultado de Foster y Shneyerov (1999) muestra que solo la familia de índices $I^*_{\theta\alpha}(n, \mathbf{y})$ satisface la descomponibilidad general aditiva.

La nota técnica A.1.3 recoge algunas propiedades de $I^*_{\theta\alpha}(n, \mathbf{y})$ que resulta interesante conocer. Al margen de ellas, debemos observar que no todos los miembros de esta familia satisfacen el principio de las transferencias de Pigou-Dalton, como es obvio, puesto que $P_\alpha(n, \mathbf{y})$ forma parte de esta familia extendida.

El efecto sobre $I^*_{\theta\alpha}(n, \mathbf{y})$ para $\theta \neq 0$, $\alpha \neq \theta$, de una pequeña transferencia δ de un individuo rico, i, a otro pobre, j, sin que ello altere sus posiciones relativas viene dado por,

$$\delta \frac{1}{n(\theta-\alpha)\mu_\alpha^\theta}\left[\left(y_j^{\theta-1} - \frac{\mu_\theta^\theta}{\mu_\alpha^\alpha} y_j^{\alpha-1}\right) - \left(y_i^{\theta-1} - \frac{\mu_\theta^\theta}{\mu_\alpha^\alpha} y_i^{\alpha-1}\right)\right]$$

cuyo signo depende de los parámetros θ y α que regulan los signos de $\left(y_j^{\theta-1}-y_i^{\theta-1}\right)$ y $\left(y_j^{\alpha-1}-y_i^{\alpha-1}\right)$.[146] En concreto, para $\theta \geq 1$ y $\alpha \leq 1$ o para $\theta \leq 1$ y $\alpha \geq 1$ la expresión anterior es negativa por lo que en estos casos se verifica el principio de las transferencias de Pigou-Dalton; pero en caso contrario siempre es posible encontrar una distribución en la que para determinados valores de y no se verifique el principio de las transferencias de Pigou-Dalton.[147]

7.4. Descomponibilidad del índice de Gini

Ya hemos observado que el popular índice de Gini no es descomponible en ninguna de las direcciones que hemos analizado previamente. Sin embargo, dada una partición de la población en grupos, exhaustivos y mutuamente excluyentes, es posible expresarlo como la suma de tres componentes, cada uno de ellos con una interpretación de interés en sí mismo.[148]

Consideremos la fórmula del índice de Gini (3.10),[149]

$$GINI=\frac{1}{2}\frac{1}{\mu n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left|y_i-y_j\right|$$

y la partición de la población en G grupos exhaustivos y mutuamente excluyentes. Podemos escribir,

$$\begin{aligned}GINI&=\frac{1}{2}\frac{1}{n^2\mu}\sum_{g=1}^{G}\sum_{h=1}^{G}\sum_{i=1}^{n_g}\sum_{j=1}^{n_h}\left|y_i^g-y_j^h\right|\\&=\frac{1}{2}\frac{1}{n^2\mu}\sum_{g=1}^{G}\sum_{i=1}^{n_g}\sum_{j=1}^{n_g}\left|y_i^g-y_j^g\right|+\frac{1}{2}\frac{1}{n^2\mu}\sum_{g=1}^{G}\sum_{h\neq g}\sum_{i=1}^{n_g}\sum_{j=1}^{n_h}\left|y_i^g-y_j^h\right|\end{aligned}$$

[146] Así como del término $\theta-\alpha$, que aparece en el denominador.

[147] El gráfico A.1.2 del apéndice muestra el conjunto de índices $I_{\theta\alpha}^{*}(n,\mathbf{y})$ que satisfacen dicho principio.

[148] Otro tipo de descomposiciones aditivas del índice de Gini, diferentes de la mencionada en el texto, son posibles pero carecen de relevancia práctica (Das y Parikh 1982).

[149] Puesto que G indica el número de grupos en la notación que estamos empleando y también el índice de Gini a lo largo del trabajo, en este apartado denotaremos a dicho índice por su nombre completo, *GINI*.

$$= \sum_{g=1}^{G} \frac{n_g^2.\mu_g}{n^2.\mu} \underbrace{\left[\frac{1}{2} \frac{1}{n_g^2 \mu_g} \sum_{i=1}^{n_g} \sum_{j=1}^{n_g} \left| y_i^g - y_j^g \right| \right]}_{GINI_g}$$

$$+ \frac{1}{2} \frac{1}{n^2 \mu} \sum_{g=1}^{G} \sum_{h \neq g} \sum_{i=1}^{n_g} \sum_{j=1}^{n_h} \left| y_i^g - y_j^h \right|$$

El primer término de la expresión final de este desarrollo es, pues, una suma ponderada de los índices de Gini de los diferentes grupos, el componente intragrupos en la descomposición (6.1). Los pesos de esta suma vienen dados por

$$\omega_g^G(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{n}) = \frac{n_g^2 \mu_g}{n^2 \mu} = \frac{n_g}{n} \frac{n_g \mu_g}{n \mu} \tag{7.3}$$

es decir, el producto de las proporciones de población por las proporciones de renta de cada uno de los grupos. Claramente estos pesos suman siempre menos que la unidad.

Para saber si el segundo término de la expresión anterior puede ser estimado como el componente intergrupos, examinemos, inicialmente, el caso en el que los grupos de la partición no se solapan. Es decir, si el vector de rentas medias, $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_G)$, se considera ordenado de forma no decreciente, $\mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots \leq \mu_{G-1} \leq \mu_G$, entonces para cualquiera de los dos grupos, g y h, $\mu_g \leq \mu_h$, se cumple que $y_i^g \leq y_j^h$, $\forall i, j$. En este caso podemos escribir,

$$\sum_{g=1}^{G} \sum_{h \neq g} \sum_{i=1}^{n_g} \sum_{j=1}^{n_h} \left| y_i^g - y_j^h \right| = \sum_{g=1}^{G} \left[\sum_{h<g} \sum_{i=1}^{n_g} \sum_{j=1}^{n_h} \left(y_i^g - y_j^h \right) + \sum_{h>g} \sum_{i=1}^{n_g} \sum_{j=1}^{n_h} \left(y_j^h - y_i^g \right) \right]$$

$$= \sum_{g=1}^{G} \left[\sum_{h<g} \sum_{i=1}^{n_g} \left(n_h y_i^g - n_h \mu_h \right) + \sum_{h>g} \sum_{i=1}^{n_g} \left(n_h \mu_h - n_h y_i^g \right) \right]$$

$$= \sum_{g=1}^{G} \left[\begin{array}{l} \sum_{h<g} \left(n_g n_h \mu_g - n_g n_h \mu_h \right) \\ + \sum_{h>g} \left(n_g n_h \mu_h - n_g n_h \mu_g \right) \end{array} \right]$$

$$= \sum_{g=1}^{G} \left[\sum_{h<g} n_g n_h \left(\mu_g - \mu_h \right) + \sum_{h>g} n_g n_h \left(\mu_h - \mu_g \right) \right]$$

$$= \sum_{g=1}^{G} \sum_{h \neq g} n_g n_h \left| \mu_g - \mu_h \right|$$

Lo que proporciona la siguiente descomposición para *GINI*,

$$GINI = \sum_{g=1}^{G} \frac{n_g^2 \mu_g}{n^2 \mu} GINI_g + \frac{1}{2} \frac{1}{n^2 \mu} \sum_{g=1}^{G} \sum_{h=1}^{G} n_g n_h \left| \mu_g - \mu_h \right| \qquad (7.4)$$

y donde efectivamente el segundo término no es más que el índice de Gini aplicado a las medias de los diferentes grupos, es decir el componente intergrupos, derivado de la distribución suavizada, en la que a cada individuo se le asigna la renta media del grupo al que pertenece.

La ecuación (7.4) nos proporciona la descomposición del índice de Gini en dos términos: la desigualdad entre grupos y la desigualdad dentro de los grupos.

Por tanto, si llamamos

1) $GINI_W = \sum_{g=1}^{G} \frac{n_g^2 \mu_g}{n^2 \mu} GINI_g$, y

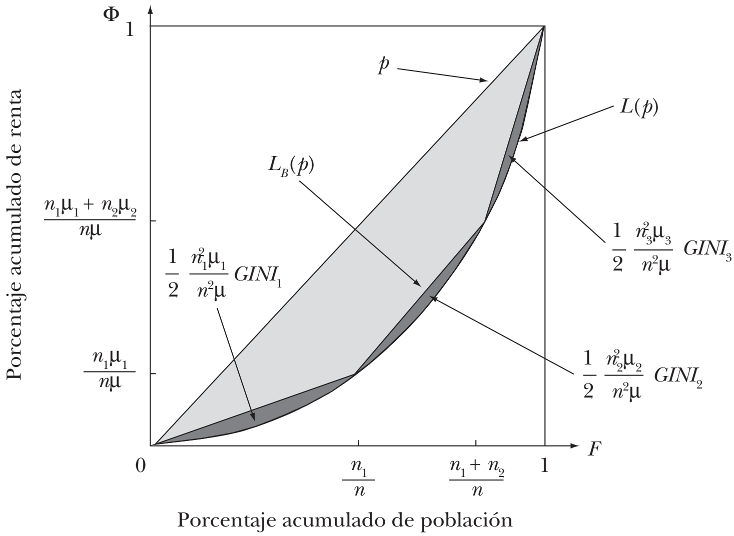
2) $GINI_B = \frac{1}{2} \frac{1}{n^2 \mu} \sum_{g=1}^{G} \sum_{h=1}^{G} n_g n_h \left| \mu_g - \mu_h \right|$

podemos escribir $GINI = GINI_W + GINI_B$. Pero esta descomposición descansa sobre el supuesto crucial de que las rentas de los diferentes grupos no se superponen, por ejemplo, cuando dividimos la población de acuerdo a una línea de pobreza o estudiamos la distribución por decilas. En estos casos el criterio de partición viene dado por determinados niveles de renta y el índice de Gini se descompone de acuerdo con (7.4). En otros casos más generales, como por ejemplo, una partición por regiones o por el género de los perceptores de renta, no es posible suponer que las rentas de los diferentes grupos no se solapen. En este caso, el razonamiento seguido para la obtención de $GINI_B$ no se verifica y, en consecuencia, no podemos derivar la descomposición anterior, (7.4).

El gráfico 7.2 ofrece la descomposición (7.4) para una partición de la población en tres grupos cuyos niveles de renta no se solapan. Ello permite entender, desde el punto de vista geométrico, la descomposición del índice de Gini, en este caso particular, así como extender de forma directa la descomposición al caso general.

La curva de Lorenz para la distribución suavizada, $L_B(p)$, viene dada por los tramos rectos, cuyos puntos de cambio de pendiente

GRÁFICO 7.2: Descomposición de Gini, partición que no se solapa



Fuente: Elaboración propia.

se sitúan sobre la curva de Lorenz de la población, $L(p)$, precisamente porque los grupos de la partición no tienen rentas que se solapen entre sí. Por definición el área (representada por el tono más claro) entre la línea de igualdad, p, y $L_B(p)$, no es más que $1/2\, GINI_B$ en la descomposición (7.4).

El índice de Gini de cada grupo, $GINI_g$, representa la desigualdad dentro de cada uno de los grupos, sin consideración del resto de la sociedad. Podríamos construir una curva de Lorenz para cada grupo con la representación e interpretación habitual, $L_g(p)$. Si esas curvas de Lorenz, dibujadas originalmente sobre un cuadrado de lado unidad, las sobrepusiéramos en el gráfico 7.2, que representa la curva de Lorenz del total de la población, $L(p)$, entonces deberíamos multiplicar las abscisas de $L_g(p)$ por n_g/n y las ordenadas por $\left(n_g\mu_g\right)/n\mu$, antes de colocar la curva en el lugar adecuado, según la ordenación del grupo en la población.[150] Efectuada esta operación, obtendríamos que, cada una de las áreas de tono oscuro del gráfico

[150] El área entre la línea de igualdad, p, y $L_g(p)$ queda pues distorsionada por el factor $\left(n_g^2.\mu_g\right)/\left(n^2.\mu\right)$ una vez ha sido dibujada sobre $L(p)$.

7.2 entre $L_B(p)$ y $L(p)$, que representa la contribución a la desigualdad global de cada uno de los grupos, no es más que

$$\frac{1}{2}\frac{n_g^2\mu_g}{n^2\mu}GINI_g$$

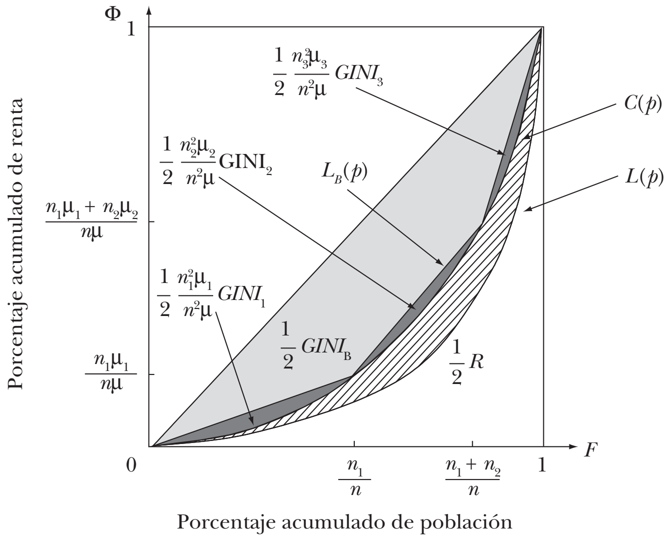
y, en consecuencia, su suma no es más que 1/2 $GINI_W$ en la descomposición (7.4).

Consideremos ahora el caso general en el que los grupos de la partición pueden tener rentas que se solapan, como en el panel *b* del gráfico 7.1. Nuestra distribución de renta, **y**, puede ser ordenada ahora con arreglo a dos criterios diferentes y no coincidentes. Por una parte, podemos considerar la ordenación no decreciente sin considerar la partición de la población en grupos, esto es $y_1 \leq y_2 \leq y_3 \leq \ldots \leq y_{n-1} \leq y_n$. Por otra, podemos considerar una ordenación no decreciente en dos etapas. En primer lugar, los grupos se ordenan según el vector de rentas medias, al igual que en el caso anterior, $\mu_1 \leq \mu_2 \leq \ldots \leq \mu_{G-1} \leq \mu_G$. En segundo lugar, dentro de cada grupo realizamos una ordenación no decreciente del vector de rentas de dicho grupo, es decir, para cada $\mathbf{y}^g = \left(y_1^g, y_2^g, \ldots, y_{n_g}^g\right)$ se cumple que $y_1^g \leq y_2^g \leq y_3^g \leq \ldots \leq y_{n_g-1}^g \leq y_{n_g}^g$.

Los vectores de renta resultantes de ambas ordenaciones son diferentes si existen solapamientos de renta entre grupos, pero coinciden si no existen dichos solapamientos. Esta nueva situación puede observarse en el gráfico 7.3, equivalente al anterior gráfico 7.2. Podemos observar tres curvas con la siguiente interpretación:

1) Al igual que antes, $L_B(p)$ representa la curva de Lorenz de la distribución suavizada, en la que cada individuo recibe la renta media del grupo al que pertenece, μ_g. Por definición el área (representada por el tono más claro) entre la línea de igualdad, p, y $L_B(p)$, no es más que 1/2 $GINI_B$.
2) La curva $C(p)$ es consecuencia de la introducción de desigualdades dentro de cada grupo. Los porcentajes de renta acumulados (ordenadas) que representa esta curva no se corresponden con la ordenación no decreciente de **y**, sino que se corresponden a la segunda etapa después de la ordenación de los diferentes grupos según sus valores medios.

GRÁFICO 7.3: Descomposición de Gini, partición que se solapa



Fuente: Elaboración propia.

No se trata, por tanto, de una curva de Lorenz, puesto que las ordenadas no se corresponden con una ordenación no decreciente del vector de renta, por este motivo estas curvas se las conocen con el nombre de *curvas de concentración*.

Por construcción, una curva de concentración nunca estará por debajo de la curva de Lorenz correspondiente.[151] En nuestro ejemplo, si existen rentas de los diferentes grupos que se solapan entre sí, entonces *C(p)* estará estrictamente por encima de la curva de Lorenz correspondiente, *L(p)*, en al menos algún punto.

---

[151] Recordemos del capítulo 2 que una curva de Lorenz representa porcentajes acumulados de población en abscisas y porcentajes acumulados de renta en ordenadas, a partir de una ordenación no decreciente del vector de rentas. Si ahora representamos porcentajes acumulados de renta para otra ordenación diferente del vector de renta (no la ordenación no decreciente original), entonces obtenemos la denominada curva de concentración (Davidson y Duclos 1997). Obsérvese que por construcción la curva de Lorenz nunca estará por encima, en ninguno de sus puntos, de cualquier curva de concentración generada a partir del mismo vector de renta (Atkinson 1980; Plotnick 1981). En otras palabras, una curva de concentración representa en ordenadas porcentajes acumulados de renta en una ordenación diferente a la determinada por si, y en consecuencia nunca estará por debajo de la curva de Lorenz correspondiente.

Las áreas de tonalidad más oscura del gráfico 7.3 proceden de las desigualdades dentro de los grupos y, en consecuencia, su suma tiene la misma interpretación ahora que en el gráfico 7.2, de nuevo 1/2 $GINI_W$.

3) Finalmente, la curva *L(p)* representa la curva de Lorenz de la población total. La única diferencia entre *C(p)* y *L(p)* procede de la diferente ordenación en los vectores de renta, como consecuencia de los solapamientos de renta entre los diferentes grupos de la población.[152] El área rayada del gráfico 7.3 es consecuencia, pues, de las reordenaciones entre individuos al pasar de considerar su posición dentro del grupo al que pertenecen, a considerar su posición en relación al total de la población.

En consecuencia, la descomposición del índice de Gini en el caso general puede escribirse como,

$$GINI = \underbrace{\sum_{g=1}^{G} \frac{n_g^2 \mu_g}{n^2 \mu} GINI_g}_{GINI_W} + \underbrace{\frac{1}{2} \frac{1}{n^2 \mu} \sum_{g=1}^{G} \sum_{h=1}^{G} n_g n_h \left| \mu_g - \mu_h \right|}_{GINI_B} + R \qquad (7.5)$$

donde además del componente intergrupos, $GINI_B$, y del componente intragrupos, $GINI_W$, habituales en la literatura, aparece el término residual *R*, necesario para que la igualdad (7.5) se cumpla, lo cual es consecuencia de la existencia de solapamientos entre las rentas de los diferentes grupos en que ha sido dividida la población.[153]

La derivación gráfica de (7.5), debida a Lambert y Aronson (1993),[154] establece que $R \geq 0$, con igualdad solo en el caso de

[152] Esta es la razón por la que *C(p)* no aparecía en el gráfico 7.2, o dicho de otra forma, *C(p)* y *L(p)* eran en realidad la misma curva.

[153] Este tipo de descomposición aditiva para el índice de Gini, en el que aparece un término residual de interacción, también la comparten otros índices de desigualdad. Por ejemplo, la descomposición del índice de Atkinson (1970) propuesta por Blackorby, Donaldson y Auersperg (1981) desde un enfoque del bienestar también tiene un término adicional de interacción, aunque carece de la interpretación que exponemos en el texto para el índice de Gini.

[154] Enfoques alternativos basados en el álgebra matricial pueden encontrase en Pyatt (1976) y Silber (1989) y en el análisis combinatorio en Bhattacharya y Mahalanobis (1967) y Mookherjee y Shorrocks (1982).

ausencia de solapamientos. Por tanto, podemos establecer la siguiente desigualdad con carácter general,

$$GINI \geq \sum_{g=1}^{G} \frac{n_g^2 \mu_g}{n^2 \mu} GINI_g + GINI_B \tag{7.6}$$

con igualdad solo en el caso de ausencia de solapamientos entre las rentas de los diferentes grupos.

Obsérvese que si $GINI_g = 0, \forall g$, de forma que toda la desigualdad proviene de las diferencias intergrupos, entonces $GINI = GINI_B$, puesto que no hay solapamientos. Sin embargo, cuando $GINI_B = 0$ porque $\mu_g = \mu, \forall g$, y toda la desigualdad proviene de las diferencias intragrupos, entonces

$$GINI > \sum_{g=1}^{G} \frac{n_g^2 \mu_g}{n^2 \mu} GINI_g$$

ya que, en este caso, no se cumple la propiedad de no solapamiento entre las distribuciones de los diferentes grupos.[155]

En cierta forma el término residual R recoge tanto un efecto intergrupos, ya que trata de medir un fenómeno entre los diferentes grupos de la población, su grado de solapamiento, como un efecto intragrupos, ya que se genera como consecuencia de la desigualdad dentro de los grupos.

En cualquier caso, el término R posee una interpretación económica interesante en términos de la homogeneidad de la sociedad (Yitzhaki 1988, 1994; Yitzhaki y Lerman 1991; Lambert y

---

[155] Todavía es posible acotar un poco más la desigualdad (7.6) en términos de la relación entre el índice de Gini para el total de la población y una media ponderada por las proporciones de renta o población de los índices de Gini de los diferentes grupos. En este sentido es posible demostrar que (Zagier 1983),

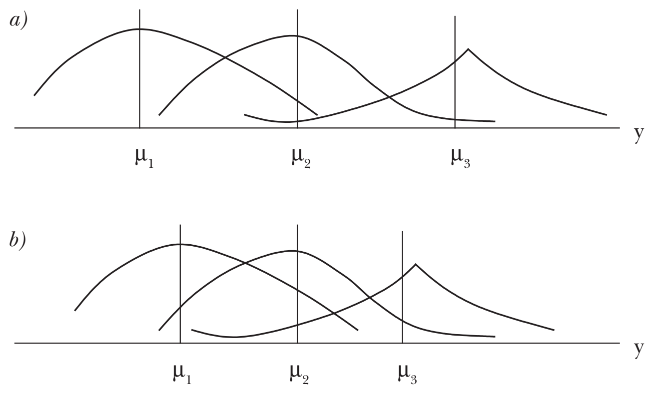
$$GINI \geq \sum_{g=1}^{G} \frac{n_g}{n} GINI_g \quad \text{y} \quad GINI \geq \sum_{g=1}^{G} \frac{n_g \mu_g}{n\mu} GINI_g$$

Por lo tanto, el índice de Gini es siempre mayor o igual que una media ponderada de los índices de Gini de los diferentes grupos. Una igualdad en sentido estricto en estos casos se obtiene solo cuando las distribuciones de los diferentes grupos son idénticas, de forma que el agregado es simplemente una réplica de la distribución de cada uno de los grupos. En cualquier otro caso, incluso si $GINI_B = 0$, el índice de Gini para el conjunto de la población será estrictamente mayor que una media ponderada de los índices de Gini de los diferentes grupos, ya consideremos proporciones de renta o proporciones de población como ponderaciones.

Aronson 1993). La razón es simple, cuanto mayor sea *R* en (7.5) en relación a los otros dos términos de la descomposición, más homogénea será la sociedad, o dicho de otra forma, menos dependerá la renta de un individuo elegido al azar del grupo al que pertenezca. En general, cuanto más cercanas estén entre sí las medias de los diferentes grupos, mayor tenderá a ser el grado de solapamiento y, en consecuencia, mayor la homogeneidad de la población. Esto puede ser visto de forma intuitiva a partir del gráfico 7.4 tomado de Milanovic (2005).

Consideremos los tres grupos de la partición anterior tal que, $\mu_1 < \mu_2 < \mu_3$. La dispersión alrededor de cada una de estas medias refleja la desigualdad dentro de cada uno de los grupos. Al igual que en el gráfico 7.3, la representación del gráfico 7.4 muestra cierto grado de solapamiento entre las rentas de los diferentes grupos. Supongamos ahora que se produce una disminución del componente intergrupos, $GINI_B$, debido a un acercamiento entre las medias, mientras que se mantienen las desigualdades internas. El gráfico 7.4 muestra la nueva situación en el panel *b*. Se observa como $GINI_B$ disminuye y $GINI_W$ se mantiene, sin embargo también nos percatamos de un incremento del solapamiento de rentas entre grupos, *R* aumenta, de forma que el efecto final de esta disminución del componente intergrupos sobre el índice de Gini global no queda claro. Este sencillo ejemplo muestra cómo

GRÁFICO 7.4: Descomposición de Gini y homogeneidad de la población



Fuente: Milanovic (2005).

una distribución suavizada relativamente igualitaria tenderá a ir asociada a un término residual, R, relativamente elevado.[156]

Es precisamente el comportamiento del término R en (7.5) el que explica el comportamiento del índice de Gini en el ejemplo del principio de este epígrafe.

7.5. Descomponibilidad a partir de la expresión de la renta en factores aditivos

El hecho de que la renta, y, no sea un todo homogéneo, sino la suma de una serie de factores tales como la renta del trabajo, del capital, transferencias, impuestos, etc., nos ofrece la posibilidad de efectuar un análisis de descomposición alternativo al que acabamos de examinar. En este segundo tipo de descomponibilidad trataremos de determinar qué parte de la desigualdad global puede atribuirse a la desigualdad observada en cada uno de los distintos tipos de renta. De esta forma buscamos una estimación cuantitativa de cuáles son los determinantes más importantes de la desigualdad, desde un punto de vista diferente.

Sea N una sociedad compuesta por n individuos con una distribución de renta dada por el vector $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$. Supongamos ahora que para cada individuo su renta, y_i, puede ser expresada como la suma de K factores diferentes de renta,[157] $y_i = \Sigma_{k=1}^{K} y_{ik}$, de forma que la distribución de renta puede ser expresada como una matriz de orden $n \times K$,

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1k} & \cdots & y_{1K} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2k} & \cdots & y_{2K} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n1} & y_{n2} & \cdots & y_{nk} & \cdots & y_{nK} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_1 & \mathbf{y}_2 & \cdots & \mathbf{y}_k & \cdots & \mathbf{y}_K \end{bmatrix}$$

[156] Obsérvese que, en general, el término $GINI_W$ será relativamente pequeño ya que las ponderaciones $n_g^2 \mu_g / n^2 \mu$ lo son.

[157] Aunque ya consideramos en la introducción que $y \in \mathbb{R}_{++}$, esta restricción es mucho menos atractiva cuando hablamos de los factores de renta, ya que no todos los individuos tienen por qué obtener renta de todos los factores considerados. Por otra parte, es posible pensar en situaciones en las que dichos factores son negativos, como cuando consideramos los impuestos.

Obsérvese que

$$\mu = \frac{1}{n}\Sigma_{i=1}^{n} y_i = \frac{1}{n}\Sigma_{i=1}^{n}\Sigma_{k=1}^{K} y_{ik} = \Sigma_{k=1}^{K}\left(\frac{1}{n}\Sigma_{i=1}^{n} y_{ik}\right) = \Sigma_{k=1}^{K}\mu_k$$

y que si consideramos la distribución de renta ordenada de forma no decreciente, $y_1 \leq y_2 \leq y_3 \leq \ldots \leq y_{n-1} \leq y_n$, entonces los diferentes factores se encuentran ordenados de acuerdo con la distribución de la renta total, y no de acuerdo con el factor mismo.

En primer lugar, debemos mencionar que no vamos a obtener ahora resultados tan nítidos como los conseguidos al considerar la partición por subgrupos de población analizada anteriormente, por lo que nos limitaremos a ofrecer los resultados de mayor aplicación práctica. La razón puede ser entendida fácilmente considerando la varianza y $K = 2$, por simplicidad. En este caso,

$$V(\mathbf{y}) = V(\mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2) = V(\mathbf{y}_1) + V(\mathbf{y}_2) + 2Cov(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2) \tag{7.7}$$

De esta forma determinar qué parte de la desigualdad en la distribución de la renta corresponde a cada factor exige asignar a dicho factor no solo sus efectos directos sobre la desigualdad global, las varianzas en (7.7), sino también sus efectos indirectos, el término de covarianza en (7.7), y estos últimos pueden ser positivos o negativos. En consecuencia, dado que no existe una forma única de asignar los efectos indirectos, la descomposición de un índice particular, caso de ser posible, no será en general única. Por otra parte, si la contribución del factor k a la desigualdad global es la suma de sus efectos directos e indirectos, la desigualdad global no será, en general, igual a la suma de las desigualdades en cada uno de los factores. En el ejemplo anterior ello solo sería así si $Cov(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2) = 0$, es decir, si los factores no están correlacionados.

En general con K factores de renta,

$$V(\mathbf{y}) = V\left(\sum_{k=1}^{K}\mathbf{y}_k\right) = \sum_{k=1}^{K} V(\mathbf{y}_k) + \sum_{k=1}^{K}\sum_{l \neq k} Cov(\mathbf{y}_k, \mathbf{y}_l) \tag{7.8}$$

Si $Cov(\mathbf{y}_k, \mathbf{y}_l) = 0$, $\forall k \neq l$, entonces $V(\mathbf{y}_k)$ es la contribución obvia del factor k a la desigualdad global, pero si $Cov(\mathbf{y}_k, \mathbf{y}_l) \neq 0$, para algún $k \neq l$ entonces deberemos arbitrar una regla de asignación de estos efectos indirectos a las contribuciones de los diferentes factores, si nos restringimos a descomposiciones que proporcionen un término por cada factor de renta.

En el caso de la varianza, (7.8), una forma *razonable* de proceder, en ausencia de información adicional, es asignar a cada factor, digamos k, la mitad del valor de todos los efectos interacción que implican a dicho factor. Puesto que,

$$V(\mathbf{y}) = V\left(\sum_{k=1}^{K} \mathbf{y}_k\right) = \sum_{k=1}^{K}\sum_{l=1}^{K} Cov(\mathbf{y}_k, \mathbf{y}_l) \tag{7.9}$$

bajo esta regla de asignación, la contribución del factor k a la desigualdad global viene dada por,

$$\sum_{l=1}^{K} Cov(\mathbf{y}_k, \mathbf{y}_l) = Cov(\mathbf{y}_k, \mathbf{y}) \tag{7.10}$$

es decir la covarianza entre la distribución del factor correspondiente, $\mathbf{y}_k$, y la renta total, $\mathbf{y}$.

Algunas observaciones son de interés:

1) Dichas contribuciones pueden tomar valores nulos o negativos, cuando $Cov(\mathbf{y}_k, \mathbf{y}) \leq 0$; y valores negativos indican que el factor k actúa como compensador de las diferencias en renta derivadas de los otros factores.
2) Salvo en casos muy particulares, estas contribuciones no coinciden con el índice de desigualdad aplicado al factor k, $V(\mathbf{y}_k)$.
3) La contribución porcentual de cada factor a la desigualdad global, que es todo lo que en la práctica importa, viene dada por el cociente entre la contribución del factor correspondiente y el índice global de desigualdad, $\left[Cov(\mathbf{y}_k, \mathbf{y})\right] / \left[V(\mathbf{y})\right]$.
4) Resulta obvio que la suma de todas las contribuciones (7.10) nos proporcionan el índice global de desigualdad, $V(\mathbf{y})$, y en consecuencia las contribuciones porcentuales anteriores suman la unidad.
5) Desde el punto de vista del cálculo, la contribución (7.10) se corresponde con la suma de los elementos de una fila (o

una columna) de la matriz de covarianzas entre los factores que componen la renta.

6) Estamos interesados en descomposiciones no triviales, en el sentido de que la contribución a la desigualdad de un determinado factor depende de la distribución de dicho factor de renta entre la población. Siempre es posible obtener una descomposición trivial en el que la contribución porcentual del factor k venga dada por μ_k/μ, es decir, por la proporción de renta de dicho factor dentro de la renta total, una medida de su importancia en el agregado. Dicha contribución es independiente de la distribución del propio factor y, en consecuencia, carece de interés.

Aunque, como veremos a continuación, la regla de asignación de los efectos indirectos utilizados en la descomposición de $V(\mathbf{y})$ tiene una cierta justificación, no deja de ser arbitraria.

Ya observamos, sin embargo, que la varianza no es un índice de desigualdad relativo, no verifica la propiedad (1.6), sino un índice de desigualdad absoluto. Para evitar este problema vimos, en el capítulo 2, cómo podemos acudir al coeficiente de variación, CV, al que elevado al cuadrado podemos aplicar el mismo razonamiento que para la varianza,[158]

$$CV^2 = \frac{V(\mathbf{y})}{\mu^2} = \frac{\Sigma_{k=1}^K \Sigma_{l=1}^K Cov(\mathbf{y}_k, \mathbf{y}_l)}{\mu^2} \tag{7.11}$$

lo que permite definir la contribución del factor k a la desigualdad global en el caso del CV^2 como,

$$\frac{\Sigma_{l=1}^K Cov(\mathbf{y}_k, \mathbf{y}_l)}{\mu^2} = \frac{Cov(\mathbf{y}_k, \mathbf{y})}{\mu^2} \tag{7.12}$$

Resulta interesante observar que, al igual que en el caso de la descomposición por subgrupos de población, las contribuciones

[158] Un resultado relacionado permite escribir CV^2 en función de los CV de los factores de renta y la correlación entre dichos factores,

$$CV^2 = \frac{V(\mathbf{y})}{\mu^2} = \sum_{k=1}^K \frac{\mu_k^2}{\mu^2} CV^2(\mathbf{y}_k) + \sum_{k=1}^K \sum_{l \neq k} \frac{\mu_k \mu_l}{\mu^2} CV(\mathbf{y}_k) CV(\mathbf{y}_l) Cor(\mathbf{y}_k, \mathbf{y}_l)$$

porcentuales de cada uno de los factores a la desigualdad global son idénticos para CV^2 que para σ^2. Por tanto, mientras que si bien es cierto que σ^2 no es una medida de desigualdad independiente de la escala, sus contribuciones en la descomposición factorial analizada sí lo son.

También observamos en el capítulo 2 cómo una forma alternativa de hacer la varianza independiente de la escala consistía en tomar transformaciones logarítmicas de rentas y considerar la varianza tras dicha transformación, ya sea mediante la varianza de los logaritmos, *VL*, o la varianza logarítmica, *LV*. Sin embargo, puesto que el logaritmo de una suma no es igual a la suma de los logaritmos, estas medidas de desigualdad no admiten una descomposición factorial en este caso.

Estas descomposiciones *razonables*, que se derivan de la propia forma funcional del índice en cuestión, se sustentan sobre una regla arbitraria de asignación de los efectos indirectos. Sin embargo, otras reglas podrían determinar descomposiciones alternativas igualmente válidas y quizás más atractivas según en qué contextos. Ello nos lleva a la conclusión de que, en general, las contribuciones porcentuales de los distintos factores a la desigualdad no están determinadas de forma única.

Llamemos $S_k(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_K; K)$ a la contribución del factor k a la desigualdad global. Shorrocks (1982) estableció una serie de propiedades que debe cumplir $S_k(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_K; K)$ en un intento de acotar las posibles descomposiciones. En concreto suponemos que las contribuciones verifican las siguiente propiedades:

— *Continuidad:* la función $S_k(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_K; K)$ es continua en $\mathbf{y}_k$.

— *Tratamiento simétrico de los factores:* los diferentes factores son tratados de forma simétrica, de forma que una permutación de los mismos no altera el valor de sus participaciones.

— *Independencia del nivel de desagregación:* la contribución de cualquier factor no depende del cuántos otros factores sean considerados. En consecuencia solo necesitamos considerar una partición de $\mathbf{y}$ entre $\mathbf{y}_1$ e $\mathbf{y} - \mathbf{y}_1$:

$$S_1(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_K; K) = S_1(\mathbf{y}_1, \mathbf{y} - \mathbf{y}_1; 2) = S(\mathbf{y}_1, \mathbf{y})$$

Y dado que los factores son tratados de forma simétrica,

$$S_k(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_K; K) = S(\mathbf{y}_k, \mathbf{y})$$

donde $S(\mathbf{y}_k, \mathbf{y})$ es una función continua.

En consecuencia, la contribución del factor k a la desigualdad solo depende de la distribución del factor k y la distribución del total de renta.

— *Descomposición consistente:*[159]

$$\sum_{k=1}^{K} S_k(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_k; K) = \sum_{k=1}^{K} S_k(\mathbf{y}_k, \mathbf{y}) = I(n, \mathbf{y})$$

de forma que la suma de las contribuciones es igual al total de la desigualdad observada.[160]

Con estas propiedades, relativamente débiles y naturales en este contexto, Shorrocks (1982) demuestra el siguiente resultado.

Teorema (7.3)

Dada una función $I : \Im \mapsto \mathbb{R}$ que verifica las propiedades (1.1), (1.2), y (1.5) y las anteriores propiedades para las contribuciones de los factores, entonces:

$$S_k(\mathbf{y}_k, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{n} a_i(\mathbf{y}) y_{ik}$$

donde

$$I(n, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{n} a_i(\mathbf{y}) . y_i$$

[159] Blackorby y Primont (1978) y Shorrocks (1982) analizan las consecuencias de relajar esta propiedad introduciendo una consistencia débil similar a la propiedad (7.1) en el caso de la descomponibilidad por subgrupos de población.

[160] Si imponemos una propiedad de normalización, de forma que $S_k(\mu_k \iota_n, \mathbf{y}) = 0$, lo que no siempre es deseable (Shorrocks 1982), entonces un problema práctico con la presentación de resultados es que un factor que posea una distribución igualitaria presenta una contribución nula a la desigualdad global. Puede argumentarse, sin embargo, que en este caso dicho factor contribuye *negativamente* a la desigualdad, ya que su constancia tiende a reducir la desigualdad debida al resto de factores. Una forma de captar esta idea es definir las contribuciones relativas respecto a $I(n,\mathbf{y})$, es decir,

$$\sum_{k=1}^{K} \left(S_k(\mathbf{y}_k, \mathbf{y}) - \frac{\mu_k}{\mu} I(n, \mathbf{y}) \right) = 0$$

Demostración

Véase Shorrocks (1982, sección 3, teorema 1).

Este teorema muestra que $S(\mathbf{y}_k, \mathbf{y})$ debe ser una suma ponderada del factor de renta *k*, donde las ponderaciones vienen determinadas por la forma funcional del índice de desigualdad utilizado en la descomposición. Nada sugiere que esta descomposición exista, pero si un índice de desigualdad puede ser escrito como una suma ponderada de las rentas individuales, entonces la contribución a la desigualdad del factor *k* es la misma suma ponderada aplicada a las rentas del factor *k*.

Así, por ejemplo, puesto que podemos escribir

$$\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \mu)y_i$$

ello sugiere en este caso $a_i(\mathbf{y}) = (1/n)(y_i - \mu)$, con lo que la contribución del factor *k* es simplemente (7.10),

$$S_k(\mathbf{y}_k, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{n} a_i(\mathbf{y})y_{ik} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \mu)y_{ik} = Cov(\mathbf{y}_k, \mathbf{y})$$

De esta forma el procedimiento puede ser aplicado a todos los índices de desigualdad que puedan ser expresados como $I(n, \mathbf{y}) = \Sigma_{i=1}^{n} a_i(\mathbf{y})y_i$. Lo que incluye, además de la varianza y el coeficiente de variación, a la familia de índices de entropía generalizados y el índice de Gini y su generalización, pero deja fuera la familia de índices de Atkinson (1970). Esto es lo que Shorrocks (1982) denomina la descomposición *natural* de un índice.

Aunque el teorema (7.3) parece proporcionar un resultado muy fuerte, su debilidad se pone de manifiesto cuando observamos que la representación funcional de un índice no está determinada de forma única[161] y, en consecuencia, la descomposición natural no es la única posible. En otras palabras, la contribución a la desigualdad global de los diferentes factores que componen la renta agregada no está unívocamente determinada. Este resultado es, en cierta

[161] La expresión $I(n, \mathbf{y}) = \Sigma_{i=1}^{n} a_i(\mathbf{y}).y_i$ no determina los coeficientes $a_i(\mathbf{y})$ de forma única.

forma, descorazonador y requiere cierta cautela en la interpretación de las descomposiciones anteriores, que pueden ser útiles en ciertos contextos pero totalmente estériles en otros.

Imponiendo restricciones adicionales sobre las contribuciones $S(\mathbf{y}_k, \mathbf{y})$, Shorrocks (1982) consigue derivar una regla de descomposición única. Según esta regla, las contribuciones porcentuales de cada uno de los factores a la desigualdad global son independientes del índice de desigualdad concreto y se corresponden con las contribuciones derivadas de la descomposición natural de la varianza. Esto proporciona cierta justificación para la utilización del CV^2 como medida de desigualdad desde este punto de vista, aunque las restricciones necesarias para ello sean de difícil justificación.[162]

Al contrario que con la descomposición por subgrupos de población, la descomposición factorial analizada en esta sección no ha utilizado en la práctica los índices de Theil (1967), ni la familia de índices de entropía generalizados, excepto el caso $\theta = 2$, $I_2 = 1/2CV^2$. Sin embargo, una gran parte de la literatura ha centrado sus esfuerzos en aplicar este tipo de descomposición al índice de Gini (Fei, Ranis y Kuo 1978; Fields 1979; Pyatt, Chen y Fei 1980; Lerman y Yitzhaki 1985; Silber 1989). En primer lugar, resulta de interés establecer la relación entre el índice de Gini para la renta agregada y los índices de Gini para cada uno de sus componentes. Utilizando la propiedad

$$\left|\Sigma_{i=1}^{n} a_i\right| \leq \Sigma_{i=1}^{n} \left|a_i\right|$$

podemos escribir

[162] En concreto, además de las ya mencionadas, Shorrocks (1982) requiere, para cada factor, una propiedad de simetría respecto a la población y otra de normalización (si un factor está igualitariamente distribuido, su contribución a la desigualdad debe ser nula). Pero la propiedad clave final para obtener el resultado de unicidad (Shorrocks 1982, teorema 6) impone que la contribución de dos factores a la desigualdad global sea la misma si la distribución de renta procedente de ambos factores es idéntica y si ambos factores suman el total de renta.

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left|y_i - y_j\right| = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left|\sum_{k=1}^{K} y_{ik} - \sum_{k=1}^{K} y_{jk}\right|$$
$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left|\sum_{k=1}^{K}(y_{ik} - y_{jk})\right| \tag{7.13}$$
$$\leq \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{K}\left|y_{ik} - y_{jk}\right|$$

y puesto que el índice de Gini para cada factor de renta viene dado por

$$G(\mathbf{y}_k) = \frac{1}{2}\frac{1}{\mu_k n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left|y_{ik} - y_{jk}\right|$$

podemos escribir

$$G(\mathbf{y}) = \frac{1}{2}\frac{1}{\mu n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left|y_i - y_j\right|$$
$$\leq \frac{1}{2}\frac{1}{\mu n^2}\sum_{k=1}^{K}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left|y_{ik} - y_{jk}\right| \tag{7.14}$$
$$= \sum_{k=1}^{K}\frac{\mu_k}{\mu}G(\mathbf{y}_k)$$

Este resultado nos dice que el índice de Gini para el agregado es menor o igual que una media ponderada de los índices de Gini para cada uno de los factores,

$$G(\mathbf{y}) \leq \sum_{k=1}^{K}\frac{\mu_k}{\mu}G(\mathbf{y}_k)$$

donde las ponderaciones suman la unidad y reflejan la importancia relativa de cada factor en el agregado. Por tanto, información sobre la distribución de los diferentes factores nos permite obtener una cota superior a la desigualdad global observada en la distribución de la renta, cuando dicha desigualdad es medida a través del índice de Gini. Puede demostrarse que cuanto mayor sea la correlación entre los rankings de la renta agregada y sus factores, más cercano estará $G(\mathbf{y})$ de

$$\sum_{k=1}^{K}\frac{\mu_k}{\mu}G(\mathbf{y}_k)$$

y que una igualdad en sentido estricto se obtiene, si y solo si el ranking en el agregado es el mismo que para cada uno de los factores, *k,* que componen la renta.

La descomposición natural para el índice de Gini, en el sentido del teorema (7.3), se obtiene fácilmente recordando que, a partir de (3.15), podemos escribir

$$G(\mathbf{y}) = \frac{2}{\mu n^2} \sum_{i=1}^{n} \left(i - \frac{n+1}{2} \right) y_i$$

lo que sugiere

$$a_i(\mathbf{y}) = \frac{2}{\mu n^2} \left(i - \frac{n+1}{2} \right)$$

y en consecuencia,

$$S(\mathbf{y}_k, \mathbf{y}) = \frac{2}{\mu n^2} \sum_{i=1}^{n} \left(i - \frac{n+1}{2} \right) y_{ik} \tag{7.15}$$

Definiendo

$$\bar{G}(\mathbf{y}_k) = \frac{2}{\mu_k n^2} \sum_{i=1}^{n} \left(i - \frac{n+1}{2} \right) y_{ik} \tag{7.16}$$

podemos escribir (7.15) como $S(\mathbf{y}_k, \mathbf{y}) = \frac{\mu_k}{\mu} \bar{G}(\mathbf{y}_k)$, de forma que

$$G(\mathbf{y}) = \sum_{k=1}^{K} \frac{\mu_k}{\mu} \bar{G}(\mathbf{y}_k) \tag{7.17}$$

Obsérvese que $\bar{G}(\mathbf{y}_k)$ no es un índice de Gini, puesto que los pesos en las ponderaciones de y_{ik} en (7.16) no se corresponden con el ranking derivado de la distribución del factor *k*, sino con el ranking derivado de la distribución de la renta agregada. Se trata pues de *índices de concentración*.

Debe observarse que, aunque no aparecen términos de interacción en la descomposición (7.17), estos efectos han sido implícitamente asignados entre las contribuciones de los diferentes factores al ordenar los elementos de $\mathbf{y}_k$ de acuerdo con el ranking proporcionado por **y**. El problema es que la asignación de dichos efectos no es explícita a partir de la obtención de (7.17).

Al igual que para el resto de índices, la utilización de la descomposición natural de *G*, (7.17), para examinar la contribución de los diversos factores de renta a la desigualdad global, requiere de dos condiciones para que tenga sentido. En primer lugar, el índice de Gini debe considerarse una medida de desigualdad apropiada, lo cual es adecuado en vista de sus propiedades y, en segundo lugar, la regla de descomposición natural, que procede de la forma en la que el índice de Gini es obtenido, debe ser aceptable; en otras palabras la ordenación de los diferentes factores, de acuerdo con el ranking proporcionado por la renta agregada debe ser razonable. Esta última condición depende del problema concreto que estemos tratando, pero en general no tiene porqué ser adecuada. Aplicaciones concretas donde puede ser útil mantener el ranking proporcionado por la renta agregada pueden encontrarse en la literatura sobre los efectos de la imposición y la medición de la equidad de un sistema redistributivo, donde la renta agregada debe entenderse antes de impuestos (Kakwani 1977; Atkinson 1980; Plotnick 1981, 1982; Duclos 1993; Lerman y Yitzhaki 1995; Rabadán y Salas 1996; Davidson y Duclos 1997, 2000); sin embargo, son difíciles de encontrar en otros contextos, en los que el mantenimiento de la ordenación para los diversos factores, según el ranking proporcionado por la renta agregada, puede ser una arbitrariedad sin posible justificación.

Finalizamos esta sección con una cuestión de interpretación que, dadas las dificultades asociadas a este tipo de descomposición, puede ayudar a clarificar qué tipo de índices pueden ser descompuestos de forma útil. Considérese la afirmación: «El factor k contribuye en una cuantía C_k a la desigualdad global observada» (Shorrocks 1982). Esta afirmación puede ser interpretada en diferentes direcciones, las dos más obvias son las siguientes:

1) La desigualdad que observaríamos si el factor k fuera el único origen de las diferencias de renta, esto es $C_k^1 = I\left(\mathbf{y}_k + (\mu - \mu_k)\iota_n\right)$.
2) La cuantía en la que se reduciría la desigualdad si las diferencias de renta en el factor k fueran eliminadas, $C_k^2 = I(\mathbf{y}) - I\left(\mathbf{y} - \mathbf{y}_k + \mu_k\iota_n\right)$.

En la primera interpretación evaluamos la desigualdad de una distribución hipotética en la que la distribución del factor k permanece invariante, pero para el resto de factores tenemos una distribución igualitaria. Si C_k^1 es elevado diremos que el factor k presenta una contribución importante a la desigualdad global.

En la segunda interpretación comparamos la desigualdad observada con la que se deriva de una distribución hipotética en la que las diferencias debidas al factor k han sido eliminadas, asignando a cada individuo el valor medio derivado de dicho factor. Si esta eliminación origina una caída importante en la desigualdad global diremos que el factor k presenta una contribución importante a la misma. Obsérvese que C_k^2 puede ser negativo, en cuyo caso el factor k tiende a compensar las diferencias originadas por los otros factores.

Considerando de nuevo la varianza como índice de desigualdad, obtenemos:

1) $C_k^1 = V\left(\mathbf{y}_k + (\mu - \mu_k)\iota_n\right) = V(\mathbf{y}_k)$, es decir, esta interpretación asigna como contribución del factor k solo la contribución directa, sin ningún tipo de consideración sobre los efectos indirectos.
2) $C_k^2 = V(\mathbf{y}) - V\left(\mathbf{y} - \mathbf{y}_k + \mu_k \iota_n\right) = 2.Cov(\mathbf{y}, \mathbf{y}_k) - V(\mathbf{y}_k)$, es decir, esta interpretación asigna como contribución del factor k la contribución directa más todos los efectos indirectos.[163]

Resulta interesante observar como, salvo en el caso en que los factores de renta estén mutuamente incorrelacionados, $C_k^1 \neq C_k^2$ y

$$V(\mathbf{y}) \neq \begin{cases} \Sigma_{k=1}^K C_k^1 \\ \Sigma_{k=1}^K C_k^2 \end{cases}$$

por lo que estas interpretaciones intuitivas no generan una descomposición consistente. Finalmente la relación entre la descomposición natural de σ^2 y estas dos interpretaciones viene dada por,

$$S_k(\mathbf{y}_k, \mathbf{y}) = Cov(\mathbf{y}_k, \mathbf{y}) = \frac{1}{2}\left(C_k^1 + C_k^2\right)$$

[163] Obsérvese que $2.Cov(\mathbf{y}, \mathbf{y}_k)$ representa la suma de los elementos de la fila y la columna de la matriz de covarianzas entre los factores que componen la renta, por lo que debemos restar $V(\mathbf{y}_k)$ para no incluir en una doble contabilización de los efectos directos.

Aunque la misma relación se obtiene para CV^2, lamentablemente es cierto que, para la mayoría de índices de desigualdad, es difícil establecer una relación entre $S(\mathbf{y}_k, \mathbf{y})$ y las interpretaciones C_k^1 y C_k^2, lo que sugiere que la descomposición factorial estudiada en este epígrafe sólo es satisfactoria para un número limitado de índices de desigualdad.

SEGUNDA PARTE

DE LA MEDICIÓN DE LA DESIGUALDAD A LA ESTIMACIÓN DEL BIENESTAR SOCIAL

En esta parte del estudio vamos a adoptar un acercamiento, esencialmente normativo, del análisis de la desigualdad y proponer una reformulación del mismo, que permita realizar aproximaciones a la estimación del bienestar social cuando introducimos consideraciones distributivas. La idea esencial es determinar formas consistentes de evaluar el bienestar asociado a una distribución de renta, cuando tanto el tamaño como la dispersión son considerados como aspectos relevantes.

Para comenzar la discusión (capítulo 8) analizaremos algunas de las deficiencias conceptuales que plantea el enfoque normativo de Dalton-Atkinson. Veremos que la idea de renta igualitaria equivalente generalizada, propuesta por Sen, presenta ventajas en este sentido y permite la definición de una medida de bienestar muy natural, que consiste en la renta total multiplicada por uno, menos un índice de desigualdad. De esta forma, el bienestar resulta ser una transformación lineal negativa de la desigualdad, y viceversa.

En el capítulo 9 profundizamos en esta línea de análisis, a partir del concepto de *función de evaluación social*, *V(y)*, que es una particularización de la función de bienestar social en la que suponemos, de entrada, que la función de evaluación es homogénea. Con ello garantizamos una relación biunívoca entre funciones de bienestar e índices de desigualdad que, en otro caso, no está asegurada. Esta función constituye una aplicación del espacio de distribuciones de renta en los números reales, $V : \Im \mapsto \mathbb{R}$, que permite expresar la valoración social de un vector de rentas como una suma ponderada de las mismas. Los coeficientes de ponderación corresponden a las valoraciones marginales sociales de los distintos individuos, en la distribución de renta de referencia. Distintas fórmulas de ponderación conducen a diferentes funciones de evaluación social, de suerte que los juicios de valor, presentes en nuestra valoración del bienestar, aparecen reflejados en los criterios de ponderación de las rentas de los individuos.

El capítulo 10 analiza una función de evaluación social particular: aquella que consiste en medir el bienestar como la renta total multiplicada por uno, menos el (primer) índice de Theil. Tras axiomatizar este indicador mediante tres sencillas propiedades, se analiza la forma concreta y el significado de la descomponibilidad aditiva en este contexto. Esta descomponibilidad es explotada en el capítulo 11 para analizar un tema especialmente relevante en el estudio normativo del bienestar y la desigualdad: la igualdad de oportunidades. La cuestión de fondo que se plantea aquí es que la distribución de la renta observada puede estar generada tanto por diferentes niveles de esfuerzo de los agentes económicos, como por las circunstancias que restringen la capacidad de acción de los mismos. El objetivo último es llegar a separar de forma coherente la parte de la desigualdad que se debe a la remuneración que el mercado da a los distintos niveles de esfuerzo de aquella otra que supone, genuinamente, un tratamiento asimétrico de los agentes por razones ajenas a sus decisiones. Las propiedades de descomponibilidad del indicador asociado al índice de Theil permiten este análisis cuando los subgrupos de población son construidos convenientemente. Se sugiere aquí alguna extensión interesante a otro tipo de problemas (discriminación de género y medición del *desarrollo humano*).

8. Desigualdad y bienestar

8.1. Índices normativos y funciones de bienestar social

Los índices normativos de desigualdad del tipo Dalton-Atkinson, que hemos visto en el capítulo 4, poseen un indudable atractivo desde el punto de vista del análisis económico, dado que vinculan el concepto de desigualdad económica con la pérdida de bienestar social. No obstante, estos índices están sujetos a importantes críticas relativas a la coherencia de su base conceptual. Nos referiremos ahora a estas críticas, centrándonos en tres aspectos:

1) Desigualdad en renta *versus* desigualdad en bienestar.
2) Correspondencia entre índices de desigualdad y funciones de bienestar social.
3) Pertinencia del empleo de funciones de bienestar social como base de comparación.

Veamos cada uno de estos aspectos por separado.

Podría argumentarse que si la utilidad o bienestar de los individuos, representada por $u(y)$, es el elemento de referencia clave para valorar las distribuciones de renta, entonces sería natural que nuestro interés se centrara en la desigualdad en términos del bienestar, antes que en la desigualdad en términos de renta. Obviamente, la estimación del primer tipo de desigualdad resulta mucho más difícil que la estimación del segundo tipo, ya que la renta es observable, pero el bienestar no. Sin embargo, si queremos proceder a una evaluación de la disparidad en el bienestar mediante un índice de desigualdad en renta, habremos de asegurarnos que la desigualdad en renta es un buen predictor de la desigualdad en bienestar. Si ello no fuera así, la construcción de índices normativos perdería buena parte de su atractivo.

Zubiri (1985) ha analizado esta cuestión en profundidad, partiendo de la siguiente pregunta: ¿Podemos asegurar que una medida de política económica que reduzca la desigualdad en la distribución de la renta también reducirá la desigualdad en la distribución de bienestar? Los resultados de su análisis son notablemente negativos. En general, no podemos concluir que disminuciones en la dispersión de la renta reduzcan la dispersión en bienestar. Los únicos casos en que la respuesta es positiva requieren de un perfecto conocimiento de las funciones de utilidad de los individuos. Pero entonces, si conocemos las funciones de utilidad de los individuos, ¿qué sentido tiene el proceder a estimaciones indirectas mediante el análisis de la distribución de la renta?

El segundo punto crítico se refiere a la correspondencia entre los índices de desigualdad y las funciones de bienestar social a los que estos se vinculan. Esteban (1976) muestra que no puede establecerse, en general, una correspondencia biunívoca entre índices de desigualdad y funciones de bienestar social. Ello implica que un mismo índice de desigualdad puede deducirse de distintas funciones de bienestar social, de modo que la relación entre los juicios de valor implícitos en una cierta función de bienestar social no resultan, en general, suficientes para determinar qué tipo de índice de desigualdad debemos emplear.

Este tipo de problema no se plantea cuando la función de bienestar social es homogénea de grado uno en las rentas (Blackorby y Donaldson 1978). La consistencia entre índices de desigualdad y funciones de bienestar social requiere así que las funciones de bienestar social sean de tipo cardinal, de modo que al multiplicar por $\lambda > 0$ el vector de rentas hace variar el bienestar social precisamente en esa proporción.[164]

El tercer aspecto discutible se refiere a la pertinencia del uso de funciones de bienestar social del tipo $W_{\boldsymbol{u}}(\mathbf{y}) = W\left[u_1(\mathbf{y}), u_2(\mathbf{y}), \ldots, u_n(\mathbf{y})\right]$ donde W es una función que agrega las preferencias indi-

[164] En realidad se requiere una condición más débil, como prueban Dutta y Esteban (1992).

viduales en preferencias sociales. En particular hay que tomar en consideración las limitaciones inherentes al empleo de funciones de bienestar social como criterio de evaluación de distribuciones de renta. Recordemos que el teorema de imposibilidad de Arrow (1951, 1963) restringe notablemente los tipos de funciones de bienestar social que resultan admisibles: solo si admitimos comparabilidad interpersonal seremos capaces de encontrar funciones de bienestar social *no dictatoriales*. Y aun en este caso aparecen muy pocas posibilidades: funciones de bienestar de tipo *utilitarista*, que es cuando el bienestar social corresponde a la suma de funciones de utilidad individuales, o de tipo leximin, que consiste en que el bienestar social viene determinado por la utilidad del individuo que está peor. Estas posibilidades las podemos encontrar más detalladas en los trabajos de Villar (1988, 2005a).

En estas condiciones, las medidas de desigualdad resultan dependientes directamente de la forma específica de las funciones de utilidad individuales que supongamos y del criterio de agregación de preferencias que escojamos. Ninguna de estas funciones incorpora características descriptivas de la dispersión de la renta, lo que puede dar lugar a resultados indeseables. Para ilustrar este punto, Sen (1973) plantea el siguiente ejemplo: consideremos dos distribuciones de renta extremas, (0, 10) y (5, 5), y supongamos que la función de utilidad individual es proporcional a la renta, es decir, $u(y) = \alpha y$, $\alpha > 0$. Es fácil comprobar que ambas distribuciones tendrán la misma medida de desigualdad de Atkinson, $A_0 = 0$, puesto que para esta función de utilidad $\varepsilon = 0$.

Cabría argumentar que el aspecto paradójico de este ejemplo de Sen (1973) deriva de no tomar funciones de utilidad estrictamente cóncavas, que es lo habitual, como expresión del principio de la utilidad marginal decreciente de la renta. Pero el problema no depende solo de la linealidad de la función de utilidad. La forma de agregación de las utilidades condiciona sustancialmente nuestra valoración del bienestar. Para ilustrar este punto recordemos que el enfoque normativo de Dalton-Atkinson partía de la idea siguiente: si medimos el bienestar agregado de la sociedad asociado a una distribución de renta, **y**, como la suma de utilidades de sus componentes, $W(\mathbf{y}) = \Sigma_{i=1}^{n} u(y_i)$, entonces la solución al programa de maximizar el bienestar social, para un volumen total de renta dado, Y, es tal que, en el óptimo, todas las rentas deben ser iguales y en consecuencia $y_1 = y_2 = \cdots = y_n = \mu$, es decir, una renta dividida igualitariamente. Por tanto, $\Sigma_{i=1}^{n} u(y_i) = n.u(\mu)$ en el óptimo. Sin embargo, este resultado depende crucialmente del supuesto especial de que todos los individuos poseen *la misma* función de utilidad, además de la concavidad de dicha función. En este contexto el utilitarismo resulta absolutamente igualitario.[165] Pero si los individuos poseen diferentes funciones de utilidad, el resultado puede ser muy diferente. En particular, podría fácilmente ocurrir que el óptimo social consistiera en que una gran parte de la renta estuviera en manos de un único individuo, cuando este es muy productivo transformando renta en bienestar. Incluso si las funciones de utilidad son cóncavas, no habría ninguna garantía de igualitarismo, dado que la concavidad podría no compensar el efecto de la heterogeneidad en las utilidades de los individuos.

8.2 La renta igualitaria equivalente generalizada y la medición del bienestar

Sen (1973) propone una reformulación del enfoque Dalton-Atkinson para evitar algunos de los problemas señalados anteriormente, basada en la consideración de una función de bienestar social que dependa directamente de la distribución de la renta. Es decir, una función del tipo $W(\mathbf{y}) = W(y_1, y_2, ..., y_n)$. Las propiedades éticas que queramos que esta función respete pueden ser introducidas directamente como restricciones sobre la función $W(\mathbf{y})$, que puede ser en realidad independiente de las funciones de utilidad individuales. Las dos propiedades esenciales que Sen (1973) requiere a esta función de valoración ya fueron introducidas en el capítulo 5:[166]

[165] En verdad genera el mismo resultado que se derivaría de aplicar una regla leximin, que consiste en valorar las distribuciones de renta mirando únicamente la utilidad del individuo más pobre.

[166] En realidad, Sen (1973) exige además monotonía, pero como veremos esta no es una propiedad esencial en nuestro contexto.

— *Simetría:* dada una sociedad *N*, sean $\left(y_i\right)_{i\in N}$ y $\left(y_i'\right)_{i\in N}$ dos distribuciones de renta tales que $\left(y_i'\right)_{i\in N}$ se obtiene como una permutación de $\left(y_i\right)_{i\in N}$. Entonces, $W\left(\left(y_i\right)_{i\in N}\right)=W\left(\left(y_i'\right)_{i\in N}\right)$.

— *Cuasiconcavidad estricta:* la función $W(\mathbf{y})$ es estrictamente cuasicóncava si, $\forall \mathbf{y}\neq\mathbf{y}'\in\mathbb{R}^n_{++}$ y $\forall\lambda\in(0,1)$ se cumple que: $W\left(\lambda\mathbf{y}+(1-\lambda)\mathbf{y}'\right)>min\left\{W(\mathbf{y}),W(\mathbf{y}')\right\}$.

La simetría requiere que la función solo dependa de los valores de las rentas de modo que, si permutamos las rentas de dos individuos cualesquiera, el bienestar no varía. Esta es, esencialmente, la misma propiedad que exigimos para los índices de desigualdad y que introdujimos en el capítulo 1. La simetría es una propiedad de tratamiento igualitario. Nos dice que la función de bienestar social no es sensible a qué individuo particular ostenta cada una de las rentas. Por ello, si permutamos arbitrariamente la distribución de la renta, el bienestar social no cambia.

La cuasiconcavidad estricta implica que una combinación convexa de dos distribuciones cualesquiera, de un volumen de renta total dado, aumenta de forma inequívoca el bienestar social. O dicho de otro modo, si una distribución de renta es mejor que otra, entonces cualquier combinación convexa de ambas es mejor que la peor; (adviértase que una combinación convexa de dos distribuciones de renta representa un grado de dispersión intermedio entre las dos extremas). Ello equivale a decir que una redistribución de renta siempre aumenta el bienestar social. Esta propiedad está relacionada obviamente con el principio de las transferencias de Dalton que establece que una redistribución reduce la desigualdad.

Sen (1973) define entonces la renta igualitaria equivalente (generalizada), ξ, como el nivel de renta per cápita que, si fuese disfrutado por todos los individuos de la sociedad, produciría el mismo bienestar social que el generado por la actual distribución de renta. Es decir, ξ es aquel valor de *y* tal que

$$W(\xi\iota_n)=W(\mathbf{y}) \tag{8.1}$$

donde $\iota_n=(\underbrace{1,1,\ldots,1}_{n})$

es el vector unitario de dimensión n. Puesto que $W(\mathbf{y})$ es simétrica y cuasi-cóncava, ξ no puede ser mayor que μ para cualquier distribución de renta. Así, la medida de desigualdad de Sen se define como

$$S_\xi = 1 - \frac{\xi}{\mu(\mathbf{y})} \tag{8.2}$$

cuya única diferencia con la medida de desigualdad de Atkinson (1970), A, es que ahora ξ no depende de las funciones de utilidad individuales y es, por tanto, mucho más general. Adviértase que el valor de ξ, que define S_ξ, depende, en realidad, de la función de bienestar social, $W(\mathbf{y})$, que determina implícitamente su valor de acuerdo con (8.1).

Este cambio en la formulación, aparentemente menor, proporciona una gran libertad para especificar la función de bienestar social y, consecuentemente, para definir la medida de desigualdad asociada. Es claro que para cualquier S_ξ que usemos se requerirá una especificación de $W(\mathbf{y})$, pero esta nueva estructura nos da gran libertad para especificar la función de bienestar social. Además, el uso de (8.2) no implica que la función de bienestar tenga que ser aditivamente separable, ni que dependa de las utilidades individuales. Aunque seguirá persistiendo el problema de la falta de relación biunívoca entre funciones de bienestar social e índices de desigualdad, si la función $W(\mathbf{y})$ no cumple alguna propiedad de homogeneidad en $\mathbf{y}$ (Dutta y Esteban 1992). Por supuesto, si definimos $W(\mathbf{y}) = \Sigma_{i=1}^{n} u(y_i)$ entonces tenemos que $S_\xi = A$.

Podemos interpretar el índice de desigualdad (8.2), S_ξ, en el espíritu de la curva de Lorenz, como una *métrica monetaria* que nos da la pérdida de bienestar debida a la desigualdad. En este sentido, la renta igualitaria equivalente, ξ, puede entenderse, pues, como una *renta media ajustada por la desigualdad.* Y la expresión $n\xi$ nos daría, entonces, la renta total ajustada por la desigualdad, que podemos tomar como una medida del bienestar asociada a una distribución de renta, que toma en cuenta tanto el tamaño como la distribución.

Si tomamos entonces $W(\mathbf{y}) = n\xi$ como medida del bienestar de la distribución de renta $\mathbf{y}$, la ecuación (8.2) nos permite escribir la siguiente igualdad

$$W(\mathbf{y}) = n\xi = Y.(1 - S_\xi(\mathbf{y})) \qquad (8.3)$$

donde $Y = n.\mu$ es la renta total.

De este modo, encontramos una forma particularmente sencilla e intuitiva de vincular bienestar y desigualdad. Para cada índice de desigualdad que escojamos, la ecuación (8.3) define una función de bienestar social que permite evaluar la distribución de la renta a partir de su tamaño y de su dispersión. De hecho, el bienestar aparece descrito como la renta total, Y, deflactada por el componente $Y.S_\xi(\mathbf{y})$, que corresponde al *bienestar cesante* medido en unidades monetarias. Es decir, la cantidad de renta adicional de que podría disponer la sociedad si no hubiera desigualdad. Claramente esta cuantía aumenta con la desigualdad y se hace cero cuando la distribución de la renta es perfectamente igualitaria. Lo que equivale a decir que la renta total es una medida aceptable de bienestar solo si su distribución es igualitaria, en cuyo caso tendríamos obviamente que $W(\mathbf{y}) = Y$.

También podemos considerar medidas de bienestar en términos per cápita, para poder comparar sociedades con distinto tamaño poblacional. Tendríamos entonces,

$$w(\mathbf{y}) = \frac{W(\mathbf{y})}{n} = \mu.(1 - S_\xi(\mathbf{y}))$$

Adviértase que, cuando el índice de desigualdad puede tomar valores superiores a la unidad, la función de bienestar social no resulta monótona en la renta. De hecho, cuando $S_\xi(\mathbf{y}) > 1$ un aumento de la renta empeora el bienestar social, lo que indica que nuestra preocupación por la igualdad es tan alta que más renta solo resultaría preferible si se acompañara de una disminución de la desigualdad.

Puesto que estamos adoptando una métrica monetaria como medida del bienestar social, el valor de la función $W(\mathbf{y})$ dependerá de las unidades de medida de la renta. Lo mismo ocurre con la magnitud de la pérdida de bienestar debida a la desigualdad, $Y.S_\xi(\mathbf{y})$. Este problema no se presenta cuando consideramos la pérdida relativa de bienestar, definida simplemente como la ratio entre el bienestar cesante y el bienestar total:

$$z_W(\mathbf{y}) = \frac{Y.S_\xi(\mathbf{y})}{W(\mathbf{y})} = \frac{S_\xi(\mathbf{y})}{1 - S_\xi(\mathbf{y})} \tag{8.4}$$

Esta expresión, multiplicada por cien, nos da el porcentaje de renta adicional que podríamos alcanzar si no hubiera desigualdad.

Por otra parte, si observamos la relación trivial

$$S_\xi(\mathbf{y}) = \frac{Y.S_\xi(\mathbf{y})}{Y}$$

podemos concluir que la magnitud del índice de desigualdad $S_\xi(\mathbf{y})$ corresponde a la pérdida de bienestar por unidad de renta.

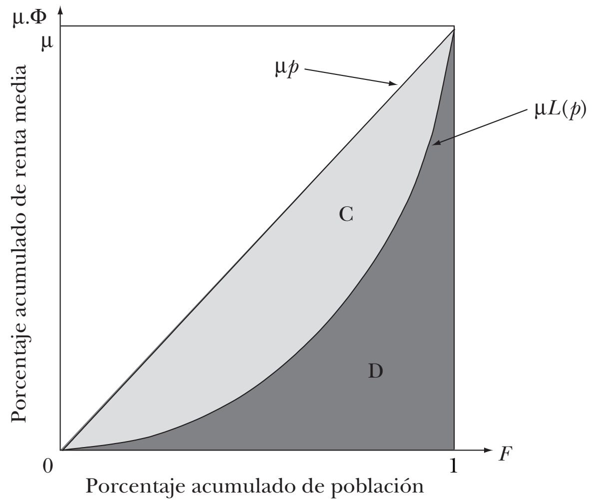
Con este sencillo esquema de referencia ya podemos empezar a plantear formulaciones solventes acerca de la medición del bienestar asociado a una distribución de renta, aprovechando las propiedades analizadas con anterioridad. Para ilustrarlo consideramos, a continuación, dos líneas de derivación de fórmulas concretas de medición del bienestar, una vinculada a la curva de Lorenz y el índice de Gini, y otra asociada con la familia de los índices de entropía generalizados.

8.3. Curva de Lorenz, índice de Gini y bienestar social

En el capítulo 2 presentamos la curva de Lorenz como una forma gráfica e intuitiva de examinar la desigualdad relativa. A partir de una interpretación geométrica de dicha curva introdujimos uno de los índices de desigualdad más populares, el índice de Gini, G. En el capítulo 5 introdujimos la curva de Lorenz generalizada, que incorporaba información sobre valores medios de la distribución, además de mantener los aspectos distributivos de la curva de Lorenz original.

En esencia, la curva de Lorenz generalizada no es más que la curva de Lorenz en la que las ordenadas son escaladas por la media de la distribución, μ. El gráfico 8.1 muestra una curva de Lorenz generalizada, la única diferencia con el gráfico 3.1 reside en que el eje de abscisas varía ahora entre 0 y μ, en lugar de entre 0 y 1. El área del cuadrado mostrado en el gráfico 8.1 es ahora

GRÁFICO 8.1: Curva de Lorenz generalizada y función de bienestar social



Fuente: Elaboración propia.

igual a la media de la distribución, μ, y si no existiera desigualdad, la curva de Lorenz generalizada coincidiría con la línea de igualdad perfecta, μp. Recuérdese que, en un contexto utilitarista, el máximo bienestar alcanzable venía dado por $nu(\mu)$, cuando todos los individuos de la sociedad disfrutan de la renta media, μ. En términos per cápita, el área C del gráfico 8.1 puede verse como una pérdida de bienestar asociada a la existencia de desigualdades, de forma que un indicador que resuma en un solo escalar la información sobre la media de la distribución, μ, y el grado de dispersión podría definirse como

$$\Omega = \mu - 2C \tag{8.5}$$

Observando que, por construcción, $C + D = 1/2 . \mu$, podemos escribir (8.5) como

$$\Omega = 2D \tag{8.6}$$

es decir, como dos veces el área bajo la curva de Lorenz generalizada. Esta área constituye una medida de bienestar de una distribución de renta dada.

Es interesante advertir la relación de esta medida de bienestar con el índice de Gini. Recordemos que la curva de Lorenz generalizada no es más que la curva de Lorenz escalada por μ, de modo que D en el gráfico 8.1 no es más que μB en el gráfico 3.1.[167] Por tanto, utilizando la expresión (3.2) obtenemos

$$\Omega = 2D = \mu 2B = \mu.(1 - G(\mathbf{y})) \tag{8.7}$$

Esta expresión muestra que $2D$ no es más que la renta per cápita ajustada por la distribución. Consecuentemente,

$$n.\Omega = 2n.D = Y.(1 - G(\mathbf{y})) \tag{8.8}$$

resulta ser la medida de bienestar de la renta asociada al índice de Gini. Esta medida se corresponde con el criterio de bienestar social propuesto por Sen (1976b).

La sencilla representación gráfica de $\Omega = 2D$, así como su interpretación en términos de renta per cápita media, modificada a la baja por la desigualdad, justifican su atractivo en términos de un indicador de bienestar intuitivo y fácil de utilizar en la práctica. De hecho, este indicador ha sido ampliamente utilizado en comparaciones internacionales por las Naciones Unidas en sus informes sobre el desarrollo (UNDP 1990).

Resulta obvio que G en (8.7) y (8.8) podría ser sustituido por la familia de índices de Gini generalizados, G_v, introducida en el capítulo 3, lo que haría depender el bienestar social de un parámetro ético de valoración asociado a la distribución de la renta. En el próximo capítulo desarrollaremos una discusión sistemática de otras variantes de evaluación del bienestar social asociado a una distribución de renta, si bien el enfoque desde el que partiremos será algo diferente.

Otra interpretación geométrica de interés es aquella que se refiere a la pérdida de bienestar relativa, cuando tomamos $S_\xi(\mathbf{y}) = G(\mathbf{y})$. Adviértase que, como el índice de Gini varía entre cero y uno, la función de bienestar social $W(\mathbf{y}) = Y.(1 - G(\mathbf{y}))$ resulta monótona en la renta total. En este caso, tendremos la siguiente particularización de la ecuación (8.4)

[167] En la formulación discreta de la curva de Lorenz, utilizada en los capítulos 2 y 3, para obtener la fórmula del índice de Gini (3.4) cada ordenada vendría multiplicada por μ, lo que permite obtener (8.7) de forma trivial.

$$z_G(\mathbf{y}) = \frac{G(\mathbf{y})}{1 - G(\mathbf{y})}$$

Recordemos que, desde un punto de vista geométrico, el índice de Gini venía dado por el cociente entre el área A y el área $A+B$ del gráfico 3.1. Podemos realizar entonces la siguiente deducción a partir de (3.1) y (3.2)

$$\left.\begin{aligned} G(\mathbf{y}) &= \frac{A}{A+B} = 2A \\ 1 - G(\mathbf{y}) &= \frac{B}{A+B} = 2B \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \frac{G(\mathbf{y})}{1 - G(\mathbf{y})} = \frac{\dfrac{A}{A+B}}{\dfrac{B}{A+B}} = \frac{A}{B}$$

y, por consiguiente,

$$z_G(\mathbf{y}) = \frac{A}{B}$$

Así pues, un cambio en la distribución que amplía el área A entre la curva de Lorenz y la diagonal supone una pérdida relativa de bienestar, $z_G(\mathbf{y})$, dada por el cociente entre A y B, que resulta mayor que la variación del índice de Gini, puesto que se traduce, tanto en un incremento del numerador como en una reducción del denominador.[168] De hecho $z_G(\mathbf{y})$ podría tomarse como una medida normativa de desigualdad.

8.4. Índices de entropía generalizada y bienestar social

La forma funcional de la ecuación (8.3), que no es más que una transformación lineal negativa del índice de desigualdad correspondiente, y los resultados, analizados anteriormente sobre la caracterización de la familia de índices de entropía generalizados, permiten deducir de forma consistente otra forma de valoración del bienestar.

[168] Que en el caso del índice de Gini es constante.

Mediante una extensión conceptual inmediata podemos decir que una función de bienestar social $W(\mathbf{y}) = Y.(1 - S_\xi(\mathbf{y}))$ es aditivamente descomponible, si podemos expresarla como

$$W(\mathbf{y}) = Y - Y\sum_{g=1}^{G} \omega_g^G(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{n}) S_\xi(n_g, \mathbf{y}^g) \; - \; YS_\xi(n, \mu_1 \iota_{n_1}, \ldots, \mu_G \iota_{n_G})$$

donde $g = 1, 2, 3, \ldots, G$ designa los distintos subgrupos poblacionales. La descomponibilidad aditiva de la función de bienestar social permite expresar el bienestar asociado a una distribución de renta en una sociedad compuesta por G grupos sociales, como la renta total de la sociedad deflactada por dos términos. El primero recoge la pérdida de bienestar asociada a la desigualdad dentro de los grupos sociales. El segundo refleja la pérdida de bienestar derivada de la desigualdad entre dichos grupos.

Supongamos que ahora pedimos a nuestra función de bienestar social, $W(\mathbf{y}) = Y.(1 - S_\xi(\mathbf{y}))$, que cumpla, además de la descomponibilidad aditiva, las propiedades siguientes (que son meras traslaciones de las del índice de desigualdad y que, por tanto, las nombramos del mismo modo, aunque añadiendo un asterisco):

— Normalización*, para una distribución de renta igualitaria, $W(\mathbf{y}) = Y$.
— Simetría*, dada una sociedad N, sean $\left(y_i\right)_{i\in N}$ y $\left(y_i'\right)_{i\in N}$ dos distribuciones de renta tales que $\left(y_i'\right)_{i\in N}$ se obtiene como una permutación de $\left(y_i\right)_{i\in N}$. Entonces, $W\left(\left(y_i\right)_{i\in N}\right) = W\left(\left(y_i'\right)_{i\in N}\right)$.
— Réplica de poblaciones*, dada una sociedad N con una distribución de renta $\left(y_i\right)_{i\in N}$. Consideremos una nueva sociedad N^k que consiste en una réplica de k veces la sociedad N con su correspondiente distribución de renta, $\left(y_i\right)_{i\in N^k}$. Entonces, $W\left(n^k, \left(y_i\right)_{i\in N^k}\right) = kW\left(n, \left(y_i\right)_{i\in N}\right)$.
— Principio de las transferencias de Dalton (1920)*, dada una sociedad N, sean $\mathbf{y}_A$ e $\mathbf{y}_B$ dos distribuciones de renta tales que $\mathbf{y}_B$ se obtiene mediante una transferencia de Dalton a partir de $\mathbf{y}_A$. Entonces, $W(\mathbf{y}_B) > W(\mathbf{y}_A)$.
— Diferenciabilidad*, la función $W(\mathbf{y})$ es diferenciable en $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n_{++}$.
— Homogeneidad de grado uno*, para todo escalar $\lambda > 0$, $W(\lambda\mathbf{y}) = \lambda W(\mathbf{y})$.

El resultado de Shorrocks (1980) resulta de aplicación inmediata y puede ser reformulado en los siguientes términos:

Teorema (8.1)

Una función de bienestar social definida sobre el espacio de distribuciones de renta, $W(\mathbf{y}) = Y.(1 - S_\xi(\mathbf{y}))$, verifica las propiedades de normalización*, simetría*, réplica de poblaciones*, principio de transferencias de Dalton*, diferenciabilidad*, homogeneidad de grado uno* y descomponibilidad aditiva*, si y solo si es de la forma:

$$W(\mathbf{y}) = Y.(1 - I_\theta(\mathbf{y}))$$

donde $I_\theta(\mathbf{y})$ es el índice de entropía generalizado asociado al parámetro θ.

Si, además, exigimos que la descomponibilidad sea exacta, es decir, que los coeficientes de ponderación del componente intragrupos sumen la unidad, entonces tenemos el siguiente resultado:

Proposición (8.1)

Una función de bienestar social definida sobre el espacio de distribuciones de renta, $W(\mathbf{y}) = Y.(1 - S_\xi(\mathbf{y}))$, verifica las propiedades de normalización*, simetría*, réplica de poblaciones*, principio de transferencias de Dalton*, diferenciabilidad*, homogeneidad de grado uno* y descomponibilidad aditiva* exacta, si y solo si tiene alguna de estas dos formas:

$$W(\mathbf{y}) = Y.(1 - T(\mathbf{y})) \quad \text{ó} \quad W(\mathbf{y}) = Y.(1 - T^*(\mathbf{y}))$$

donde $T(\mathbf{y}) = I_1(\mathbf{y})$ es el primer índice de Theil y $T^*(\mathbf{y}) = I_0(\mathbf{y})$ es el segundo índice de Theil.

Obviamente, si añadimos la condición de independencia del camino, entonces obtenemos unívocamente la forma de valoración:

$$W(\mathbf{y}) = Y.(1 - T^*(\mathbf{y}))$$

usada recientemente en algunas aplicaciones de interés (Chechi y Peragine 2005).

9. Funciones de evaluación social

En este capítulo vamos a profundizar en la aproximación a la medición del bienestar, asociado a una distribución de renta que acabamos de presentar. Para ello, partiremos de una formulación algo menos general, pero que nos permitirá un análisis más detallado de la relación entre índices de desigualdad y valoración del bienestar. Definiremos una *función de evaluación social* como una aplicación del espacio de distribuciones de renta en los números reales, $V : \Im \mapsto \mathbb{R}$, que verifica las propiedades de homogeneidad y diferenciabilidad. Se trata, pues, de una particularización de la función de bienestar social estudiada en el capítulo anterior.[169]

Esta función de evaluación social permite expresar la valoración social de un vector de rentas como una suma ponderada de las mismas. Los coeficientes de ponderación corresponden a las valoraciones marginales sociales de los distintos individuos en la distribución de renta de referencia. Distintas fórmulas de ponderación conducen a diferentes funciones de evaluación social, de suerte que los juicios de valor presentes en nuestra valoración del bienestar aparecen reflejados en los criterios de ponderación de las rentas de los individuos.

Veremos que esta aproximación al problema permite integrar el enfoque normativo de Dalton-Atkinson-Sen sobre la medición de la desigualdad, con el enfoque positivo vinculado a las medidas estadísticas de dispersión, o la familia de índices de entropía

[169] Nuestro enfoque es similar en espíritu al de la función de bienestar social abreviada de Lambert (1993, cap. 5) o al de la función de bienestar social de forma reducida de Champernowne y Cowell (1997), aunque contiene matices sustancialmente diferentes. Trabajos relevantes sobre el tema considerado en este capítulo son, entre otros, Aigner y Heins (1967), Bentzel (1970), Kondor (1975), Blackorby, Donaldson y Auersperg (1981), Dutta y Esteban (1992) y Dagum (1990, 1993).

generalizados. De este modo podemos comparar las propiedades éticas de todos estos procedimientos de valoración en un marco unificado. Para ello introducimos la idea de *S*-consistencia, o consistencia en el sentido de Sen, de la función de evaluación social con los índices de desigualdad. Decimos que un sistema de ponderaciones, relativo a una función de evaluación social $V(\mathbf{y})$, es *S*-consistente con un determinado índice de desigualdad, si esta función puede expresarse como la renta total multiplicada por uno, menos dicho índice de desigualdad. O lo que es lo mismo, la suma ponderada de rentas corresponde a la renta igualitaria equivalente total asociada al índice de desigualdad.

Los resultados que se derivan del estudio de la *S*-consistencia ilustran ciertos rasgos paradójicos de algunos índices de desigualdad convencionales, en particular que la mayor *aversión a la desigualdad* puede resultar incompatible con el principio de dar más peso en la valoración social a los individuos con menores rentas.

9.1. Una reformulación del enfoque Dalton-Atkinson-Sen

Los problemas conceptuales de los índices normativos, que hemos presentado en el capítulo anterior, nos llevan a considerar una reformulación de este enfoque, introduciendo la noción de función de evaluación social, $V(\mathbf{y})$, una particularización de la función de bienestar social especialmente relevante para nuestros propósitos. Se trata de una función que, como en la formulación de Sen (1976b), asigna números reales a las distribuciones de renta, $V : \Im \mapsto \mathbb{R}$, de modo que un número mayor significa una valoración social más alta. Adviértase que al tomar una función de valoración definida directamente sobre distribuciones de renta estamos evaluando el bienestar sin necesidad de recurrir a la agregación de las preferencias individuales en preferencias sociales. Vamos a imponer a esta función de valoración dos condiciones razonables: *homogeneidad* y *diferenciabilidad*. Estas propiedades permiten expresar la función de valoración como una suma ponderada de rentas individuales, donde los coeficientes de ponderación reflejan nuestros juicios de valor sobre los pesos asignables a las diferentes rentas individuales en la evaluación social.

Esta aproximación se inspira en el enfoque de los *bienes personalizados* desarrollado en Sen (1976b), donde se introduce el principio de dar una valoración distinta al consumo de los diferentes agentes, en función de su nivel de renta.[170] La formulación original de Sen proporciona únicamente una ordenación parcial de las distribuciones de renta y propone una fórmula de valoración asociada al índice de desigualdad de Gini, la fórmula (8.7) del capítulo anterior. El planteamiento que desarrollamos a continuación es más flexible y proporciona ordenaciones completas de las distribuciones de renta.

Para precisar esta reformulación, comencemos considerando la siguiente definición:

Definición (9.1): Función de evaluación social

Una función de evaluación social es una función $V(\mathbf{y})$ que aplica el espacio de distribuciones de renta en los números reales, $V:\Im \mapsto \mathbb{R}$, diferenciable y homogénea.[171] Es decir,

1) $\forall \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n_{++}$, $\forall i \in N$, $\partial V/\partial y_i$ es una función continua; y
2) $\forall \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n_{++}$, $\forall \lambda > 0$, se verifica que $V(\lambda \mathbf{y}) = \lambda^{\varphi} V(\mathbf{y})$, para algún escalar φ.

La diferenciabilidad supone que la función $V(\mathbf{y})$ tiene primeras derivadas continuas. Se trata de un requisito de naturaleza esencialmente técnica que nos permite el uso del cálculo diferencial en nuestras deducciones. Esta propiedad de $V(\mathbf{y})$ juega el mismo papel que la diferenciabilidad (propiedad 1.5*) en el caso de los índices de desigualdad, y que ya introdujimos en el capítulo 1.

La homogeneidad establece que la función de evaluación social es de naturaleza cardinal. Si multiplicamos el vector de rentas individuales por un escalar positivo $\lambda > 0$, entonces el valor del

[170] Osmani (1982) proporciona un estudio empírico aplicando esta metodología y Chakravarti y Dutta (1990) presentan una aplicación diferente de este enfoque.

[171] Cuando representamos la distribución de renta por medio del vector de dimensión finita de orden n, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, podemos escribir $V:\mathbb{R}^n_{++} \mapsto \mathbb{R}$, puesto que $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n_{++}$.

indicador de bienestar resulta multiplicado por una constante que viene dada por el valor de λ elevado a un coeficiente que define el grado de homogeneidad. Adviértase que todas las funciones homogéneas resultan cardinalmente equivalentes a una función homogénea de grado uno, que establece que $V(\lambda \mathbf{y}) = \lambda V(\mathbf{y})$.

La virtud de estas dos propiedades que exigimos a la función $V(\mathbf{y})$ para considerarla como una función de evaluación social es que nos permite dar una fórmula muy precisa de la función de valoración social, como establece el siguiente resultado.

Teorema (9.1)

Si $V : \Im \mapsto \mathbb{R}$ es una función de evaluación social entonces, para cada distribución de renta $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, tenemos:

$$V(\mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(\mathbf{y}).y_i \tag{10.1}$$

donde $\alpha_i(\mathbf{y}) = \frac{1}{\varphi} \frac{\partial V}{\partial y_i}$, siendo φ el grado de homogeneidad de $V(\mathbf{y})$.

Demostración

Este resultado se deriva directamente del teorema de Euler (Sydsæter, Strøm y Berck 2005), que establece que una función homogénea y diferenciable puede expresarse como una suma ponderada de sus variables, donde los coeficientes de ponderación son proporcionales a sus derivadas parciales, con un grado de proporcionalidad dado por la inversa del grado de homogeneidad de la función.

Este sencillo teorema establece que el bienestar asociado a la distribución de la renta $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ viene medido por una suma ponderada de las rentas individuales, donde los coeficientes de ponderación describen la valoración social marginal del individuo i en la distribución de la renta $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$. Adviértase que, por construcción, las funciones $\alpha_i(\mathbf{y})$ resultan homogéneas de grado $\varphi - 1$. En particular, cuando $V(\mathbf{y})$ es homogénea de grado uno y cuando $\alpha_i(\mathbf{y})$ es homogénea de grado cero, de modo que cualquier cambio proporcional en la renta no altera el peso de los individuos en la función de valoración social; es decir, $\forall \lambda > 0$ y $\forall i \in N$, se cumple en este caso que $\alpha_i(\lambda \mathbf{y}) = \alpha_i(\mathbf{y})$.

Esta formulación del problema presenta notables ventajas, entre las que destacaremos las siguientes:

— En primer lugar, permite establecer nuestros juicios de valor no tanto sobre la función de valoración social directamente[172] sino sobre el peso que queremos dar a los diferentes individuos en cada distribución de renta. Dando valores particulares a las funciones $\alpha_i(\mathbf{y})$ iremos precisando diferentes formas funcionales de $V(\mathbf{y})$.
— En segundo lugar, como comprobaremos inmediatamente, posibilita expresar las principales familias de índices de desigualdad, en términos de la renta igualitaria equivalente para funciones de evaluación social concretas. Ello facilita la comparación de estos tipos de índices centrándonos en el peso que cada uno de ellos concede a cada nivel de renta, es decir, en el valor de los coeficientes $\alpha_i(\mathbf{y})$.
— En tercer lugar, las funciones de valoración social asociadas a los principales índices de desigualdad resultan expresables como funciones que dependen del total de renta y de la desigualdad.
— En cuarto lugar, al suponer homogeneidad, estamos garantizando la existencia de una relación biunívoca entre la función de valoración, $V(\mathbf{y})$, y el correspondiente índice de desigualdad.
— Por último, cuando existen diferencias económicas que no se limitan a diferencias de renta (por ejemplo, diferencias en el tamaño de la unidad familiar, de sus necesidades o de sus dotaciones de bienes de consumo duradero) estos coeficientes de ponderación podemos factorizarlos en la forma $\alpha_i(\mathbf{y}) = \gamma_i a_i(\mathbf{y})$, donde γ_i es la ponderación del individuo i por causas no vinculadas a la renta.

[172] Excepto por las propiedades de diferenciabilidad y homogeneidad.

A pesar de estas ventajas, la adopción de esta formulación supone también algunas restricciones. En particular estamos excluyendo el uso de funciones de valoración de tipo leximin, que vinculan la valoración social exclusivamente al individuo que está peor situado en la distribución.[173] También estamos adoptando indirectamente una aproximación relativa a la medición de la desigualdad, dada la homogeneidad de los coeficientes de ponderación.

Observación (9.1): El carácter aditivo de la función de evaluación social no implica la separabilidad de este indicador en las rentas individuales puesto que los coeficientes de ponderación dependen del vector de distribución y no únicamente de la renta del individuo correspondiente.

Dada la estructura de nuestra función de evaluación social, $V(\mathbf{y})$, consideraremos a continuación una serie de requisitos sobre los coeficientes de ponderación $\alpha_i(\mathbf{y})$ que estimamos deseables y que nos proporcionan un *test* de referencia para discutir las propiedades de las funciones de evaluación social, asociadas a los índices de desigualdad más relevantes. De esta forma, no establecemos directamente propiedades sobre la función $V(\mathbf{y})$, como hacíamos en el caso de la función de bienestar social, $W(\mathbf{y})$, sino sobre el sistema de ponderadores $\alpha_i(\mathbf{y})$.

El primer requisito que establecemos sobre estos coeficientes, *equidad mínima*, fue propuesto por Sen (1973). Introduce un juicio de valor fundamental, puesto que establece que vamos a dar más peso en la valoración social del bienestar a aquellos individuos con rentas menores.[174] Formalmente:

---

[173] No obstante, si definimos directamente la función de evaluación social como una función aditiva del tipo $V(\mathbf{y}) = \Sigma_{i=1}^{n}\alpha_i(\mathbf{y}).y_i$, en lugar de deducirla de las propiedades de homogeneidad y diferenciabilidad como hemos hecho en el teorema (9.1), podríamos acomodar fácilmente las funciones tipo leximin.

[174] Este principio también se conoce como *prioridad* en la literatura de la filosofía política, véase Parfit (1984) para una discusión de la misma.

Propiedad (9.1): Equidad mínima

Para toda distribución de renta $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n_{++}$, y para todo $i, j \in N$,

$$y_j < y_i \quad \Rightarrow \quad \alpha_j(\mathbf{y}) > \alpha_i(\mathbf{y})$$

Esta propiedad dice que un aumento en la renta de un individuo implica una disminución en la valoración social marginal del individuo que la experimenta. Claramente supone introducir consideraciones igualitarias en el análisis. Pero conviene advertir que esta propiedad no es implicada por el principio de las transferencias de Dalton, como tendremos ocasión de comprobar.

Observación (9.2): Una propiedad menos exigente sería la equidad mínima débil. Es decir, $y_j < y_i \quad \Rightarrow \quad \alpha_j(\mathbf{y}) \geq \alpha_i(\mathbf{y})$, de forma que un aumento en la renta de un individuo no puede implicar un aumento en la valoración social marginal del individuo que la experimenta. Sin embargo no se exige una reducción de la misma. No insistiremos en esta debilitación de la propiedad de equidad mínima.

La siguiente es una propiedad operativa de uso común, que establece que la diferencia en las ponderaciones de dos individuos cualesquiera es una función que depende únicamente de las diferencias de renta entre estos dos individuos e, implícitamente, del tamaño de la población. Formalmente:

Propiedad (9.2): Independencia

Para todo $i, j \in N$, $\alpha_i(\mathbf{y}) - \alpha_j(\mathbf{y}) = a(y_i, y_j)$.

Esta propiedad aparece, en relación a los índices de desigualdad, en el trabajo de Cowell y Kuga (1981b) con respecto al efecto de las transferencias de Dalton. La función $a(y_i, y_j)$ puede entenderse como una valoración de la diferencia de rentas entre los individuos i, j. La propiedad de independencia establece que, para cada tamaño de población dado, la diferencia en el valor social marginal de dos individuos depende únicamente de las rentas de estos dos individuos. Con esta propiedad podemos evaluar los pesos asignados a los individuos haciendo uso de una cantidad mínima de información.

Téngase en cuenta, además, que para una sociedad dada, implica la propiedad de tratamiento igualitario, es decir, dos individuos con la misma renta tienen el mismo coeficiente de ponderación.

Es fácil comprobar que, bajo la propiedad de independencia, la propiedad de equidad mínima se cumple, si y solo si

$$\frac{\partial \alpha_i(\mathbf{y})}{\partial y_i} < 0, \quad \forall i$$

En este contexto diremos que la función $V(\mathbf{y})$ verifica el principio de las transferencias de Dalton cuando se cumple la siguiente propiedad:

Principio de las transferencias de Dalton, 1920*

Dada una sociedad N, sean $\mathbf{y}_A$ e $\mathbf{y}_B$ dos distribuciones de renta tales que $\mathbf{y}_B$ se obtiene mediante una transferencia de Dalton a partir de $\mathbf{y}_A$. Entonces, $V(\mathbf{y}_B) > V(\mathbf{y}_A)$.

Podemos probar entonces el siguiente resultado.

Teorema (9.2)

Sea $V(\mathbf{y})$ una función de evaluación social que cumple los principios de equidad mínima e independencia. Entonces, $V(\mathbf{y})$ verifica el principio de las transferencias de Dalton, si y solo si

$$\alpha_j(\mathbf{y})\left(1-\eta_{\alpha_j(\mathbf{y})}\right) > \alpha_i(\mathbf{y})\left(1-\eta_{\alpha_i(\mathbf{y})}\right)$$

donde $\eta_{\alpha(\mathbf{y})}$ es (el negativo de) la elasticidad de los pesos en la función de evaluación social respecto a la renta.[175]

Demostración

Bajo el supuesto de independencia, el principio de las transferencias de Dalton requiere que una transferencia de un individuo

[175] Es decir,

$$\eta_{\alpha(\mathbf{y})} = -\frac{\partial \alpha(\mathbf{y})}{\partial y}\frac{y}{\alpha(\mathbf{y})}$$

de esta forma $\eta_{\alpha(\mathbf{y})}$ nos da el porcentaje de reducción del peso, que tiene lugar cuando la renta del individuo se incrementa en un 1%.

rico, i, a un individuo pobre, j, incremente el valor de la función de evaluación social. En particular, si consideramos una transferencia $\delta > 0$ de un individuo con renta y_i a otro con renta $y_j < y_i$, tal que

$$0 < \delta < \frac{y_i - y_j}{2}$$

deberá cumplirse que,

$$\delta\left[\frac{\partial\alpha_j(\mathbf{y})}{\partial y_j}y_j + \alpha_j(\mathbf{y}) - \frac{\partial\alpha_i(\mathbf{y})}{\partial y_i}y_i - \alpha_i(\mathbf{y})\right] > 0$$

que alternativamente podemos escribir como,

$$\alpha_j(\mathbf{y}) + \frac{\partial\alpha_j(\mathbf{y})}{\partial y_j}y_j > \alpha_i(\mathbf{y}) + \frac{\partial\alpha_i(\mathbf{y})}{\partial y_i}y_i$$

o de forma equivalente,

$$\alpha_j(\mathbf{y})\left(1 + \frac{\partial\alpha_j(\mathbf{y})}{\partial y_j}\frac{y_j}{\alpha_j(\mathbf{y})}\right) > \alpha_i(\mathbf{y})\left(1 + \frac{\partial\alpha_i(\mathbf{y})}{\partial y_i}\frac{y_i}{\alpha_i(\mathbf{y})}\right)$$

Por lo que definiendo

$$\eta_{\alpha(\mathbf{y})} = -\frac{\partial\alpha(\mathbf{y})}{\partial y}\frac{y}{\alpha(\mathbf{y})}$$

obtenemos que la condición para que $V(\mathbf{y})$ verifique el principio de las transferencias de Pigou-Dalton es

$$\alpha_j(\mathbf{y})\left(1 - \eta_{\alpha_j(\mathbf{y})}\right) > \alpha_i(\mathbf{y})\left(1 - \eta_{\alpha_i(\mathbf{y})}\right)$$

q.e.d.

Este resultado precisa en qué condiciones las propiedades de equidad mínima e independencia implican el principio de las transferencias de Dalton. La intuición es la siguiente. Dado que el individuo j ve aumentar su renta, y en consecuencia disminuir su peso en la valoración social, y por el contrario el individuo i ve disminuir su renta, y en consecuencia aumentar su peso en la valoración social, lo que la condición anterior nos dice es que el incremento en el valor social derivado del incremento de renta del *pobre,* $\alpha_j(\mathbf{y})\left(1-\eta_{\alpha_j(\mathbf{y})}\right)$, tiene que ser superior a la disminución en el valor social derivado de la disminución de renta del *rico,* $\alpha_i(\mathbf{y})\left(1-\eta_{\alpha_i(\mathbf{y})}\right)$, y, naturalmente, esto tiene que ver con la elasticidad de los pesos.[176] Dicho en otros términos, para que $V(\mathbf{y})$ se incremente, los pesos deben cambiar relativamente poco, como consecuencia de las transferencias, de otra forma, las variaciones en los pesos más que compensar las variaciones en las rentas y la función de evaluación social, las disminuye.

Obsérvese que la propiedad de equidad mínima solo indica que el que tiene menos renta recibe más ponderación, pero no especifica para nada cuánto más deberá ser esa ponderación. En este sentido la propiedad de equidad mínima es una propiedad muy débil, tal y como señala Sen (1973).

Observemos que puesto que $\alpha(\mathbf{y})=\frac{1}{\varphi}\frac{\partial V}{\partial y}$, entonces $\eta_{\alpha(\mathbf{y})}$ puede ser escrito como

$$\eta_{\alpha(\mathbf{y})}=-\frac{\partial\alpha(\mathbf{y})}{\partial y}\frac{y}{\alpha(\mathbf{y})}=-\frac{\partial^2 V(\mathbf{y})}{\partial y^2}\frac{y}{\frac{\partial V(\mathbf{y})}{\partial y}}$$

$$=-\frac{\partial\left(\frac{\partial V(\mathbf{y})}{\partial y}\right)}{\partial y}\frac{y}{\frac{\partial V(\mathbf{y})}{\partial y}}$$

es decir, la *elasticidad de la evaluación social marginal.*

Escribamos

$$\frac{dV}{\delta}=\alpha_j(\mathbf{y})\left(1-\eta_{\alpha_j(\mathbf{y})}\right)-\alpha_i(\mathbf{y})\left(1-\eta_{\alpha_i(\mathbf{y})}\right)$$

y veamos algunos casos concretos.

Supongamos que todos los pesos son positivos, para facilitar la discusión, y tomemos $\eta_{\alpha(\mathbf{y})}$ constante, equivalente a la *aversión a la desigualdad constante* en el análisis de Atkinson (1970), de hecho en este caso $\eta_{\alpha(\mathbf{y})}=\eta=\varepsilon$. Entonces,

[176] El resultado es similar a la condición de variación del ingreso total ante variaciones en los precios, dependiendo de la elasticidad de demanda.

$$\frac{dV}{\delta}\begin{cases} >0 & \text{si } \ 0<\eta<1 \\ =0 & \text{si } \ \eta=1 \\ <0 & \text{si } \ \eta>1 \end{cases}$$

Ello explica, como veremos más adelante, que en este contexto debamos descartar el índice de Atkinson (1970) cuando $\varepsilon = 1$, ya que entonces la función de bienestar social considerada, (4.13), no es homogénea, y también cuando $\varepsilon > 1$, ya que entonces $V(\mathbf{y})$ aumenta con la desigualdad.

Si $\eta_{\alpha(\mathbf{y})}$ no es constante, sino que depende de los niveles de renta y, por tanto es diferente para cada individuo, entonces todo lo que podemos decir es que para que el bienestar aumente, la variación del bienestar asociada al incremento de renta del pobre no debe más que compensarse con la variación del bienestar asociada a la disminución de renta del rico. Y esto puede expresarse en términos de la elasticidad de los pesos en

$$V(\mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(\mathbf{y}) y_i$$

La siguiente propiedad, *escala unitaria*, introduce un elemento de normalización en la medida de bienestar y tiene, por tanto, un estatus menor en relación con las otras propiedades presentadas hasta ahora. Es similar en espíritu a la propiedad de normalización (propiedad 1.1) introducida para los índices de desigualdad en el capítulo 1. Establece que, en caso de igualdad, podemos tomar el valor de los coeficientes de ponderación igual a la unidad para todos los individuos. Ello equivale a decir que admitimos que la renta agregada es un indicador de bienestar, si y solo si la distribución de la renta es uniforme. Formalmente:

Propiedad (9.3): Escala unitaria

Si $y_i = \mu \ \ \forall i \ \ \Rightarrow \ \ \alpha_i(\mathbf{y}) = 1 \ \ \forall i.$

Hasta ahora hemos considerado (implícitamente) el caso de una población dada. Nuestra última propiedad incorpora en este contexto el principio de réplica de las poblaciones como ya hicimos anteriormente. Se formula como sigue.

Propiedad (9.4): Réplica de las poblaciones

Tenemos una sociedad N con una distribución de renta $\left(y_i\right)_{i\in N}$ y un vector de ponderadores $\left(\alpha_i(\mathbf{y})\right)_{i\in N}$. Consideremos una nueva sociedad N^k que consiste en una réplica de k veces la sociedad N con su correspondiente distribución de renta, $\left(y_i\right)_{i\in N^k}$, y vector de ponderadores,

$$\left(\alpha_i\left(\left(y_i\right)_{i\in N^k}\right)\right)_{i\in N^k}$$

Es decir,

$$N^k=(\underbrace{N,N,\ldots,N}_{k})=\{\underbrace{1,1,\ldots,1}_{k},\underbrace{2,2,\ldots 2}_{k},\ldots,\underbrace{n,n,\ldots,n}_{k}\}$$

y la distribución de renta correspondiente,

$$\begin{aligned}\left(y_i\right)_{i\in N^k}&=\Big(\underbrace{\left(y_i\right)_{i\in N},\left(y_i\right)_{i\in N},\ldots,\left(y_i\right)_{i\in N}}_{k}\Big)\\&=\Big(\underbrace{y_1,y_1,\ldots,y_1}_{k},\underbrace{y_2,y_2,\ldots,y_2}_{k},\ldots,\underbrace{y_n,y_n,\ldots,y_n}_{k}\Big)\end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}\left(\alpha_i\left(\left(y_i\right)_{i\in N^k}\right)\right)_{i\in N^k}&=\Big(\underbrace{\left(\alpha_i(\mathbf{y})\right)_{i\in N},\left(\alpha_i(\mathbf{y})\right)_{i\in N},\ldots,\left(\alpha_i(\mathbf{y})\right)_{i\in N}}_{k}\Big)\\&=\Big(\underbrace{\alpha_1(\mathbf{y}),\ldots,\alpha_1(\mathbf{y})}_{k},\underbrace{\alpha_2(\mathbf{y}),\ldots,\alpha_2(\mathbf{y})}_{k},\ldots,\\&\qquad\underbrace{\alpha_n(\mathbf{y}),\ldots,\alpha_n(\mathbf{y})}_{k}\Big)\end{aligned}$$

En palabras, lo que esto significa es que el vector de ponderadores se replica junto con el vector de renta, de forma que el individuo i tiene la misma ponderación en todas las réplicas.

Esta propiedad implica que $V\left(n^k,\left(y_i\right)_{i\in N^k}\right)=kV\left(n,\left(y_i\right)_{i\in N}\right)$, es decir, el bienestar per cápita no varía cuando replicamos la población.

Observación (9.3): Si una función de valoración social *V(y)*, que por definición suponemos diferenciable y homogénea, verifica la propiedad de independencia, entonces verifica automáticamente la propiedad de réplica de las poblaciones. El recíproco no es cierto.

9.2. Funciones de evaluación social *S*-consistentes con los índices de desigualdad

Veamos ahora cómo podemos generar funciones particulares de evaluación social, asociadas a los índices de desigualdad de Gini, Atkinson, Theil y los correspondientes a la familia de entropía generalizada, a partir de formas específicas de ponderar las rentas individuales. Dichos coeficientes son escogidos de modo que la función de evaluación social genere estos índices de desigualdad, según el enfoque de Sen (1973) de la renta igualitaria equivalente generalizada. Nos referiremos a este aspecto con el nombre de *S-consistencia*, como abreviación de consistencia, en el sentido de Sen, con los índices de desigualdad.

A la vista de la discusión desarrollada en el capítulo precedente, podemos establecer la siguiente definición.

Definición (9.2): Función de evaluación social *S*-consistente

Un sistema de coeficientes de ponderación $\left(\alpha_i(\mathbf{y})\right)_{i\in N}$ genera una función de evaluación social $V(\mathbf{y})$ *S*-consistente con el índice de desigualdad $I(\mathbf{y})$, si y solo si, para toda distribución $\mathbf{y}$, podemos expresar la función $V(\mathbf{y})$ como

$$V(\mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(\mathbf{y}) y_i = n\xi = Y(1 - I(\mathbf{y})) \qquad (9.2)$$

Los siguientes teoremas prueban que existen familias bien definidas de coeficientes de ponderación *S*-consistentes con los índices de desigualdad que hemos expuesto en la primera parte. Dichos coeficientes poseen una interpretación sencilla y cumplen muchas de las propiedades deseables enunciadas anteriormente.

El primer resultado interesante a este respecto es el siguiente, que fue obtenido originalmente en el trabajo de Sen (1976b).

Teorema (9.3)

Sea $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ una distribución ordenada de renta. El sistema de ponderadores $\alpha_i^G(\mathbf{y}) = n - i + 1$, genera una función de evaluación social, $V^G(y)$, *S*-consistente con el índice de Gini. Es decir,

$$V^G(\mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^G(\mathbf{y}) y_i \approx kY(1-G) \tag{9.3}$$

donde k es una constante positiva.

Demostración[177]

Haciendo uso de la definición del índice de Gini dada en la ecuación (3.15) del capítulo 3, podemos escribir:

$$\begin{aligned} G &= 1 + \frac{1}{n} - \frac{2}{\mu n^2}\left[n y_1 + (n-1) y_2 + (n-2) y_3 + \ldots + 2 y_{n-1} + y_n \right] \\ &= \frac{n+1}{n} - \frac{2}{\mu n^2} \sum_{i=1}^{n} (n+1-i) y_i \\ &= \frac{n+1}{n} - \frac{2}{\mu n^2} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^G(\mathbf{y}) y_i \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^G(\mathbf{y}) y_i = \frac{\mu n^2}{2}\left[\frac{n+1}{n} - G \right]$$

que podemos rescribir como,

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^G(\mathbf{y}) y_i = V^G(\mathbf{y}) \approx kY(1-G)$$

donde $k = n/2$, y aproximamos $(n+1)/n$ por 1, para un n suficientemente grande,

$$\frac{n+1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

q.e.d.

Los coeficientes de ponderación $\alpha_i^G(\mathbf{y}) = n - i + 1$ fueron ampliamente comentados en el capítulo 3. Estos coeficientes asocian a las diferentes rentas de los individuos un peso equivalente a su posición en el ranking en orden inverso. Es decir,

---

[177] Adviértase que estamos suponiendo implícitamente que todas las rentas son distintas, para evitar problemas de diferenciabilidad (en el punto **y**) en la función de evaluación social.

$$\alpha_1^G(\mathbf{y}) = n,\ \alpha_2^G(\mathbf{y}) = n-1,\ \alpha_3^G(\mathbf{y}) = n-2, \ldots, \alpha_{n-1}^G(\mathbf{y}) = 2,\ \alpha_n^G(\mathbf{y}) = 1$$

De esta forma, al individuo con mayor renta le asignamos un peso de 1, al segundo individuo con mayor renta un peso de 2 y así, sucesivamente, hasta llegar al más pobre a quien asignamos un peso de *n*. Este sistema de ponderación satisface la propiedad de equidad mínima, pero presenta la peculiaridad de que la diferencia de pesos entre dos individuos es independiente de la magnitud de sus diferencias de renta (un aspecto que a veces se denomina *homotecia distributiva*).[178] Es fácil observar que el sistema de ponderadores no cumple ni la propiedad de independencia, ni la de escala unitaria, ni tampoco la de réplica de las poblaciones.

Este resultado puede extenderse fácilmente a la familia de índices de Gini generalizados, G_ν, discutida en el capítulo 3. El resultado que obtenemos es el siguiente:

Teorema (9.4)

*S*ea $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ una distribución ordenada de renta. El sistema de ponderadores $\alpha_i^{G_\nu}(\mathbf{y}) = (n-i+1)^{\nu-1}$, genera una función de evaluación social, $V^{G_\nu}(\mathbf{y})$, *S*-consistente con la familia de índices de Gini generalizados. Es decir,

$$V^{G_\nu}(\mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^{G_\nu}(\mathbf{y}) y_i \approx kY(1-G_\nu) \tag{9.4}$$

donde *k* es una constante positiva.

Demostración

Haciendo uso de la definición del índice de Gini generalizado, dada en la ecuación (3.22) del capítulo 3, podemos escribir:

$$\begin{aligned} G_\nu &\approx 1 - \frac{\nu}{\mu n^\nu} \sum_{i=1}^{n} \left[(n+1-i)^{\nu-1} y_i \right] \\ &= 1 - \frac{\nu}{\mu n^\nu} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^{G_\nu}(\mathbf{y}) y_i \end{aligned}$$

[178] Idéntico resultado se obtenía al determinar el efecto de las transferencias de Pigou-Dalton sobre el índice de Gini.

Por tanto,

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^{G_\nu}(\mathbf{y}) y_i \approx \frac{\mu . n^\nu}{\nu}(1 - G_\nu)$$

que podemos rescribir como,

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^{G_\nu}(\mathbf{y}) y_i = V^{G_\nu}(\mathbf{y}) \approx kY(1 - G_\nu)$$

donde $k = \dfrac{n^{\nu-1}}{\nu}$.

q.e.d.

Obviamente, para $\nu = 2$ obtenemos el resultado anterior referido al índice de Gini. Los coeficientes de ponderación $\alpha_i^{G_\nu}(\mathbf{y}) = (n - i + 1)^{\nu-1}$ fueron discutidos en el capítulo 3, y pueden examinarse en el gráfico 3.5 para algunos valores de ν.[179] Estos coeficientes, que dependen del parámetro ν, que refleja el grado de aversión a la desigualdad, asocian a las diferentes rentas de los individuos un peso positivo, en relación a posición en el ranking y en orden decreciente, es decir,

$$\alpha_1^{G_\nu}(\mathbf{y}) = n^{\nu-1},\ \alpha_2^{G_\nu}(\mathbf{y}) = (n-1)^{\nu-1},\ \ldots, \alpha_{n-1}^{G_\nu}(\mathbf{y}) = 2^{\nu-1},\ \alpha_n^{G_\nu}(\mathbf{y}) = 1$$

puesto que suponemos $\nu > 1$. Obsérvese que al individuo con mayor renta le asignamos siempre un peso de 1 y a partir de aquí los pesos crecen, en función de ν, conforme nos movemos hacia individuos más pobres en la distribución.

Al igual que sucede con la función de evaluación social asociada al índice de Gini, en este caso el sistema de ponderación satisface la propiedad de equidad mínima, presentando igualmente la peculiaridad de que la diferencia de pesos entre dos individuos es independiente de la magnitud de sus diferencias de renta.[180]

---

[179] En realidad, este gráfico ofrece la función de ponderación

$$\omega_i(\nu) = \nu\left(\frac{n + 1 - i}{n}\right)^{\nu-1}$$

como función de las proporciones de población.

[180] Idéntico resultado se obtenía al determinar el efecto de las transferencias de Pigou-Dalton sobre el índice de Gini generalizado.

Además, el sistema de ponderadores no cumple ni la propiedad de independencia, ni la de escala unitaria, ni tampoco la de réplica de las poblaciones.

El siguiente resultado relevante se refiere a los índices de desigualdad de Theil, y fue presentado en el trabajo de Herrero y Villar (1989).

Teorema (9.5)
Sea $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ una distribución ordenada de renta.

1) El sistema de ponderadores $\alpha_i^T(\mathbf{y}) = 1 - \log\left(y_i/\mu\right)$, genera una función de evaluación social, $V^T(\mathbf{y})$, *S*-consistente con el primer índice de Theil. Es decir,

$$V^T(\mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^T(\mathbf{y}) y_i = Y(1-T) \tag{9.5}$$

2) El sistema de ponderadores $\alpha_i^{T^*}(\mathbf{y}) = 1 - \left(\mu/y_i\right)\log\left(\mu/y_i\right)$, genera una función de evaluación social, $V^{T^*}(\mathbf{y})$, *S*-consistente con el segundo índice de Theil. Es decir,

$$V^{T^*}(\mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^{T^*}(\mathbf{y}) y_i = Y\left(1-T^*\right) \tag{9.6}$$

Demostración:

1) Haciendo uso de la definición del primer índice de Theil, dado en la ecuación (3.28) del capítulo 3, podemos escribir:

$$\begin{aligned}
T &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{y_i}{\mu}\log\frac{y_i}{\mu} \\
&= 1 - \left[1 - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{y_i}{\mu}\log\frac{y_i}{\mu}\right] \\
&= 1 - \left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{y_i}{\mu} - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{y_i}{\mu}\log\frac{y_i}{\mu}\right] \\
&= 1 - \frac{1}{n\mu}\sum_{i=1}^{n}\left[1 - \log\frac{y_i}{\mu}\right]y_i \\
&= 1 - \frac{1}{n\mu}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^T(\mathbf{y})y_i
\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^T(\mathbf{y}) y_i = n\mu(1-T)$$

que podemos rescribir como,

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^T(\mathbf{y}) y_i = V^T(\mathbf{y}) = Y(1-T)$$

2) Haciendo uso de la definición del segundo índice de Theil, dado en la ecuación (3.31) del capítulo 3, podemos escribir:

$$\begin{aligned}
T^* &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \log \frac{\mu}{y_i} \\
&= 1 - \left[1 - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \log \frac{\mu}{y_i}\right] \\
&= 1 - \left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{y_i}{\mu} - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{\mu y_i}{\mu y_i} \log \frac{\mu}{y_i}\right] \\
&= 1 - \frac{1}{n\mu}\sum_{i=1}^{n} \left[1 - \frac{\mu}{y_i} \log \frac{\mu}{y_i}\right] y_i \\
&= 1 - \frac{1}{n\mu}\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^{T^*}(\mathbf{y}) y_i
\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^{T^*}(\mathbf{y}) y_i = n\mu\left(1-T^*\right)$$

que podemos rescribir como,

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^{T^*}(\mathbf{y}) y_i = V^{T^*}(\mathbf{y}) = Y\left(1-T^*\right)$$

q.e.d.

Los coeficientes de ponderación $\alpha_i^T(\mathbf{y})$ verifican la propiedad de independencia y, por tanto, la de réplica de las poblaciones. Nos dicen que si un individuo tiene una renta igual a la media entonces le damos un peso unitario en la función de evaluación social. Por tanto, también verifican la propiedad de escala unitaria. Para valores $y_i > \mu$ el logaritmo del cociente es positivo, lo que implica que los individuos más ricos que el promedio entran en la evaluación social con un peso inferior a la unidad. Y viceversa para los individuos con rentas inferiores a la media, $y_i < \mu$, que entran en la evaluación social con un peso superior a la unidad. Esto puede apreciarse de forma general si observamos que la derivada de la función de ponderación tiene siempre signo negativo,[181]

$$\frac{\partial \alpha_i^T}{\partial y_i} = -\frac{\mu}{y_i} \frac{\partial\left(\frac{y_i}{\mu}\right)}{\partial y_i} < 0$$

Por tanto, estos coeficientes verifican la propiedad de equidad mínima. Claramente estos coeficientes resultan homogéneos de grado cero.

Para valores de la renta superiores a $e\mu$ (donde e es la base de los logaritmos naturales o neperianos) este tipo de coeficientes asigna ponderaciones negativas a los individuos. Dicho informalmente, nuestra preocupación por la desigualdad es tal que, si un individuo posee una renta más de tres veces superior a la media, entonces entra con una ponderación negativa en la evaluación del bienestar.

Los coeficientes de ponderación $\alpha_i^{T^*}(\mathbf{y})$ también verifican las propiedades de réplica de las poblaciones y escala unitaria. Puede comprobarse fácilmente, sin embargo, que no cumplen la propiedad de independencia, ni la de equidad mínima. Para esto último basta comprobar que tomando valores $y_j < \mu < y_i$ resulta que $\alpha_j^{T^*}(\mathbf{y}) < 1 < \alpha_i^{T^*}(\mathbf{y})$.

El siguiente resultado extiende la idea de S-consistencia a los índices de entropía generalizados para valores del parámetro θ distintos de 0 y 1.

[181] Obsérvese que

$$\frac{\partial\left(\frac{y_i}{\mu}\right)}{\partial y_i} = \frac{\mu - y_i \frac{\partial \mu}{\partial y_i}}{\mu^2} = \frac{\mu - y_i \frac{1}{n}}{\mu^2} = \frac{\frac{\Sigma_{j \neq i} y_j}{n}}{\mu^2} > 0$$

Teorema (9.6)

Sea $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ una distribución ordenada de renta. El sistema de ponderadores

$$\alpha_i^{I_\theta}(\mathbf{y}) = 1 - \frac{1}{\theta(\theta-1)}\frac{\mu}{y_i}\left[\left(\frac{y_i}{\mu}\right)^{\theta} - 1\right]$$

genera una función de evaluación social, $V^{I_\theta}(\mathbf{y})$, S-consistente con la familia de índices de entropía generalizados para $\theta \neq 0$, 1. Es decir,

$$V^{I_\theta}(\mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^{I_\theta}(\mathbf{y}) y_i = Y\left(1 - I_\theta\right) \tag{9.7}$$

Demostración

Haciendo uso de la definición de los índices de entropía generalizados para $\theta \neq 0$, 1 dado en la ecuación (3.38) del capítulo 3, podemos escribir:

$$\begin{aligned}
I_\theta &= \frac{1}{n}\frac{1}{\theta(\theta-1)}\sum_{i=1}^{n}\left[\left(\frac{y_i}{\mu}\right)^{\theta} - 1\right] \qquad\qquad \theta \neq 0,1 \\
&= 1 - \left[1 - \frac{1}{n}\frac{1}{\theta(\theta-1)}\sum_{i=1}^{n}\left[\left(\frac{y_i}{\mu}\right)^{\theta} - 1\right]\right] \\
&= 1 - \left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{y_i}{\mu} - \frac{1}{n}\frac{1}{\theta(\theta-1)}\sum_{i=1}^{n}\frac{\mu y_i}{\mu y_i}\left[\left(\frac{y_i}{\mu}\right)^{\theta} - 1\right]\right] \\
&= 1 - \frac{1}{n\mu}\sum_{i=1}^{n}\left[1 - \frac{1}{\theta(\theta-1)}\frac{\mu}{y_i}\left[\left(\frac{y_i}{\mu}\right)^{\theta} - 1\right]\right] y_i \\
&= 1 - \frac{1}{n\mu}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^{I_\theta}(\mathbf{y}) y_i
\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^{I_\theta}(\mathbf{y}) y_i = n\mu\left(1 - I_\theta\right)$$

que podemos rescribir como,

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^{I_\theta}(\mathbf{y}) y_i = V^{I_\theta}(\mathbf{y}) = Y\left(1 - I_\theta\right)$$

q.e.d.

Obsérvese que el sistema de ponderadores puede ser escrito de forma alternativa como

$$\alpha_i^{I_\theta}(\mathbf{y}) = 1 - \frac{1}{\theta(\theta-1)}\left[\left(\frac{y_i}{\mu}\right)^{\theta-1} - \frac{\mu}{y_i}\right] \tag{9.8}$$

Para cada valor dado de $\theta \neq 0, 1$ este sistema de ponderadores verifica la propiedad de réplica de las poblaciones, pero no la de independencia. Nótese que estos coeficientes dependen de un parámetro θ que refleja el grado de aversión a la desigualdad. Menores valores de θ corresponden a mayor preocupación por la desigualdad, puesto que se da más importancia a las transferencias de renta en los niveles bajos de la distribución.

En el caso de un individuo con renta igual a la media, $y_i = \mu$, el coeficiente de ponderación es uno, $\alpha_i^{I_\theta} = 1$, independientemente del valor de θ. Por tanto, las ponderaciones también verifican la propiedad de escala unitaria. Es fácil observar, a partir de la fórmula para los ponderadores, $\alpha_i^{I_\theta}$, que cuando $\theta > 1$, los individuos más ricos que el promedio, $y_i > \mu$, entran en la función de evaluación social con un peso inferior a la unidad, mientras que lo contrario ocurre con los individuos con rentas inferiores a la media, $y_i < \mu$, que entran en la función de evaluación social con un peso superior a la unidad. Justo lo contrario ocurre para $\theta < 1$, y $\theta \neq 0$, en este caso los individuos más ricos que el promedio, $y_i > \mu$, entran en la función de evaluación social con un peso superior a la unidad, mientras que los individuos con rentas inferiores a la media, $y_i < \mu$, entran en la función de evaluación social con un peso inferior a la unidad. Así pues, para valores de $\theta < 1$, los ponderadores no verifican la propiedad de equidad mínima, cuyo cumplimiento depende por tanto del valor de θ.

Esto puede apreciarse de forma general a partir de la derivada de la función de ponderación respecto a y_i/μ, que viene dada por

$$\frac{\partial \alpha_i^{I_\theta}}{\partial\left(\dfrac{y_i}{\mu}\right)} = -\frac{1}{\theta(\theta-1)}\left(\frac{\mu}{y_i}\right)^2\left[1 + (\theta-1)\left(\frac{y_i}{\mu}\right)^{\theta}\right] \tag{9.9}$$

Para $\theta > 1$ esta derivada es siempre negativa, de forma que, en este caso, los ponderadores verifican la propiedad de equidad mínima. Pero para $\theta < 1$, y $\theta \neq 0$, no podemos determinar el signo de esta derivada de forma inequívoca y el ejemplo anterior muestra que, en este caso, no se verifica la propiedad de equidad mínima.[182]

Un caso especialmente interesante es cuando $\theta = 2$, ya que I_2 es cardinalmente equivalente al coeficiente de variación al cuadrado, CV^2, según vimos en el capítulo 3,

$$I_2 = \frac{1}{2} CV^2$$

La siguiente proposición muestra cómo esta formulación permite vincular, de forma nítida, la función de evaluación social con el coeficiente de variación.

Proposición (9.1)

Sea $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ una distribución ordenada de renta. El sistema de ponderadores

$$\alpha_i^{CV^2}(\mathbf{y}) = 1 - \left[\frac{y_i^2 - \mu^2}{\mu y_i} \right]$$

genera una función de evaluación social, $V^{CV^2}(\mathbf{y})$, S-consistente con el *coeficiente de variación al cuadrado*. Es decir,

$$V^{CV^2}(\mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^{CV^2}(\mathbf{y}) y_i = Y(1 - CV^2) \tag{9.10}$$

[182] Cuando $\theta < 1$ el signo de la derivada (9.9) depende en última instancia del signo de la función

$$\left[1 + (\theta - 1) \left(\frac{y_i}{\mu} \right)^{\theta} \right]$$

puede demostrarse que, en este caso, dicha función cruza el eje de abscisas en un determinado punto de $\mathbb{R}_+$, y tiene pendiente positiva si $\theta < 0$, y pendiente negativa si $0 < \theta < 1$, en consecuencia el signo de la función varía con el nivel de y_i/μ, y no es posible determinarlo de forma inequívoca.

Demostración

Haciendo uso de la equivalencia entre I_2 y CV, dada en el capítulo 2, podemos escribir:

$$
\begin{aligned}
CV^2 = 2I_2 &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[\left(\frac{y_i}{\mu}\right)^2 - 1\right] \\
&= 1 - \left[1 - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{y_i^2 - \mu^2}{\mu^2}\right)\right] \\
&= 1 - \left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{y_i}{\mu} - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{y_i}{y_i}\left(\frac{y_i^2 - \mu^2}{\mu^2}\right)\right] \\
&= 1 - \frac{1}{n\mu}\sum_{i=1}^{n}\left[1 - \left(\frac{y_i^2 - \mu^2}{\mu\, y_i}\right)\right] y_i \\
&= 1 - \frac{1}{n\mu}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^{CV^2}(\mathbf{y})y_i
\end{aligned}
$$

Por tanto,

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^{CV^2}(\mathbf{y})y_i = n\mu\left(1 - CV^2\right)$$

que podemos rescribir como,

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^{CV^2}(\mathbf{y})y_i = V^{CV^2}(\mathbf{y}) = Y\left(1 - CV^2\right)$$

q.e.d.

Obsérvese como el sistema de ponderadores puede ser escrito como

$$\alpha_i^{CV^2} = 1 - \left[\frac{y_i}{\mu} - \frac{\mu}{y_i}\right] \tag{9.11}$$

Este sistema de ponderadores verifica las propiedades de equidad mínima, escala unitaria y réplica de las poblaciones. Pero no la propiedad de independencia.

Para valores de renta superiores a $(1/2)\left(1+\sqrt{5}\right).\mu$ estos coeficientes asignan ponderaciones negativas a los individuos. Es decir, nuestra preocupación por la desigualdad es tal que, si un individuo posee una renta superior a 1,6 veces la media, entonces entra con una ponderación negativa en la evaluación del bienestar.

Por último, consideramos el caso de los índices de desigualdad de Atkinson.

En primer lugar, debemos observar que para $\varepsilon = 1$ la función de bienestar social considerada por Atkinson (1970) y, dada en el capítulo 4, (4.13), no es homogénea, por ello descartamos a priori este índice particular. Para valores de $\varepsilon \neq 1$ la función de bienestar social es homogénea de grado $1-\varepsilon$, por lo que solo consideraremos estos casos.[183]

Teorema (9.7)

*S*ea $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ una distribución ordenada de renta. El sistema de ponderadores

$$\alpha_i^{A_\varepsilon}(\mathbf{y}) = \frac{1}{y_i^\varepsilon}$$

genera una función de evaluación social, $V^{A_\varepsilon}(\mathbf{y})$, *S*-consistente con la familia de índices de Atkinson para $\varepsilon \in [0, 1)$. En particular,

$$V^{A_\varepsilon}(\mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^{A_\varepsilon}(\mathbf{y}) y_i = n\xi^{1-\varepsilon} = k\left[Y(1-A_\varepsilon)\right]^{1-\varepsilon} \qquad (9.12)$$

donde k es una constante positiva.

Demostración

Por construcción de la familia de índices de desigualdad de Atkinson (1970), $\xi = \mu(1-A_\varepsilon)$, donde para la función de bienestar social considerada, (4.13),

$$\xi = \left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i^{1-\varepsilon}\right]^{\frac{1}{1-\varepsilon}}$$

En consecuencia podemos escribir,

$$n\xi^{1-\varepsilon} = \sum_{i=1}^{n} y_i^{1-\varepsilon} = \sum_{i=1}^{n} y_i^{-\varepsilon} y_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^{A_\varepsilon}(\mathbf{y}) y_i$$

[183] En realidad la homogeneidad se cumple con las funciones de utilidad empleadas originalmente por Atkinson (1970), (4.7*), que son ligeramente distintas de las que hemos proporcionado en el capítulo 4, (4.7), aunque generen el mismo índice de desigualdad.

Por tanto,

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^{A_\varepsilon}(\mathbf{y}) y_i = V^{A_\varepsilon}(\mathbf{y}) = n\xi^{1-\varepsilon} = n\left[\mu(1-A_\varepsilon)\right]^{1-\varepsilon} = k\left[Y(1-A_\varepsilon)\right]^{1-\varepsilon}$$

donde $k = n^{\varepsilon}$.

q.e.d.

Observamos, en primer lugar, que la transformación anterior es válida también para valores de $\varepsilon > 1$, que corresponden a una mayor preocupación por la desigualdad. Sin embargo, en estos casos, la función de evaluación social no es *S*-consistente, de acuerdo con la definición (9.2), ya que dicha función no es una transformación monótona creciente de la renta igualitaria equivalente. En esta situación el bienestar aumenta con la desigualdad, para un nivel dado de renta agregada. Esta es la razón por la que los casos $\varepsilon > 1$ están excluidos del teorema (9.7).

El sistema de ponderadores, $\alpha_i^{A_\varepsilon}(\mathbf{y}) = 1/y_i^{\varepsilon}$, varía en función del parámetro que mide la aversión a la desigualdad. Estos pesos son siempre positivos y otorgan una ponderación de $1/\mu^{\varepsilon}$ al individuo con renta media, por tanto, no verifican la propiedad de escala unitaria. Por el contrario, sí verifican, claramente, las propiedades de réplica de las poblaciones e independencia, de hecho en este caso los pesos resultan una función exclusiva de la propia renta del individuo, lo que no es una característica muy atractiva.

Observamos, además, que la derivada de la función de ponderación,

$$\frac{\partial \alpha_i^{A_\varepsilon}(\mathbf{y})}{\partial y_i} = -\frac{\varepsilon}{y_i^{\varepsilon+1}} < 0$$

es negativa, por lo que el sistema de ponderadores cumple la propiedad de equidad mínima. Obviamente en el caso $\varepsilon = 0$, que implica que no existe aversión a la desigualdad, entonces todos los pesos son iguales a uno, $\alpha_i^{A_0}(\mathbf{y}) = 1, \ \forall i$, y la función de evaluación social es simplemente la renta total. Finalmente, obsérvese que los coeficientes de ponderación son homogéneos de grado $-\varepsilon$.

Hemos definido en este epígrafe el concepto de función de evaluación social *S*-consistente, definición (9.2), como aquella que puede escribirse como

$$V(\mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(\mathbf{y}) y_i = n\xi = Y\left(1 - I(\mathbf{y})\right) \tag{9.13}$$

o una transformación monótona creciente de la renta igualitaria equivalente, y donde $Y = n\mu$ es la renta total y ξ representa la renta igualitaria equivalente.

Esta aproximación supone el uso de una métrica monetaria, ya que implica medir el bienestar *en dinero,* mediante la equiparación de *bienestar* con valoración monetaria de la renta igualitaria equivalente agregada. Aunque el significado de los valores monetarios es bastante inmediato, conviene advertir que las unidades en que se mide la renta afectan a la magnitud del bienestar, lo que se refleja en la función de evaluación social. Por ello, cabría considerar la posibilidad de expresar la medida de bienestar en términos de una variable que no se viera afectada por los cambios en las unidades de medida de la renta.

Una posibilidad en este sentido es tomar como referencia el salario medio y definir $Y^{w_0} = \left(Y/w_0\right)$. En este caso el bienestar se mediría en términos del *trabajo demandable,* es decir, nos diría cuánto trabajo, en promedio, podríamos comprar con el valor de la renta igualitaria equivalente.[184] Con esta formulación la magnitud del impacto de la desigualdad sobre el bienestar resulta también independiente de las unidades de medida de la renta. Es decir,

$$\frac{\partial V(\mathbf{y})}{\partial I(\mathbf{y})} = -\frac{Y}{w_0}$$

Alternativamente, el valor del salario de referencia podría sustituirse por el coste de una cesta de consumo representativa. En tal caso el bienestar aparecería medido en términos del número de cestas que podríamos alcanzar y, de nuevo, sería independiente de las unidades de medida.

---

[184] La noción de trabajo demandable aparece en Adam Smith como una teoría de valor trabajo relativo *(labour commanded value)*, a diferencia de la teoría del valor trabajo incorporado de Ricardo o Marx (Napoleoni 1975).

10. La función de evaluación social V^T

10.1. Introducción

Dedicamos este capítulo a un estudio más detallado de una de las funciones de evaluación social, $V(\mathbf{y})$, que hemos presentado en el capítulo 9. Se trata de la función $V^T(\mathbf{y})$ del punto 1 del teorema (9.5), que presenta buenas propiedades analíticas, un potencial de aplicaciones muy interesante y puede ser caracterizada con unos axiomas muy sencillos.

Una de las propiedades esenciales de este indicador es su descomponibilidad aditiva, que ya analizamos, de forma extensa, en el capítulo 6 para los índices de desigualdad, y que permite abordar el análisis de diversas cuestiones relacionadas con el bienestar y la desigualdad en un contexto unificado. En este capítulo presentamos la caracterización de esta función de evaluación social y su descomposición por subgrupos de población. En el capítulo 11 plantearemos el uso de este tipo de indicador para el análisis de la desigualdad en el contexto de una población heterogénea, donde queremos deslindar la desigualdad en renta de la desigualdad de oportunidades. Más adelante presentaremos algunas aplicaciones empíricas de este tipo de indicador, analizando el bienestar y la distribución de la renta en España y sus comunidades autónomas.

10.2. Axiomatización de V^T

Acabamos de ver, en el capítulo anterior, que la función de evaluación social asociada al índice de Theil, $V^T(\mathbf{y}) = Y.(1-T)$, es la única de entre las que hemos analizado que verifica las propiedades de equidad mínima, independencia y escala unitaria.[185]

Veremos a continuación que, en realidad, no hay ninguna otra forma de la función de evaluación social que cumpla estas propiedades si exigimos, además, que $V^T(\mathbf{y})$ sea homogénea de grado uno. En otros términos, estas propiedades prácticamente caracterizan la función $V^T(\mathbf{y})$.[186]

Recordemos el contenido de estas propiedades:

— *Equidad mínima:* para toda distribución de renta $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n_{++}$, y para todo $i, j \in N$, $y_j < y_i \quad \Rightarrow \quad \alpha_j(\mathbf{y}) > \alpha_i(\mathbf{y})$.
— *Independencia:* para todo $i, j \in N$, $\alpha_i(\mathbf{y}) - \alpha_j(\mathbf{y}) = a(y_i, y_j)$.
— *Escala unitaria:* si $y_i = \mu \ \ \forall i \quad \Rightarrow \quad \alpha_i(\mathbf{y}) = 1 \ \ \forall i$.

La equidad mínima establece que damos más peso en nuestra valoración social a los individuos con menos renta e introduce, de esta forma, condiciones igualitarias en el análisis. La independencia establece que, para una distribución dada, la valoración social marginal de dos individuos depende únicamente del valor de sus respectivas rentas. Finalmente, la propiedad de escala unitaria fija los coeficientes de ponderación cuando la distribución de la renta es perfectamente igualitaria, con objeto de que la renta nacional coincida con la valoración del bienestar en dicho caso.

Las siguientes proposiciones ilustran las consecuencias de estas propiedades.

Proposición (10.1)

Sea $V(\mathbf{y})$ una función de evaluación social que cumple las propiedades de equidad mínima e independencia. Entonces, se cumple que $\alpha_i(\mathbf{y}) - \alpha_j(\mathbf{y}) = f(y_i) - f(y_j)$, para alguna función f diferenciable y homogénea.

---

[185] Recordemos igualmente que si una función de valoración social $V(\mathbf{y})$, que por definición suponemos diferenciable y homogénea, verifica la propiedad de independencia, entonces verifica automáticamente la propiedad de réplica de las poblaciones.

[186] Seguimos aquí el trabajo de Villar (2005b).

Demostración

Para todo $i, j, k \in N$, tenemos que

$$\alpha_i(\mathbf{y}) - \alpha_j(\mathbf{y}) = \left[\alpha_i(\mathbf{y}) - \alpha_k(\mathbf{y})\right] - \left[\alpha_j(\mathbf{y}) - \alpha_k(\mathbf{y})\right]$$

de forma que la propiedad de independencia nos permite escribir,

$$a(y_i, y_j) = a(y_i, y_k) - a(y_j, y_k)$$

Esto implica que,

$$\frac{\partial a(y_i, y_k)}{\partial y_i} = \frac{\partial a(y_i, y_j)}{\partial y_i}$$

que a su vez implica,

$$\frac{\partial^2 a(y_i, y_k)}{\partial y_i \partial y_k} = \frac{\partial^2 a(y_i, y_j)}{\partial y_i \partial y_j} = 0$$

Lo que significa que la función $a(y_i, y_j)$ es aditiva, es decir, tiene la forma $a(y_i, y_j) = f_1(y_i) + f_2(y_j)$. Pero, por la propiedad de equidad mínima, se cumple que $a(y_i, y_i) = 0$. Por tanto, $f_1(y_i) + f_2(y_i) = 0$, lo que prueba que $\alpha_i(\mathbf{y}) - \alpha_j(\mathbf{y}) = f(y_i) - f(y_j)$.

La diferenciabilidad y la homogeneidad de f se deducen inmediatamente de las propiedades de $V(\mathbf{y})$.

q.e.d.

Proposición (10.2)

Sea $V(\mathbf{y})$ una función de evaluación social homogénea de grado uno que cumple las propiedades de equidad mínima, independencia y escala unitaria. Entonces, se cumple que

$$\alpha_i(\mathbf{y}) = 1 - \beta \log \frac{y_i}{\mu}$$

donde β es un escalar positivo.

Demostración

Véase el apéndice A.5.

Podemos probar ahora el siguiente resultado de interés.

Teorema (10.1)

Una función de evaluación social $V(\mathbf{y})$ es homogénea de grado uno y verifica las propiedades de equidad mínima, independencia y escala unitaria, si y solo si, es de la forma

$$V^T(\mathbf{y};\beta) = n\mu(1-\beta T(\mathbf{y})) \tag{10.1}$$

donde β es un escalar positivo.

Demostración

Es fácil comprobar que la función $V^T(\mathbf{y};\beta) = n\mu(1-\beta T(\mathbf{y}))$ verifica la homogeneidad de grado uno y las tres propiedades enunciadas. Veamos ahora el recíproco de este resultado.

A partir de 1) del teorema (9.5) del capítulo anterior, podemos escribir

$$\begin{aligned}
\beta T(\mathbf{y}) &= \beta \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{y_i}{\mu}\log\frac{y_i}{\mu} \\
&= 1 - \left[1 - \beta \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{y_i}{\mu}\log\frac{y_i}{\mu}\right] \\
&= 1 - \frac{1}{n\mu}\sum_{i=1}^{n}\left[1-\beta\log\frac{y_i}{\mu}\right] y_i \\
&= 1 - \frac{1}{n\mu}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^T(\mathbf{y},\beta)\, y_i
\end{aligned}$$

que podemos rescribir como

$$V^T(\mathbf{y};\beta) = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i^T(\mathbf{y},\beta)\, y_i = Y.\left(1-\beta T(\mathbf{y})\right)$$

En consecuencia, es suficiente demostrar que las condiciones mencionadas en el teorema implican los coeficientes de ponderación de Theil ajustados, $\alpha_i^T(\mathbf{y},\beta) = 1-\beta\log\left(y_i/\mu\right)$. Este es precisamente el contenido de la proposición (10.2), lo que cierra la demostración.

q.e.d.

Este teorema nos dice que elegir una función de evaluación social, $V(\mathbf{y})$, que verifique los supuestos de homogeneidad de grado uno, equidad mínima, independencia y escala unitaria, equivale a medir el bienestar social mediante una función que consiste en la renta total deflactada por un término que mide la desigualdad mediante el índice de Theil (1967).

El parámetro β es una medida de nuestra preferencia por la igualdad, entendida como el peso que queremos darle a la desigualdad, medida según el índice de Theil (1967), en relación con la renta. El término $n\mu\beta T(\mathbf{y})$ constituye así una medida de la pérdida de renta potencial o bienestar, en términos de esta métrica monetaria, debida a la desigualdad. Obsérvese que esta formulación implica, que cuando mayor es la renta, mayor es la pérdida absoluta de bienestar que la sociedad experimenta para un nivel dado de desigualdad. Por su parte el término $\xi = \mu(1-\beta T(\mathbf{y}))$ representa la renta igualitaria equivalente,[187] es decir, la cantidad de renta que igualmente distribuida en la sociedad proporcionaría el mismo nivel de bienestar social que la distribución existente de renta, $\mathbf{y}$.

Observemos entonces que, como ya indicamos en el capítulo 8, podemos interpretar $\beta T(\mathbf{y})$ como la pérdida de renta potencial o bienestar por unidad de renta, dado que,

$$\beta T(\mathbf{y}) = \frac{n\mu\beta T(\mathbf{y})}{n\mu}$$

Análogamente,

$$z_{V^T}(\mathbf{y}) = \frac{n\mu\beta T(\mathbf{y})}{V^T(\mathbf{y})} = \frac{\beta T(\mathbf{y})}{1-\beta T(\mathbf{y})}$$

representa la pérdida relativa de renta potencial o bienestar por unidad de bienestar, esto es, la pérdida de bienestar debida a la desigualdad en relación al bienestar agregado.

[187] Obsérvese que este término no es más que el bienestar per cápita.

10.3. La determinación del parámetro de aversión a la desigualdad

Para determinar de alguna forma significativa el valor del parámetro β, que mide nuestra preferencia por la igualdad, podemos recurrir a diferentes aproximaciones. Tal vez la más ilustrativa es aquella que vincula los valores de este parámetro a los umbrales de renta relativa a partir del cual los individuos entran con pesos positivos en la función de valoración social.

De acuerdo con la proposición (10.2) y el teorema (10.1), las propiedades de homogeneidad de grado uno, equidad mínima, independencia y escala unitaria se cumplen para la función de evaluación social, $V(\mathbf{y})$, si y solo si la valoración social marginal de un individuo viene dada por,

$$\alpha_i(\mathbf{y},\beta) = 1 - \beta \log\left(y_i/\mu\right)$$

Consideremos ahora la propiedad de *progresividad baja:*

$$\lim_{y_i \to Y} \alpha_i^T(\mathbf{y},\beta) = 0$$

Esta propiedad establece que damos una ponderación cero a un individuo si toda la renta, Y, está concentrada en sus manos. Es inmediato comprobar que la propiedad de progresividad baja, junto con la de equidad mínima, implican que $\alpha_i^T(\mathbf{y},\beta) \geq 0, \ \forall i$.

Podemos probar entonces el siguiente resultado.

Proposición (10.3)

Una función de evaluación social $V(\mathbf{y})$ es homogénea de grado uno y verifica las propiedades de equidad mínima, independencia, escala unitaria y progresividad baja, si y solo si, es de la forma:

$$\tilde{V}^T(\mathbf{y}) = n\mu.\left(1 - \tilde{T}(\mathbf{y})\right) \qquad (10.2)$$

donde $\tilde{T}(\mathbf{y}) = \dfrac{1}{\log n}.T(\mathbf{y})$ es el índice de Theil normalizado.

Demostración

Es fácil comprobar que la función $\tilde{V}^T(\mathbf{y}) = n\mu.\left(1 - \tilde{T}(\mathbf{y})\right)$ verifica las propiedades mencionadas en la proposición.

Para comprobar el recíproco, recordemos que la proposición (10.2) establece que bajo las propiedades mencionadas, excepto la de progresividad baja, la valoración social marginal de un individuo viene dada por

$$\alpha_i(\mathbf{y},\beta) = 1 - \beta \log \frac{y_i}{\mu}$$

Si aplicamos ahora la propiedad de progresividad baja a la forma funcional de estos coeficientes, obtenemos

$$1 - \beta \log \frac{Y}{\mu} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \beta = \frac{1}{\log n}$$

de modo que la función de evaluación social adquiere la forma

$$\tilde{V}^T(\mathbf{y}) = V^T\left(\mathbf{y}, \frac{1}{\log n}\right) = n\mu.\left(1 - \tilde{T}(\mathbf{y})\right) \tag{10.2}$$

donde

$$\tilde{T}(\mathbf{y}) = \frac{1}{\log n}.T(\mathbf{y})$$

es el índice de Theil (1967) normalizado (3.27).

q.e.d.

Obsérvese que, en este caso, la función $\tilde{V}^T(\mathbf{y})$ es monótona en la renta, puesto que $0 \leq \tilde{T}(\mathbf{y}) \leq 1$.

La pérdida de bienestar por unidad de renta viene dada por

$$\tilde{T}(\mathbf{y}) = \frac{1}{\log n}.T(\mathbf{y})$$

mientras que la pérdida relativa de bienestar viene dada por

$$z_{\tilde{V}^T}(\mathbf{y}) = \frac{T(\mathbf{y})}{\log n - T(\mathbf{y})}$$

Este resultado nos dice que el 100% del bienestar se habrá perdido si alcanzamos un nivel de desigualdad igual a la mitad del máximo del índice de Theil (1967), es decir, $z_{\tilde{V}^T}(\mathbf{y}) = 1$ cuando $T(\mathbf{y}) = 1/2.\log n$.

Un principio igualitario más exigente es el de *progresividad alta:*

$$y_i = e\mu \quad \Rightarrow \quad \alpha_i^T(\mathbf{y},\beta) = 0$$

Esta propiedad nos dice que damos una valoración social marginal igual a cero a aquellos individuos cuya renta es e veces la media, μ, donde e es la base de los logaritmos neperianos. Por tanto, combinado con el principio de equidad mínima, esta propiedad implica que el coeficiente $\alpha_i^T(\mathbf{y})$ toma valores negativos para niveles de renta superiores a tres veces la renta per cápita de la sociedad.

Obtenemos entonces el siguiente resultado.

Proposición (10.4)

Una función de evaluación social $V(\mathbf{y})$ es homogénea de grado uno y verifica los principios de equidad mínima, independencia, escala unitaria y progresividad alta, si y solo si, es de la forma

$$V^T(\mathbf{y}) = n\mu(1 - T(\mathbf{y})) \tag{10.3}$$

Demostración

Es fácil comprobar que la función $V^T(\mathbf{y}) = n\mu(1 - T(\mathbf{y}))$ verifica las propiedades mencionadas en la proposición.

También es fácil comprobar el recíproco, teniendo en cuenta que la proposición (10.2) establece que bajo las propiedades mencionadas, excepto progresividad alta, la valoración social marginal de un individuo viene dada por

$$\alpha_i(\mathbf{y},\beta) = 1 - \beta \log \frac{y_i}{\mu}$$

Si aplicamos ahora la propiedad de progresividad alta a la forma funcional de estos coeficientes, obtenemos

$$1 - \beta \log \frac{e\mu}{\mu} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \beta = 1$$

de modo que la función de evaluación social adquiere la forma

$$V^T(\mathbf{y}) = n\mu(1 - T(\mathbf{y})) \tag{10.3}$$

q.e.d.

La función de evaluación social asociada con la propiedad de progresividad alta tiene la peculiaridad de que el bienestar resulta decreciente con la renta total cuando el índice de desigualdad de Theil es superior a la unidad.[188] Es decir, nuestra preocupación por la desigualdad es tal que, para valores muy elevados de la desigualdad, $T(\mathbf{y}) > 1$, todo aumento en la renta que no reduzca suficientemente su disparidad supone una reducción del bienestar.

Ahora, la pérdida de bienestar por unidad de renta viene dada, precisamente, por el índice de Theil (1967), $T(\mathbf{y})$. Y la pérdida relativa de bienestar es

$$z_{V^T}(\mathbf{y}) = \frac{T(\mathbf{y})}{1 - T(\mathbf{y})}$$

Este resultado nos dice que el 100% del bienestar se habrá perdido si alcanzamos un nivel de desigualdad igual a $T(\mathbf{y}) = 1/2$.[189]

10.4. Descomponibilidad

Una de las propiedades interesantes, en este último caso, es que la función de valoración social, $V^T(\mathbf{y})$, resulta descomponible aditivamente por subgrupos de población.

En efecto, supongamos que la sociedad está compuesta por la unión de G grupos diferentes, exhaustivos y mutuamente excluyentes entre sí, indiciados por el índice $g = 1, 2, 3, \ldots, G$. Utilizando la misma notación que en capítulos anteriores, designamos por n_g el número de individuos del grupo g y por $\mathbf{y}^g = (y_1^g, y_2^g, \ldots, y_{n_g}^g)$ su vector de rentas, de forma que y_i^g es la renta del individuo i del

[188] Un caso extremadamente difícil de encontrar en distribuciones reales.
[189] Lo que constituye un nivel de desigualdad muy elevado en distribuciones reales.

grupo g. Sea $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_G)$ el vector de rentas medias de cada grupo, siendo μ_g la renta media del grupo g. Con esta notación la media global, μ, es una suma ponderada de las medias de los diferentes grupos, donde la ponderación viene dada por la importancia demográfica de cada grupo,

$$\mu = \Sigma_{g=1}^{G} \frac{n_g}{n} \mu_g$$

y la renta total, Y, puede escribirse como

$$Y = n\mu = \Sigma_{g=1}^{G} n_g \mu_g = \Sigma_{g=1}^{G} \Sigma_{i=1}^{n_g} y_i^g$$

Recordemos que, en este contexto, el índice de Theil (1967), $T(\mathbf{y})$, es aditivamente descomponible. De forma que, de acuerdo con la ecuación (3.29), podemos escribir

$$\begin{aligned} T(\mathbf{y}) &= \sum_{g=1}^{G} \frac{n_g.\mu_g}{n.\mu} T(\mathbf{y}^g) + \sum_{g=1}^{G} \frac{n_g.\mu_g}{n.\mu} \log \frac{\mu_g}{\mu} \\ &= \frac{1}{n.\mu} \sum_{g=1}^{G} n_g.\mu_g \left[T(\mathbf{y}^g) + \log \frac{\mu_g}{\mu} \right] \end{aligned} \tag{10.4}$$

Sustituyendo (10.4) en la función de evaluación social (10.3) obtenemos

$$\begin{aligned} V^T(\mathbf{y}) &= n\mu.\big(1 - T(\mathbf{y})\big) \\ &= n\mu - \sum_{g=1}^{G} n_g.\mu_g \left[T(\mathbf{y}^g) + \log \frac{\mu_g}{\mu} \right] \\ &= \sum_{g=1}^{G} n_g.\mu_g \left[1 - T(\mathbf{y}^g) - \log \frac{\mu_g}{\mu} \right] \\ &= \sum_{g=1}^{G} n_g.\mu_g \big(1 - T(\mathbf{y}^g)\big) - \sum_{g=1}^{G} n_g.\mu_g \log \frac{\mu_g}{\mu} \end{aligned} \tag{10.5}$$

De esta forma, la valoración social de la distribución de la renta, $\mathbf{y}$, podemos expresarla como la suma de dos componentes

$$\begin{aligned} V^T(\mathbf{y}) &= \sum_{g=1}^{G} n_g.\mu_g\left(1 - T(\mathbf{y}^g)\right) - \sum_{g=1}^{G} n_g.\mu_g \log\frac{\mu_g}{\mu} \\ &= \sum_{g=1}^{G} V^T(\mathbf{y}^g) - V_B^T(\boldsymbol{\mu}) \end{aligned} \tag{10.6}$$

donde

$$V^T(\mathbf{y}^g) = n_g.\mu_g\left(1 - T(\mathbf{y}^g)\right) \tag{10.7}$$

El primero de los términos en (11.6), $\Sigma_{g=1}^{G} V^T(\mathbf{y}^g)$, recoge la suma de las valoraciones sociales de las distribuciones de renta dentro de cada uno de los grupos, incorporando la pérdida de bienestar debida a la desigualdad dentro de cada grupo, medida a través del índice de Theil (1967) correspondiente. Esta suma no es el bienestar de la sociedad en su conjunto porque su cómputo no tiene en cuenta las diferencias de renta entre los grupos de la población, que vienen recogidas por el segundo de los términos en la ecuación (10.6)

$$V_B^T(\boldsymbol{\mu}) = \sum_{g=1}^{G} n_g.\mu_g \log\frac{\mu_g}{\mu} \tag{10.8}$$

Este es un término de descuento que recoge el efecto de la desigualdad entre los distintos grupos. Este componente no es más la que suma ponderada del logaritmo de las medias de los grupos en relación con la media total, con ponderaciones iguales a las rentas totales de cada uno de los grupos. Obsérvese que (10.8) no es más que $n.\mu$ por el término intergrupos de la descomposición del índice de Theil (3.29),

$$V_B^T(\boldsymbol{\mu}) = \sum_{g=1}^{G} n_g.\mu_g \log\frac{\mu_g}{\mu} = n.\mu\sum_{g=1}^{G}\frac{n_g.\mu_g}{n.\mu}\log\frac{\mu_g}{\mu} = n.\mu.T_B \tag{10.9}$$

de forma que este término recoge la pérdida de bienestar, debida a las desigualdades entre los distintos grupos de la sociedad.

Adviértase que, por construcción, $V_B^T(\boldsymbol{\mu})$ será siempre positivo o nulo y puede interpretarse como la pérdida de bienestar, medido en términos monetarios, y señala la desigualdad entre los grupos. O, dicho de otro modo, la subvención que deberíamos dar a esta sociedad para que consiguiera disfrutar del nivel de bienestar asociado a su nivel de renta per cápita, si la renta estuviera igualmente distribuida entre los distintos grupos que conforman la sociedad, manteniendo intacta la distribución dentro de cada uno de los grupos.

Por supuesto, si queremos efectuar un análisis que sea independiente del tamaño de la población, con objeto de comparar sociedades con distinto tamaño, podemos tomar la función de valoración social en términos per cápita. De esta forma,

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}V^T(\mathbf{y}) &= \sum_{g=1}^{G}\frac{n_g}{n}.\mu_g\left(1-T^g\right)-\sum_{g=1}^{G}\frac{n_g}{n}.\mu_g\log\frac{\mu_g}{\mu}\\ &= \frac{1}{n}\sum_{g=1}^{G}V^T(\mathbf{y}^g)-\frac{1}{n}V_B^T(\boldsymbol{\mu})\end{aligned} \tag{10.10}$$

donde $T^g = T(\mathbf{y}^g)$.

Si el término $V_B^T(\boldsymbol{\mu})$ puede interpretarse como la renta adicional de la que podría disfrutar la sociedad, si no hubiera desigualdades entre grupos, obviamente $\left(1/n\right)V_B^T(\boldsymbol{\mu})$ nos daría la renta adicional que le correspondería a cada individuo de la sociedad.

Aplicaciones inmediatas de este tipo de descomponibilidad, tanto en el ámbito de las regiones, como en lo referente al análisis de la desigualdad entre hombres y mujeres, serán examinadas en la tercera parte del trabajo.

Consideremos, no obstante, el siguiente caso particular de esta formulación, que extiende el ejemplo del capítulo 6 y que es aquel en que consideramos la distribución de la renta entre hombres y mujeres. Aquí hay simplemente dos grupos de población, que podemos designar por los subíndices m para los hombres y f para las mujeres. La ecuación (10.9) adoptará la forma

$$V_B^T(\boldsymbol{\mu}) = n_m\mu_m\log\frac{\mu_m}{\mu}+n_f\mu_f\log\frac{\mu_f}{\mu} \tag{10.11}$$

Esta expresión nos proporciona una medida de la discriminación económica en razón de género con un fundamento teórico sólido y una notable facilidad de cálculo. Adviértase, en particular, que para obtener esta medida de discriminación no necesitamos conocer la distribución completa de renta en los colectivos de hombres y mujeres, sino simplemente sus valores medios, valores que están disponibles habitualmente en las fuentes estadísticas convencionales.

Para tener un indicador que resulte independiente de las unidades de medida de la renta, podemos efectuar una sencilla transformación y expresarlo como porcentaje del bienestar que se pierde, por unidad de renta, debido a la discriminación de género:

$$\begin{aligned} T_B(\boldsymbol{\mu})\times 100 &= \frac{V_B^T(\boldsymbol{\mu})}{n\mu}\times 100 \\ &= \left(\frac{n_m\mu_m}{n\mu}\log\frac{\mu_m}{\mu}+\frac{n_f\mu_f}{n\mu}\log\frac{\mu_f}{\mu}\right)\times 100 \end{aligned} \tag{10.12}$$

Obsérvese que esta fórmula subestima, en cierto grado, la discriminación al poner en el denominador la renta en lugar del bienestar, que sería la opción teóricamente más adecuada. Aunque esto es cierto, con esta formulación no necesitamos conocer la distribución completa, mientras que si usamos el bienestar necesitaríamos conocer el índice de Theil (1967) asociado a toda la distribución. Así pues, de esta forma nos basta con aplicar el índice de desigualdad a los valores medios de los grupos.

Por supuesto, si queremos tener una medida de la discriminación que sea independiente del tamaño de la población, con objeto de comparar distintas sociedades, podemos tomar valores per cápita de este indicador. Es decir,

$$\frac{1}{n}V_B^T(\boldsymbol{\mu}) = \frac{n_m}{n}\mu_m\log\frac{\mu_m}{\mu}+\frac{n_f}{n}\mu_f\log\frac{\mu_f}{\mu} \tag{10.13}$$

En este caso $V_B^T(\boldsymbol{\mu})$ nos indica la renta adicional de la que podría disfrutar esta sociedad si no hubiera discriminación en razón de género. Y, obviamente, $(1/n)V_B^T(\boldsymbol{\mu})$ nos daría la renta adicional que correspondería a cada individuo.

Observación (10.1): Esta forma de medir la discriminación, en razón de género, es un tanto burda porque no toma en cuenta la existencia de diferencias entre hombres y mujeres debidas a otros aspectos, como las diferentes cualificaciones medias de los trabajadores de uno y otro sexo, entre otras. Para abordar este tipo de precisiones necesitamos enriquecer el análisis, que será retomado en la tercera parte del trabajo.

11. Distribución de la renta e igualdad de oportunidades

11.1. Introducción

Abordamos, en este capítulo, el problema de la evaluación, desde el punto de vista del bienestar, de la distribución de la renta y las oportunidades en una sociedad compuesta por agentes heterogéneos. Para ello partimos de la siguiente premisa: la distribución de la renta observada, que hemos venido analizando, puede entenderse, en realidad, como reflejo de dos causas diferentes, las circunstancias y las decisiones. Por *circunstancias* entendemos aquellas variables que afectan al proceso de generación de rentas que están fuera del control del individuo, tales como su dotación genética, raza, sexo, características socioeconómicas y culturales de la familia, etc. Con el término *decisiones* aludimos a las variables que entran (al menos parcialmente) dentro de la esfera de la autonomía individual, es decir, son responsabilidad del individuo, como serían el tipo de trabajo elegido, la educación alcanzada, el número de horas trabajadas, la intensidad y dedicación en el trabajo, el cuidado de su salud, etc.

Las circunstancias reflejan las *oportunidades de partida* de los diferentes individuos de la sociedad. Diremos que todos aquellos individuos que comparten las mismas circunstancias son del mismo *tipo*. Denominaremos genéricamente *esfuerzo* a la variable que refleja las decisiones autónomas de los individuos en el proceso de generación de rentas. El punto de partida del análisis que se ofrece a continuación es que la desigualdad en renta, que tiene como origen esfuerzos diferentes, no debe preocuparnos, al menos dentro de ciertos límites, puesto que es consecuencia de decisiones libres de los individuos. Por el contrario, la sociedad debería reducir al máximo la desigualdad atribuible a las diferentes circunstancias de los individuos mediante una adecuada política de compensaciones.

Aunque es indudable que los conceptos de oportunidad y esfuerzo resultan imprecisos y tienen fronteras permeables, aluden a aspectos diferentes y muy relevantes para la valoración social de la distribución de la renta, de forma que resulta de utilidad mantenerlos separados.[190] De hecho, este enfoque del problema ha recibido recientemente una gran atención por parte de los estudiosos, como Sen (1980, 1985), Roemer (1996), Fleurbaey (1996), Fleurbaey y Maniquet (2001), Peragine (2000, 2002), Ruiz Castillo (2003) o Villar (2005b), entre otros.

En la primera parte de este capítulo, nos ocupamos del análisis teórico general acerca de la medición del bienestar asociado a la distribución de la renta cuando queremos tomar en cuenta los componentes oportunidades y esfuerzo. A continuación proponemos dos aplicaciones ligeramente diferentes de este tipo de análisis. La primera aborda el tema de la valoración social de las circunstancias, es decir, de las diferentes oportunidades que tienen los individuos de la sociedad. La segunda se refiere al caso de una evaluación del bienestar de naturaleza multidimensional, que podemos asociar a la evaluación de una distribución simultánea de una serie de variables sobre la misma población. Veremos que, cuando las variables que consideramos son independientes, nuestro análisis permite abordar la evaluación del bienestar de forma consistente. Un ejemplo particular, al que nos referiremos explícitamente, es el relativo al Índice de Desarrollo Humano (IDH), un indicador de desarrollo tridimensional propuesto por Naciones Unidas en 1990 (UNDP 1990). Una tercera aplicación, que aborda el tema de la discriminación en razón de género en el mercado laboral, será expuesta en el capítulo 14.

[190] El análisis puede complicarse de forma notable si observamos que algunas circunstancias pueden ser modificadas mediante el esfuerzo. Una complejidad dinámica de la que nos abstraeremos en el análisis que sigue.

11.2. Planteamiento

Siguiendo la línea de análisis desarrollada por el profesor John Roemer, de la Universidad de Yale (Roemer 1993, 1998), supondremos que el esfuerzo se relaciona con la responsabilidad individual, mientras que las oportunidades se refieren a un conjunto de circunstancias que son externas a los agentes. La idea subyacente es que los individuos son responsables de sus decisiones, pero no de sus circunstancias. En consecuencia, las diferencias de renta que se deben exclusivamente a las decisiones adoptadas por individuos con las mismas circunstancias no constituyen desigualdad (principio de la responsabilidad de los actos). Por el contrario, las diferencias en renta que son atribuibles a las distintas oportunidades constituyen el centro de nuestra preocupación, dado que los individuos no pueden considerarse responsables de sus circunstancias. Desde el punto de vista práctico, esta aproximación implica que una sociedad justa debería compensar a los ciudadanos por la existencia de diferentes oportunidades, pero no por el resultado derivado de distintas decisiones adoptadas autónomamente.

Nuestro objetivo consiste en diseñar un indicador agregado de bienestar, una función de evaluación social, en términos del análisis de los capítulos 9 y 10, capaz de valorar la distribución de renta de una sociedad desde el punto de vista de la igualdad de oportunidades, en vez del convencional análisis de la igualdad en términos de resultados observados. Para ello supondremos que la sociedad está dividida en un cierto número de tipos, cada uno de los cuales corresponde a un subgrupo de la sociedad que comparte las mismas circunstancias. Supondremos, al objeto de simplificar el análisis, que existe un consenso social bien definido acerca de cuáles son las variables asociadas a las circunstancias y cuáles las vinculadas a la responsabilidad individual. En consecuencia, cada tipo representa un subgrupo de población con idénticas oportunidades, de modo que las diferencias de renta observadas dentro de cada tipo corresponden exclusivamente a diferencias en los niveles de esfuerzo de sus miembros y no serán objeto de preocupación social.

Con este planteamiento del problema, las rentas correspondientes a individuos de distinto tipo no resultan directamente comparables, puesto que involucran tanto diferencias en esfuerzo como diferencias en oportunidades. Para tratar esta complicación introduciremos la idea de *grupo isoesfuerzo* definida como aquel conjunto de individuos que ejercen el mismo *grado de esfuerzo,* cualquiera que sea su tipo. La idea es que, de este modo, podemos atribuir claramente las diferencias de renta que aparecen dentro de cada grupo isoesfuerzo a diferencias en las oportunidades de que disfrutan sus integrantes, que es la variable que nos interesa medir. Complementariamente, las diferencias en las rentas medias de los distintos grupos isoesfuerzo únicamente describen los diversos resultados derivados de las decisiones personales de los individuos, de modo que no pueden considerarse como desigualdad en el sentido que le damos aquí.[191]

Por supuesto, ello presupone que existe algún índice que nos permita comparar el grado de esfuerzo entre los diferentes tipos, lo que no es un tema trivial dado que típicamente el esfuerzo resulta una variable inobservable y la distribución del esfuerzo puede muy bien ser dependiente del tipo considerado. Una vía de comparación del grado de esfuerzo, sugerida por el propio Roemer, consiste en partir de la suposición de que el esfuerzo es una variable unidimensional que, aunque resulte inobservable, podemos suponer que está relacionada monótonamente con la renta dentro de cada tipo. De este modo, las rentas dentro de cada tipo son un indicador del esfuerzo del individuo en relación a su tipo. Además, para permitir que la distribución del esfuerzo sea una característica del tipo, podemos medir los grados de esfuerzo de los distintos tipos en términos de los percentiles de renta de cada tipo. Así diremos que un individuo del tipo t realiza un esfuerzo similar a un individuo del tipo s si ambos están en el mismo percentil de la distribución de renta de su respectivo grupo.

En ocasiones, la consideración de la variable esfuerzo se realiza de una forma más indirecta, acudiendo a la agrupación de

---

[191] Esta es una formulación, un tanto extrema, que adoptamos para facilitar el análisis. En realidad las remuneraciones de los diferentes niveles de esfuerzo dependen del conjunto del sistema económico y pueden variar de unas sociedades a otras.

los individuos que tienen en común ciertas características que se consideran elementos diferenciales en el proceso de generación de la renta, y que pueden atribuirse a la esfera de la autonomía individual. Podemos pensar en elementos como niveles de estudios, experiencia laboral, rama de actividad en la que se trabaja, etc. Aunque este tipo de aproximación puede resultar más imprecisa, en ocasiones es la única que resulta empíricamente realizable.

Formalicemos las ideas que acabamos de presentar y veamos cómo la función de evaluación social de tipo Theil, introducida en los capítulos 9 y 10, puede ayudarnos a elicitar el efecto de la desigualdad de oportunidades en el bienestar.

Consideremos una sociedad $N = \{1, 2, \dots, n\}$ compuesta por q tipos diferentes, que identificamos genéricamente mediante el subíndice t, $t = 1,2,\dots, q$. Cada uno de estos tipos está formado por aquellos individuos de N con idénticas circunstancias (iguales oportunidades). Supondremos que hay k niveles distinguibles de esfuerzo, que identificamos mediante el subíndice h, que podemos suponer asociados a los percentiles de la distribución de la renta dentro de cada uno de los tipos, o a ciertas características observables de los individuos. Definimos un grupo isoesfuerzo como aquella colección de individuos de N que realizan un grado comparable de esfuerzo, cualquiera que sea su tipo. Llamaremos *sección* a los individuos de un mismo tipo que realizan el mismo grado de esfuerzo.[192] El gráfico 11.1 ilustra de forma visual la partición de la sociedad en la que estamos pensando.

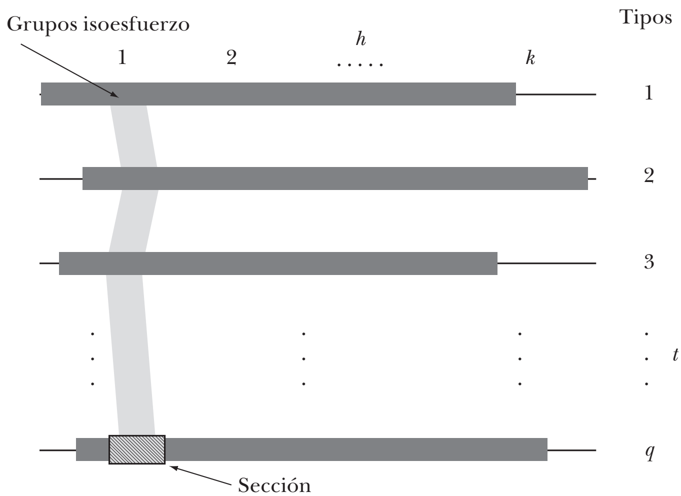
El grupo isoesfuerzo h, para $h = 1,2,\dots, k$, presenta una distribución de renta dada por $\mathbf{y}^h = \bigcup_{t=1}^{q} \mathbf{y}^{t,h}$, donde $\mathbf{y}^{t,h}$ es la distribución de renta de los individuos de tipo t con grado de esfuerzo h; es decir, la distribución de la renta de la sección (t, h).[193] Denotaremos

---

[192] Pueden existir diferencias de renta entre los individuos de una sección debido fundamentalmente a dos tipos de causas. Una, el azar, dos individuos idénticos pueden tener distinta suerte en sus realizaciones. Y otra, de índole práctica, la finura de la partición en tipos y grados de esfuerzo.

[193] Dada una partición suficientemente fina, dicha distribución debiera ser únicamente producto del azar y esperamos, a priori, que sea relativamente igualitaria. En un mundo sin factores aleatorios, dicha distribución sería perfectamente igualitaria y cada individuo de la sección recibiría una renta igual a la media, $\mu_{t\,h}$. En la vida real no cabe esperar observar una distribución perfectamente igualitaria en cada celda, en parte por los aspectos aleatorios del proceso de generación de rentas, y en parte

GRÁFICO 11.1: Distribución de la renta e igualdad de oportunidades



Fuente: Elaboración propia.

por n_{th} al número de individuos del tipo t con grado de esfuerzo h, por $n_h = \Sigma_{t=1}^{q} n_{th}$ al total de individuos en el grupo isoesfuerzo h y por $n_t = \Sigma_{h=1}^{k} n_{th}$ al total de individuos del tipo t. Igualmente μ_{th} indicará la media de la sección *(t, h)*, μ_h la media del grupo isoesfuerzo h y μ_t la media del tipo t.

Con esta formulación, introducimos la idea de que las diferencias de renta en un grupo isoesfuerzo reflejan las diferencias en las oportunidades que presentan los individuos de diversos tipos, que es la desigualdad que queremos medir.

Adviértase que este planteamiento implica que, cuando aplicamos la fórmula de evaluación del bienestar $V^T(\mathbf{y})$ a la distribución de la renta $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, obtenemos una infravaloración de la misma, dado que el indicador descuenta el efecto de la dispersión de la renta, *cualquiera que sea su origen*. Nosotros, sin embargo, no consideraremos aquí como desigualdad aquellas diferencias de renta derivadas de los distintos niveles de esfuerzo desarrollados por individuos con las mismas oportunidades.

---

porque difícilmente podremos contar con una partición en celdas lo suficientemente fina. Por todo ello, no basaremos nuestro análisis en el supuesto de que todos los individuos de una misma celda poseen igual renta.

11.3. El enfoque basado en la descomponibilidad

Ruiz-Castillo (2003) sugiere una manera de estimar el efecto sobre el bienestar de la desigualdad de oportunidades, recurriendo a la propiedad de descomponibilidad del índice $V^T(\mathbf{y})$. Esta propiedad permite deslindar la parte de la dispersión de la renta, debida a la desigualdad de oportunidades, de aquella atribuible a la diversidad de esfuerzos.

Puesto que la idea central es que las diferencias de renta que aparecen dentro de cada grupo isoesfuerzo pueden ser atribuidas a diferencias en las oportunidades de que disfrutan los integrantes de dicho grupo, consideramos una partición de la población por grupos isoesfuerzo. Ello nos permite escribir el índice de Theil, T, de acuerdo con la ecuación (3.29) como

$$T(\mathbf{y}) = \sum_{h=1}^{k} \frac{n_h \mu_h}{n\mu} T(\mathbf{y}^h) + \sum_{h=1}^{k} \frac{n_h \mu_h}{n\mu} \log \frac{\mu_h}{\mu} \tag{11.1}$$

donde $T^h = T(\mathbf{y}^h)$ representa el índice de Theil sobre la distribución de renta del grupo isoesfuerzo h,

$$\mathbf{y}^h = \bigcup_{t=1}^{q} \mathbf{y}^{t,h}$$

De los dos componentes de la descomposición (11.1), el segundo término mide la desigualdad entre los diferentes grupos isoesfuerzo. En nuestro contexto, esta desigualdad deriva de decisiones personales de los individuos y no debe ser descontada en la evaluación social del bienestar.

A partir de (11.1), y recordando la descomponibilidad de la función de valoración social del capítulo anterior, podemos escribir

$$\begin{aligned} V^T(\mathbf{y}) &= \sum_{h=1}^{k} n_h \mu_h \left[1 - T(\mathbf{y}^h) - \log \frac{\mu_h}{\mu} \right] \qquad (11.2) \\ &= \sum_{h=1}^{k} n_h \mu_h \left(1 - T(\mathbf{y}^h) \right) - \sum_{h=1}^{k} n_h \mu_h \log \frac{\mu_h}{\mu} \end{aligned}$$

donde $\mathbf{y}^h$ es el vector de distribución de renta del grupo isoesfuerzo h.

De esta forma, tal y como mostramos en el capítulo anterior, (10.6), la valoración social de la distribución de la renta, **y**, podemos expresarla como la suma de dos componentes diferenciados,

$$\begin{aligned} V^T(\mathbf{y}) &= \sum_{h=1}^{k} n_h \mu_h \left(1 - T(\mathbf{y}^h)\right) - \sum_{h=1}^{k} n_h \mu_h \log \frac{\mu_h}{\mu} \\ &= \sum_{h=1}^{k} V^T(\mathbf{y}^h) - V_B^T(\boldsymbol{\mu}) \end{aligned} \tag{11.3}$$

donde

$$V^T(\mathbf{y}^h) = n_h \mu_h \left(1 - T(\mathbf{y}^h)\right) \tag{11.4}$$

representa la valoración social de la distribución de la renta dentro del grupo isoesfuerzo h, y

$$V_B^T(\boldsymbol{\mu}) = \sum_{h=1}^{k} n_h \mu_h \log \frac{\mu_h}{\mu} \tag{11.5}$$

es un término de descuento que recoge el efecto de la desigualdad entre los distintos grupos isoesfuerzo. Puesto que, de acuerdo con la descomposición (11.1) y la interpretación dada en la introducción, esta desigualdad se deriva de decisiones personales de los individuos, no queremos descontarla en la valoración social del bienestar; es por ello que la función de valoración social de la renta, que toma en cuenta únicamente la desigualdad derivada de la diferencia de oportunidades, es

$$\hat{V}^T(\mathbf{y}) = \sum_{h=1}^{k} V^T(\mathbf{y}^h) = \sum_{h=1}^{k} n_h \mu_h \left(1 - T(\mathbf{y}^h)\right) \tag{11.6}$$

es decir, la suma de los índices parciales de valoración social correspondientes a los grupos isoesfuerzo.

La valoración social de la renta y las oportunidades son, de esta forma, una simple aplicación de la descomponibilidad de $V^T(\mathbf{y})$ introducida en el capítulo anterior. La interpretación que de ella hacemos, en este capítulo, depende de la partición en grupos isoesfuerzo y, en consecuencia, su significación está ligada al consenso social acerca de cuáles son las variables asociadas a las circunstancias y cuáles las vinculadas a la responsabilidad individual. Una cuestión de gran complejidad, tanto desde el punto de vista teórico como empírico, sobre la que no profundizamos aquí.

Dada la partición de la sociedad ilustrada en el gráfico 11.1, podemos ofrecer un mayor grado de intuición en la descomposición de $V^T(\mathbf{y})$ si descomponemos, a su vez, cada uno de los términos $V^T(\mathbf{y}^h)$ en la ecuación (11.3) teniendo en cuenta que cada grupo isoesfuerzo puede ser particionado en un conjunto de secciones de los diferentes *tipos* de individuos considerados en la sociedad.

Aplicando el mismo principio de descomponibilidad que antes a $V^T(\mathbf{y}^h)$ podemos escribir

$$V^T(\mathbf{y}^h) = \sum_{t=1}^{q} V^T(\mathbf{y}^{t,h}) - V_B^T(\mu^h) \tag{11.7}$$

Por tanto sustituyendo esta expresión en (11.3) obtenemos

$$\begin{aligned} V^T(\mathbf{y}) &= \sum_{h=1}^{k}\left(\sum_{t=1}^{q} V^T(\mathbf{y}^{t,h}) - V_B^T(\mu^h)\right) - V_B^T(\boldsymbol{\mu}) \\ &= \sum_{h=1}^{k}\sum_{t=1}^{q} V^T(\mathbf{y}^{t,h}) - \sum_{h=1}^{k} V_B^T(\mu^h) - V_B^T(\boldsymbol{\mu}) \end{aligned} \tag{11.8}$$

Además, como

$$V_B^T(\mu^h) = \sum_{t=1}^{q} n_{th}\mu_{th} \log \frac{\mu_{th}}{\mu_h} \tag{11.9}$$

podemos escribir

$$V^T(\mathbf{y}) = \sum_{h=1}^{k}\sum_{t=1}^{q} V^T(\mathbf{y}^{t,h}) - \sum_{h=1}^{k}\sum_{t=1}^{q} n_{th}\mu_{th} \log \frac{\mu_{th}}{\mu_h} - V_B^T(\boldsymbol{\mu}) \tag{11.10}$$

La ecuación (11.10) consta de tres componentes claramente diferenciados. El primero de ellos,

$$\sum_{h=1}^{k}\sum_{t=1}^{q} V^T(\mathbf{y}^{t,h}) \tag{11.11}$$

donde

$$V^T(\mathbf{y}^{t,h}) = n_{th}\mu_{th}\left(1 - T(\mathbf{y}^{t,h})\right) \tag{11.12}$$

no es más que la suma de las valoraciones sociales de todas las secciones de la sociedad, donde una sección corresponde a los individuos de un cierto tipo que ejercen un determinado esfuerzo. Puesto que la partición que hemos efectuado de la sociedad implica que los individuos, dentro de una sección, son relativamente homogéneos, pertenecen al mismo tipo (tienen las mismas oportunidades) y realizan el mismo esfuerzo, los índices $T^{t,h} = T(\mathbf{y}^{t,h})$, que miden la desigualdad dentro de una sección, deben ser relativamente pequeños. En consecuencia este primer término descuenta básicamente la desigualdad debida al hecho de que individuos prácticamente idénticos tienen distinta suerte en sus realizaciones de renta.

El segundo término,

$$\sum_{h=1}^{k}\sum_{t=1}^{q} n_{th}\mu_{th}\log\frac{\mu_{th}}{\mu_h} \tag{11.13}$$

nos proporciona una medida de la pérdida de bienestar debida a la desigualdad en las oportunidades, lo cual es un componente de especial interés. La fórmula (11.13) es una suma ponderada de las desviaciones, medidas en logaritmos, de la media de cada sección con respecto a la media del grupo isoesfuerzo en que se inscribe dicha sección, donde las ponderaciones son la renta de cada sección implicada. Es decir, una medida de la desigualdad entre las secciones de un mismo grupo isoesfuerzo y, posteriormente, la suma a través de los diferentes grupos isoesfuerzo. En consecuencia, se trata de una medida de la desigualdad de oportunidades en nuestro contexto.

El tercer componente es, como en el caso anterior,

$$V_B^T(\boldsymbol{\mu}) = \sum_{h=1}^{k} n_h\mu_h\log\frac{\mu_h}{\mu} \tag{11.14}$$

una medida de la desigualdad entre los distintos grupos isoesfuerzo. Este es el término de descuento que no consideramos en la valoración social del bienestar (11.6).

En consecuencia, la valoración social de la renta que toma en cuenta únicamente la desigualdad derivada de la diferencia de oportunidades, (11.6), puede a su vez ser escrita como

$$\begin{aligned}\hat{V}^T(\mathbf{y}) &= \sum_{h=1}^{k}\sum_{t=1}^{q} V^T(\mathbf{y}^{t,h}) - \sum_{h=1}^{k}\sum_{t=1}^{q} n_{th}\mu_{th}\log\frac{\mu_{th}}{\mu_h}\\ &= \sum_{h=1}^{k}\sum_{t=1}^{q} n_{th}\mu_{th}\left(1 - T(\mathbf{y}^{t,h})\right) - \sum_{h=1}^{k}\sum_{t=1}^{q} n_{th}\mu_{th}\log\frac{\mu_{th}}{\mu_h}\end{aligned} \tag{11.15}$$

donde el segundo término es el que descuenta la desigualdad derivada de la diferencia de oportunidades, una magnitud que tiene interés en sí misma.

11.4. Una aproximación alternativa

Villar (2005b) desarrolla una aproximación diferente a este mismo problema, en línea con la caracterización del índice $V^T(\mathbf{y})$ del capítulo anterior. Exponemos, a continuación, esta formulación y la comparamos con la de Ruiz-Castillo (2003) que acabamos de presentar.

Mantenemos la nomenclatura anterior que considera a la sociedad $N = \{1, 2, \dots, n\}$ compuesta por q tipos diferentes, $t = 1,2,\dots, q$, formados por individuos con idénticas circunstancias. Hay k grados de esfuerzo, $h = 1,2,\dots, k$, asociados a los percentiles de la distribución de la renta dentro de cada tipo, o a diferentes características observables de los individuos. El grupo isoesfuerzo h es el conjunto de individuos, cualquiera que sea su tipo, que realizan un mismo grado de esfuerzo. Denotamos por $\mathbf{y}^h$ la distribución de renta del grupo isoesfuerzo h.

Un vector de distribución de renta para esta sociedad puede ser representado como un punto $\mathbf{y} = (\mathbf{y}^1, \mathbf{y}^2, \dots, \mathbf{y}^h, \dots, \mathbf{y}^k)$ del espacio $\Pi_{h=1}^k \mathbb{R}_{++}^{n_h}$. La renta total del grupo isoesfuerzo h, viene dada por $Y_h = n_h \mu_h = \Sigma_{i=1}^{n_h} y_i^h$, donde y_i^h es la renta del individuo i del grupo h. Una función de evaluación social, $\bar{V} : \Im \mapsto \mathbb{R}$, es ahora una función $\bar{V} : \Pi_{h=1}^k \mathbb{R}_{++}^{n_h} \to \mathbb{R}$ diferenciable y homogénea de grado uno, de manera que, para todo $\mathbf{y} \in \Pi_{h=1}^k \mathbb{R}_{++}^{n_h}$ el teorema de Euler nos permite escribir

$$\bar{V}(\mathbf{y}) = \sum_{h=1}^{k} \sum_{i=1}^{n_h} \alpha_i^h(\mathbf{y}) y_i^h \tag{11.16}$$

donde $\alpha_i^h(\mathbf{y})$ es la valoración social marginal del individuo i del grupo isoesfuerzo h.

Consideremos ahora las siguientes propiedades:

— *Equidad mínima:* sean dos individuos, i y j, del grupo isoesfuerzo h, con rentas $y_j^h < y_i^h$. Entonces $\alpha_j^h(\mathbf{y}) > \alpha_i^h(\mathbf{y})$.

— *Independencia:* para todo par de individuos, i y j, del grupo isoesfuerzo h, para todo h, se cumple: $\alpha_i^h(\mathbf{y}) - \alpha_j^h(\mathbf{y}) = a_h(y_i^h, y_j^h)$.
— *Escala unitaria:* si $y_i^h = \mu_h \ \ \forall i$ del grupo $h \quad \Rightarrow \quad \alpha_i^h(\mathbf{y}) = 1 \ \ \forall i$.
— *Homogeneidad de grado uno:* $\bar{V}(\lambda\mathbf{y}) = \lambda\bar{V}(\mathbf{y}), \quad \forall\lambda > 0$.

Estas propiedades no son más que la translación a este contexto de las que caracterizan la función $V^T(\mathbf{y})$, que hemos examinado en el capítulo anterior. Por tanto, podemos establecer el siguiente resultado.

Teorema (11.1)

Una función de evaluación social $\bar{V}(\mathbf{y})$ es homogénea de grado uno y verifica los principios de equidad mínima, independencia y escala unitaria, si y solo si, es de la forma

$$\bar{V}^T(\mathbf{y};\boldsymbol{\beta}) = \sum_{h=1}^{k} n_h \mu_h \left(1 - \beta_h T(\mathbf{y}^h)\right) \tag{11.17}$$

donde $\beta_h > 0, \forall h$.

Demostración

La demostración es paralela a la del teorema (10.1).

Es fácil comprobar que esta función de valoración social verifica todas las propiedades indicadas. Veamos ahora el recíproco.

Replicando la prueba de la proposición (10.2) concluimos que,

$$\alpha_i^h(\mathbf{y}, \beta_h) = 1 - \beta_h \log \frac{y_i^h}{\mu_h}$$

donde $\beta_h > 0$.

Tendremos, pues, que

$$\begin{aligned}
\bar{V}^T(\mathbf{y};\boldsymbol{\beta}) &= \sum_{h=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_h} \alpha_i^h(\mathbf{y}, \beta_h) y_i^h \\
&= \sum_{h=1}^{k}\left[\sum_{i=1}^{n_h}\left(1 - \beta_h \log \frac{y_i^h}{\mu_h}\right) y_i^h\right] \\
&= \sum_{h=1}^{k}\left[Y_h - \beta_h \sum_{i=1}^{n_h} y_i^h \log \frac{y_i^h}{\mu_h}\right]
\end{aligned}$$

$$= \sum_{h=1}^{k} n_h \mu_h \left[1 - \beta_h \frac{1}{n_h} \sum_{i=1}^{n_h} \frac{y_i^h}{\mu_h} \log \frac{y_i^h}{\mu_h} \right]$$
$$= \sum_{h=1}^{k} n_h \mu_h \left[1 - \beta_h T(\mathbf{y}^h) \right]$$

que es el resultado buscado.

q.e.d.

Este teorema nos dice que elegir una función de evaluación social que verifique los supuestos de homogeneidad de grado uno, equidad mínima, independencia y escala unitaria, equivale a medir el bienestar social mediante una función que consiste en la suma de las rentas de los diferentes grupos isoesfuerzo, $h = 1,2,\ldots, k$, deflactadas por un término que mide la desigualdad en la renta, dentro de cada uno de estos grupos, mediante el índice de Theil.

El término $\Sigma_{h=1}^{k} n_h \mu_h \beta_h T(\mathbf{y}^h)$ constituye así una medida agregada de la pérdida de bienestar, debida a la desigualdad de oportunidades vigente en la sociedad. Obsérvese que esta formulación implica que cuando mayor es el grado de esfuerzo medido por μ_h, mayor es el peso que la sociedad da a la desigualdad de oportunidades.

Por su parte, el término $\xi^h = \mu_h \left(1 - \beta_h T(\mathbf{y}^h)\right)$ representa la renta igualitaria equivalente, en el sentido de Atkinson-Kolm-Sen, del grupo isoesfuerzo h, es decir, la cantidad de renta que igualmente distribuida proporcionaría el mismo bienestar social que la distribución existente, $\mathbf{y}^h$, todo ello referido al grupo isoesfuerzo h. A partir de aquí, podemos tomar la expresión

$$\begin{aligned} \xi &= \sum_{h=1}^{k} \frac{n_h}{n} \xi^h \\ &= \mu \sum_{h=1}^{k} \frac{n_h \mu_h}{n\mu} \left(1 - \beta_h T(\mathbf{y}^h)\right) \end{aligned} \tag{11.18}$$

como una renta igualitaria equivalente promedio para el conjunto de la sociedad. Ello equivale a decir que la desigualdad de oportunidades para el conjunto de la sociedad puede medirse como una suma ponderada de la desigualdad de oportunidades en los distintos grupos isoesfuerzo, donde las ponderaciones vienen dadas por el *esfuerzo relativo*, medido en términos de la participación de la renta del grupo en la renta total. Es decir, la *desigualdad de oportunidades* viene dada en este contexto por

$$I(\mathbf{y};\boldsymbol{\beta}) = \sum_{h=1}^{k} \frac{n_h \mu_h}{n\mu} \beta_h T(\mathbf{y}^h) \qquad (11.19)$$

Supongamos ahora que, tal y como hemos hecho en el capítulo 10, aplicamos nuestra función de evaluación social a la sociedad en su conjunto, ignorando los diferentes tipos que la componen. Sea pues $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n_{++}$ el vector de renta de la sociedad en su conjunto. La valoración social de este vector vendrá dada por (10.1)

$$V^T(\mathbf{y};\beta) = n\mu\left(1 - \beta T(\mathbf{y})\right) \qquad (11.20)$$

Por consiguiente, la expresión

$$\bar{V}^T(\mathbf{y};\boldsymbol{\beta}) - V^T(\mathbf{y};\beta) = n\mu\beta T(\mathbf{y}) - \sum_{h=1}^{k} n_h \mu_h \beta_h T(\mathbf{y}^h) \qquad (11.21)$$

proporciona una medida de la dispersión de renta entre los distintos grupos isoesfuerzo, que puede entenderse como la sobreestimación de la desigualdad que se deriva de ignorar la diversidad de esfuerzos en una sociedad.[194]

Podemos comparar el tipo de valoración que proporciona este enfoque con el derivado de aplicar la propiedad de descomponibilidad del índice de Theil, T, expuesto en el epígrafe anterior, cuando $\beta_h = 1, \forall h$. En este caso tenemos que (11.17) puede escribirse como

$$\bar{V}^T(\mathbf{y}) = \sum_{h=1}^{k} n_h \mu_h \left(1 - T(\mathbf{y}^h)\right) \qquad (11.22)$$

que es exactamente la expresión que aparece en la ecuación (11.6), $\hat{V}^T(\mathbf{y}) = \Sigma_{h=1}^{k} n_h \mu_h \left(1 - T(\mathbf{y}^h)\right)$, donde habíamos eliminado el término relativo a la medida de dispersión de renta entre los

[194] Esencialmente un término similar a (11.14) en el enfoque de Ruiz-Castillo (2003).

distintos grupos isoesfuerzo, (11.5). Consiguientemente, ambos enfoques proporcionan idénticas medidas de la desigualdad de oportunidades. La diferencia reside en que, en un caso, se computa también la dispersión de las rentas entre los diferentes grupos isoesfuerzo, como parte de la desigualdad total, para luego deducirla de la valoración social de la distribución de la renta (en el enfoque de Ruiz-Castillo [2003]), mientras que en el otro caso se ignora, desde un principio, tal dispersión, pues no se la considera como parte de la desigualdad económica relevante.

11.5. La valoración social de las circunstancias

Otra posible aplicación de la descomponibilidad del índice $V^T(\mathbf{y})$ se refiere a la valoración social de las circunstancias que identifican cada tipo en la sociedad. Aquí la idea es determinar si podemos decir que los individuos de un cierto tipo tienen mejores oportunidades que los de otro, porque las circunstancias de sus miembros resultan preferibles a las circunstancias de los individuos del otro grupo.

Por supuesto, si observamos que para cada grado de esfuerzo la renta media del tipo t es siempre superior a la renta media del tipo s, podemos concluir que los individuos del tipo t tienen mejores oportunidades que los del tipo s. Pero este tipo de comparación solo genera un orden parcial que nos impedirá, en muchos casos, poder establecer si un tipo tiene ventaja global sobre otro.

Podemos, sin embargo, identificar el arquetipo de valoración social implícita de los tipos que hay detrás de nuestra formulación haciendo uso, nuevamente, de las propiedades de descomponibilidad de la función de evaluación social $V^T(\mathbf{y})$. Recordemos que la ecuación (11.6) nos permitía expresar la valoración social de la distribución de renta $\mathbf{y}$, cuando solo nos preocupa la desigualdad de oportunidades, tal y como expusimos en la ecuación (11.15)

$$\hat{V}^T(\mathbf{y}) = \sum_{h=1}^{k}\sum_{t=1}^{q} V^T(\mathbf{y}^{t,h}) - \sum_{h=1}^{k}\sum_{t=1}^{q} n_{th}\mu_{th}\log\frac{\mu_{th}}{\mu_h} \qquad (11.15)$$

Obsérvese que podemos intercambiar el orden de los sumatorios,

$$\hat{V}^T(\mathbf{y}) = \sum_{t=1}^{q}\sum_{h=1}^{k} V^T(\mathbf{y}^{t,h}) - \sum_{t=1}^{q}\sum_{h=1}^{k} n_{th}\mu_{th} \log \frac{\mu_{th}}{\mu_h} \qquad (11.23)$$

Y, por consiguiente, la contribución del conjunto de individuos del tipo t al bienestar social en la distribución de la renta $\mathbf{y}$, viene dada por

$$\sum_{h=1}^{k} V^T(\mathbf{y}^{t,h}) - \sum_{h=1}^{k} n_{th}\mu_{th} \log \frac{\mu_{th}}{\mu_h} \qquad (11.24)$$

es decir, la suma de la valoración social de las secciones que constituyen este tipo menos una medida de la desigualdad de rentas entre dichas secciones, que adopta la forma de una suma ponderada de los logaritmos de las desviaciones relativas de las medias de las secciones, respecto a la media del grupo isoesfuerzo, donde se sitúa la sección y donde las ponderaciones corresponden a las rentas agregadas de las secciones $Y_{th} = n_{th}\mu_{th} = \Sigma_{i=1}^{n_{th}} y_i^{t,h}$.

Para realizar una valoración de las circunstancias hay que introducir dos modificaciones en esta medida.

La primera, eliminar el segundo término de la expresión anterior, que recoge precisamente la penalización de cada tipo por su contribución a la desigualdad de oportunidades en la sociedad.

La segunda, expresar los valores en términos per cápita. Por tanto podemos tomar la expresión,

$$\begin{aligned} C^t(\mathbf{y}) &= \frac{1}{n_t}\sum_{h=1}^{k} V^T(\mathbf{y}^{t,h}) \\ &= \sum_{h=1}^{k} \frac{n_{th}}{n_t}\mu_{th}\left(1 - T(\mathbf{y}^{t,h})\right) \qquad (11.25) \\ &= \sum_{h=1}^{k} \frac{n_{th}}{n_t}\xi^{t,h} \end{aligned}$$

donde $\xi^{t,h} = \mu_{th}\left(1 - T(\mathbf{y}^{t,h})\right)$, como la valoración social implícita de las circunstancias que definen el tipo t.

Dicha valoración viene dada por la suma ponderada de las rentas igualitarias equivalentes de las distintas secciones, $\xi^{t,h}$, con ponderaciones iguales a sus poblaciones relativas. Así pues, podemos establecer que los individuos del tipo t tienen mejores condiciones iniciales que los del tipo s, si y solo si

$$\sum_{h=1}^{k} \frac{n_{th}}{n_t} \xi^{t,h} > \sum_{h=1}^{k} \frac{n_{sh}}{n_s} \xi^{s,h}$$

lo que obviamente proporciona una ordenación completa de los tipos.

En el caso especial en que no hay factores aleatorios, y la partición en tipos y grados de esfuerzo es suficientemente fina como para asegurar que todos los individuos de la misma sección tienen idéntica renta, entonces $T(\mathbf{y}^{t,h}) = 0,\ \forall t, h$. Por tanto la expresión (11.25) se convierte en

$$\bar{C}^t(\mathbf{y}) = \sum_{h=1}^{k} \frac{n_{th}}{n_t} \mu_{th} = \frac{Y_t}{n_t} = \mu_t \qquad (11.26)$$

Es decir, en este caso la valoración de las circunstancias del tipo t puede realizarse en términos de la renta per cápita de dicho tipo.

Si consideramos que la *dispersión* de la renta está generada por el esfuerzo y las circunstancias, mientras que su *nivel* depende de algún factor macroeconómico común a todos los tipos, entonces la valoración social de las circunstancias resulta independiente de la distribución particular de la renta tomada como referencia.

11.6. Desigualdad y bienestar multidimensional: una reconsideración del Índice de Desarrollo Humano

Proponemos ahora otra aplicación inmediata del modelo que acabamos de presentar. Se refiere a la construcción de indicadores multidimensionales de bienestar, cuando las variables, cuya distribución simultánea consideramos son independientes, esto es, el bienestar social es separable en estas variables. Además de la discusión general, analizaremos específicamente el caso del Índice de Desarrollo Humano (IDH), que es tal vez el indicador de estas características más ampliamente utilizado.

Consideremos el problema de evaluar el bienestar asociado a la distribución de k variables *independientes* sobre una determinada población $N = \{1, 2, \ldots, n\}$. Denotaremos a los individuos con el subíndice $i = 1,2,\ldots, n$, y a las diferentes variables con el subíndice $h = 1,2,\ldots, k$.

Una distribución multidimensional (un vector de distribuciones de las k variables) para esta sociedad podemos representarlo, entonces, como un punto $\mathbf{y} = (\mathbf{y}^1, \mathbf{y}^2, \ldots, \mathbf{y}^h, \ldots, \mathbf{y}^k)$ del espacio $\mathbb{R}^{nk}_{++}$, donde $\mathbf{y}^h \in \mathbb{R}^n_{++}$ representa la distribución de la h-ésima variable en la población. Si y_i^h es el valor para el individuo i de la variable h, llamaremos

$$\mu_h = \frac{1}{n}\Sigma_{i=1}^n y_i^h$$

al valor medio de la variable h en la distribución $\mathbf{y}^h$. Una *función de evaluación social multidimensional,* $V : \Im \mapsto \mathbb{R}$, es una función $V : \mathbb{R}^{nk}_{++} \to \mathbb{R}$ diferenciable y homogénea de grado uno, tal que, para todo $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{nk}_{++}$ el teorema de Euler nos permite escribir

$$V(\mathbf{y}) = \sum_{h=1}^{k}\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^h(\mathbf{y}) y_i^h \tag{11.27}$$

donde $\alpha_i^h(\mathbf{y})$ es la valoración social marginal del individuo i con relación a la variable h.

Dada una función de evaluación social multidimensional, $V(\mathbf{y})$, decimos que las k variables son independientes desde el punto de vista del bienestar social si, para todo $i = 1,2,\ldots, n$, y para todo $h = 1,2,\ldots, k$, podemos escribir,

$$\alpha_i^h(\mathbf{y}) = \alpha_i^h(\mathbf{y}^h) \tag{11.28}$$

La independencia de las k variables equivale, así, a la separabilidad de la función de evaluación social multidimensional en k funciones de evaluación social unidimensionales, cada una de ellas referida a una variable. Es decir,

$$\begin{aligned} V(\mathbf{y}) &= \sum_{h=1}^{k}\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^h(\mathbf{y}^h) y_i^h \\ &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^1(\mathbf{y}^1) y_i^1 + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2(\mathbf{y}^2) y_i^2 + \ldots + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^k(\mathbf{y}^k) y_i^k \end{aligned} \tag{11.29}$$

Ello significa que no hay efectos cruzados sobre la pérdida de bienestar por desigualdad entre las distintas variables. Podemos entonces aplicar, con pequeñas variantes, el modelo desarrollado en los epígrafes anteriores en los siguientes términos. Consideremos una población N^k, es decir, una población replicada *k* veces, una vez por cada una de las variables consideradas en el análisis, y tomemos el vector $\mathbf{y} = (\mathbf{y}^1, \mathbf{y}^2, ..., \mathbf{y}^h, ..., \mathbf{y}^k)$ como si fuera la distribución de una única variable correspondiente a esta sociedad N^k que cuenta con *nk* miembros. Definamos entonces *k pseudogrupos isoesfuerzo*, cada uno de los cuales viene dado por la sociedad total, *N*, considerada con respecto a la distribución de cada una de las variables.

Recurriendo a la propiedad de descomponibilidad del índice $V^T(\mathbf{y})$, el bienestar asociado a la distribución conjunta de las *k* variables, $\mathbf{y} = (\mathbf{y}^1, \mathbf{y}^2, ..., \mathbf{y}^h, ..., \mathbf{y}^k)$, vendrá dado entonces por,

$$\hat{V}^T(\mathbf{y}) = \sum_{h=1}^{k} V^T(\mathbf{y}^h) = \sum_{h=1}^{k} n\mu_h \left(1 - T(\mathbf{y}^h)\right) = \sum_{h=1}^{k} Y_h \left(1 - T(\mathbf{y}^h)\right) \quad (11.30)$$

Lo que supone implícitamente que descartamos el cómputo de la desigualdad intergrupos *(intervariables)*, (11.5), es decir, la distribución de cada variable es independiente de las demás.[195]

Esta fórmula nos dice que el bienestar asociado a la distribución de *k* variables en una sociedad *N* puede estimarse como la suma de las cantidades totales de cada variable, previamente deflactadas por el índice de desigualdad de Theil (1967) aplicado a cada una de estas variables. Obviamente, esto sólo tiene sentido si las variables en cuestión tienen propiedades cardinales y están todas ellas medidas en las mismas unidades, en caso contrario es necesario realizar algunas puntualizaciones importantes desde el punto de vista empírico.

Así pues, observemos que la naturaleza aditiva del índice plantea un problema relevante con respecto al significado y las unidades de medida de las diferentes variables. Los cambios en las unidades de las variables no solo afectan a las magnitudes de la función de evaluación, como es obvio, sino que pueden llegar a alterar la ordenación de las distribuciones que consideramos.[196]

[195] Lo que en la práctica suele ser un supuesto bastante fuerte.

[196] Este problema no se planteaba antes, dado que el análisis se centraba en la distribución de una única variable entre varios grupos de población diferenciados, mientras que aquí tenemos un solo grupo y diversas variables diferentes, no todas ellas representativas del mismo tipo de bien, ni medidas necesariamente en las mismas unidades.

La forma más razonable, aunque no inocua, de sortear esta dificultad es homogeneizar o normalizar previamente las variables, de modo que puedan ser consideradas como medidas en algún tipo de unidad común.

Una forma convencional de obtener esta homogeneización es normalizar las variables en el intervalo [0, 1] de manera que cada una de ellas sea en realidad un índice carente de unidades de medida. Un procedimiento habitual, aunque no el único,[197] es tomar un valor máximo y un valor mínimo para cada una de las variables que serán, en general, diferentes para las distintas variables analizadas y expresar los valores individuales como la distancia respecto al mínimo en relación al rango considerado.[198] Alternativamente, para $y_i \in \mathbb{R}_{++}$, se puede tomar cada valor como proporción respecto al máximo de la variable correspondiente.[199]

Una normalización de este tipo tiene importantes implicaciones sobre la función de evaluación social que estamos considerando, (11.30), y que suponemos ahora aplicada a las variables transformadas. En concreto, los niveles pierden su sentido puesto que las cantidades totales de cada variable tampoco lo tienen. La implicación práctica es que solo el indicador de bienestar, en términos per cápita, tiene sentido como un criterio de ordenación de las distribuciones de bienestar multidimensionales. Por tanto, nuestro indicador es capaz ahora de proporcionar solo un ranking.

Así pues, cuando este tipo de normalizaciones sean aplicadas a las variables, el indicador ordinal de bienestar asociado a la distribución conjunta de las *k* variables vendrá dado por

$$\frac{1}{nk}\hat{V}^T(\mathbf{y}) = \frac{1}{k}\sum_{h=1}^{k} \mu_h \left(1 - T(\mathbf{y}^h)\right) \qquad (11.31)$$

recordando que nuestra sociedad cuenta ahora con *nk* miembros.

---

[197] Puede verse al respecto el manual sobre la construcción de indicadores compuestos de la OCDE (Nardo et al. 2005).

[198] Por ejemplo, si tomamos la distribución de la renta, **y**, ordenada, una normalización posible sería,

$$z_i = \frac{y_i - y_1}{y_n - y_1}, \ \forall i$$

En la práctica los valores máximo y mínimo de referencia no tienen porque coincidir con valores de la variable objeto de análisis.

[199] En este caso, $z_i = y_i / y_n$, $\forall i$. Alternativamente podemos sustituir y_n por $y^* > y_n$.

11.6.1. El Índice de Desarrollo Humano

Desde 1990 las Naciones Unidas patrocinan la construcción de un conjunto de indicadores que miden diversos aspectos del desarrollo económico (UNDP 1990). Entre ellos, el más conocido es el IDH. Se trata de un indicador de bienestar que pretende comparar el grado de desarrollo de diferentes sociedades, tomando en cuenta tres aspectos fundamentales: la *salud*, la *educación* y la *riqueza*. Estos aspectos tratan de aproximar las *capacidades básicas* de las diferentes sociedades, más que sus realizaciones. La filosofía subyacente está relacionada con las ideas del premio Nobel Amartya Sen quien propone vincular la medición del bienestar social a las *capacidades* de que disponen los individuos, más que a la *satisfacción* (utilidad) que experimentan subjetivamente (Sen 1985). El cambio de enfoque es más importante de lo que a primera vista parece puesto que implica poner el énfasis en las *oportunidades* antes que en las realizaciones, si bien es cierto que, por motivos prácticos, en muchas ocasiones habrá que tomar las segundas como aproximaciones de las primeras.

El IDH supone, pues, un intento de utilizar indicadores aplicables a un amplio grupo de países de todo el mundo, con muy diversos grados de desarrollo, que no se resuman a la mera comparación de rentas per cápita. Dado el objeto de análisis propuesto, las variables que miden estos tres aspectos deben ser lo suficientemente sencillas como para estar disponibles en la mayor parte de los países del mundo, aun a pesar de la inevitable diversidad en la riqueza de fuentes estadísticas. De esta forma, las Naciones Unidas vienen proporcionado este índice desde su aparición en 1990 hasta la actualidad (UNDP 2005).

Como indicador de la salud se toma la esperanza de vida al nacer, normalizada con unos valores máximos y mínimos de modo que el valor resultante esté siempre comprendido entre cero y uno. Como indicador de educación, los niveles de alfabetización junto con indicadores de matriculación en diferentes niveles de estudios. Se construye, a partir de aquí, un índice de educación con valores comprendidos entre cero y uno, dando un peso de 2/3 al índice de alfabetización y un peso de 1/3 al índice combinado de matriculación bruta. Por último, se toma como indicador de riqueza el valor del Producto Interior Bruto per cápita (PIB_{pc}), medido en dólares, de un cierto año base y ajustado por la paridad del poder adquisitivo (PPP) que toma en cuenta, tanto los tipos de cambio como las diferencias en la estructura de precios de los diferentes países. El PIB_{pc} entra también en la fórmula como un índice, con valores comprendidos entre cero y uno, pero ahora la normalización se realiza a partir de la transformación logarítmica, por las razones expuestas en el capítulo 2. El IDH es una suma ponderada de estos tres índices normalizados, usando idénticas ponderaciones para cada uno de los aspectos considerados. Se trata, pues, de una media aritmética simple de los tres indicadores iniciales.

Dado que las tres variables consideradas son de naturaleza diferente, cada una de ellas medida en sus propias unidades, se procede a normalizarlas para poder agregarlas razonablemente. Así, cada variable es expresada en términos de un índice comprendido entre 0 y 1, con lo que el IDH resulta, finalmente, también un indicador con valores dentro de este intervalo.

El IDH supone un sustancial enriquecimiento de la noción de desarrollo que, implícitamente, se usa en las comparaciones de diversas sociedades y pone de manifiesto algunas facetas del desarrollo que la mera comparación de rentas per cápita no permite apreciar. En particular, el IDH genera un ranking de países diferente al ranking en términos de renta per cápita. Pero subsisten todavía muchos elementos susceptibles de crítica. En primer lugar, no es evidente que la salud, la educación y la riqueza sean los tres únicos aspectos a considerar en un indicador de desarrollo. Y, aun admitiendo que estos sean los aspectos esenciales que pueden medir el grado de desarrollo de una sociedad, resulta discutible la elección de las variables que el IDH utiliza para su medición. Hay multitud de críticas y de propuestas alternativas a la elección de estas variables, entre las que mencionaremos las de Osberg (1985), Philipson y Soares (2001), Osberg y Sharpe (2001, 2002), Pinilla y Goerlich (2004), Herrero, Soler y Villar (2005) y Becker, Philipson y Soares (2005).

En segundo lugar, aunque aceptemos tanto los tres aspectos esenciales para medir el grado de desarrollo como las variables seleccionadas para representarlos, no es obvio ni el procedimiento de normalización, ni la elección de la forma de agregar sus valores en un único índice. En realidad, no existe una justificación adecuada de la fórmula de medición que asigne ponderaciones iguales para los tres aspectos seleccionados. Adviértase que la fórmula aditiva del IDH presupone que las tres variables que lo componen son sustitutos perfectos. Así por ejemplo, un bajo índice de desarrollo asociado a una salud muy deficiente podemos siempre compensarlo con dosis adicionales de educación o de renta, lo que no es en absoluto obvio.

Por último, observemos que la estimación del grado de desarrollo de un país se realiza únicamente a partir de los niveles medios de estas tres variables consideradas, lo que supone ignorar por completo los aspectos distributivos que resultan relevantes, tanto desde el punto de vista ético como por la relación entre la distribución y el crecimiento económico (v. al respecto las contribuciones de Anand y Sen [1994], Hicks [1997] y Foster, López-Calva y Székely [2003]).

11.6.2. Una reformulación del IDH

Consideremos una población $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ y supongamos que queremos evaluar su grado de desarrollo a partir de los niveles y la distribución de las variables s, e, y r, que miden la salud, la educación y la riqueza respectivamente de esta sociedad. Denotaremos a los individuos con el subíndice $i = 1,2,\ldots, n$, y a las diferentes variables con el subíndice $h = s, e, r$.

Un vector de distribución para esta sociedad podemos representarlo entonces como un punto $\mathbf{y} = (\mathbf{y}^s, \mathbf{y}^e, \mathbf{y}^r)$ del espacio $\mathbb{R}^{3n}_{++}$, donde $\mathbf{y}^h \in \mathbb{R}^n_{++}$, $h = s, e, r$, es un vector que describe la distribución de la variable h (salud, educación y riqueza, respectivamente) en la población de referencia. Estas variables están normalizadas de alguna forma para que puedan ser agregadas razonablemente, así pues, los volúmenes totales de estas variables carecen de sentido. Llamaremos

$$\mu_s = \frac{1}{n}\Sigma_{i=1}^n y_i^s\,,\ \mu_e = \frac{1}{n}\Sigma_{i=1}^n y_i^e \quad \text{y} \quad \mu_r = \frac{1}{n}\Sigma_{i=1}^n y_i^r$$

a los valores medios de las correspondientes variables.[200]

---

[200] Obsérvese que $\mu = (\mu_s + \mu_e + \mu_r)/3$.

Buscamos ahora una *función de evaluación social tridimensional* $V:\mathbb{R}^{3n}_{++} \to \mathbb{R}$ que nos permita determinar el grado de desarrollo de esta sociedad y su evolución, al menos desde un punto de vista ordinal. Adviértase que planteamos la función de evaluación, a partir de los datos individuales de salud, educación y riqueza y no de sus valores medios. Con ello aspiramos a incorporar la dimensión distributiva en el análisis.[201]

Si suponemos que la función de evaluación social es diferenciable y homogénea de grado uno, el teorema de Euler nos permite escribir

$$V(\mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^s(\mathbf{y}) y_i^s + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^e(\mathbf{y}) y_i^e + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^r(\mathbf{y}) y_i^r \qquad (11.32)$$

donde $\alpha_i^s(\mathbf{y})$, $\alpha_i^e(\mathbf{y})$ y $\alpha_i^r(\mathbf{y})$ son las valoraciones sociales marginales del individuo i con relación a las variables indicadoras de la salud, la educación y la riqueza, respectivamente.

Para determinar la forma de esta función consideremos las siguientes propiedades, además de la ya mencionada de homogeneidad de grado uno, y que no son más que la traslación a este contexto de las que caracterizan la función $V^T(\mathbf{y})$ analizada en el capítulo 10. A saber:

— *Equidad mínima:* sean dos individuos, i y j, de N. Entonces, para cada una de las tres variables consideradas, $h = s, e, r$, se cumple que, $y_j^h < y_i^h \Rightarrow \alpha_j^h(\mathbf{y}) > \alpha_i^h(\mathbf{y})$.

— *Independencia:* sean dos individuos, i y j, de N. Entonces, para cada una de las tres variables consideradas, $h = s, e, r$, se cumple que, $\alpha_i^h(\mathbf{y}) - \alpha_j^h(\mathbf{y}) = a_h(y_i^h, y_j^h)$.

— *Escala unitaria:* si $y_i^h = \mu_h \;\; \forall i,\, h = s, e, r \;\; \Rightarrow \;\; \alpha_i^h(\mathbf{y}) = 1 \;\; \forall i$.

La equidad mínima establece que damos más peso en nuestra valoración social a los individuos con peores circunstancias, ya sea

[201] Los aspectos distributivos en relación con la educación y el capital humano, por una parte, y la salud, por otra, han sido tratados recientemente en la literatura. Véase Thomas, Wang y Fan (2001) para el caso de la educación y Le Grand (1987) o Deaton (1999, 2001, 2007) en relación al tema de la salud; sobre la variable esperanza de vida puede verse Shkolnikov, Andreev y Begun (2003).

en términos de salud, de educación o de riqueza. La independencia establece que la valoración social marginal de dos individuos, con relación a cada una de las variables consideradas, depende únicamente del valor que alcanza para estos dos individuos la variable correspondiente. Esta propiedad implica obviamente la separabilidad de la función de evaluación en las tres variables consideradas. De esta forma podemos escribir

$$V(\mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^s(\mathbf{y}) y_i^s + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^e(\mathbf{y}) y_i^e + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^r(\mathbf{y}) y_i^r \qquad (11.33)$$

La propiedad de escala unitaria fija los coeficientes de ponderación cuando la distribución de cada una de las variables consideradas es perfectamente igualitaria.

Replicando el análisis desarrollado con anterioridad en los teoremas (10.1) y (11.1), podemos establecer que una función de evaluación social $V(\mathbf{y})$ es homogénea de grado uno y verifica las propiedades de equidad mínima, independencia y escala unitaria, si y solo si, es de la forma

$$\begin{aligned} V^T(\mathbf{y}) &= n\mu_s\left(1-\beta_s T(\mathbf{y}^s)\right) \\ &\quad + n\mu_e\left(1-\beta_e T(\mathbf{y}^e)\right) + n\mu_r\left(1-\beta_r T(\mathbf{y}^r)\right) \end{aligned} \qquad (11.34)$$

con $\beta_h > 0,\ h = s, e, r$.

Puesto que, dada la normalización de las variables, el nivel de $V^T(\mathbf{y})$ carece de sentido, utilizamos esta función en términos per cápita, por lo que la reformulación del IDH propuesta es

$$\begin{aligned} IDH(\mathbf{y}) &= \frac{1}{3n} V^T(\mathbf{y}) \\ &= \frac{1}{3}\left[\begin{matrix} \mu_s\left(1-\beta_s T(\mathbf{y}^s)\right) \\ +\mu_e\left(1-\beta_e T(\mathbf{y}^e)\right) + \mu_r\left(1-\beta_r T(\mathbf{y}^r)\right) \end{matrix}\right] \end{aligned} \qquad (11.35)$$

Esta aproximación permite proporcionar una formulación más consistente al IDH, puesto que incorpora explícitamente los aspectos distributivos en la evaluación del grado de desarrollo. Además, permite introducir de formas diversas nuestra valoración de la desigualdad a partir de la fijación de los valores de los parámetros β_h, $h = s, e, r$. Pero, sobre todo, supone una formulación deducida de un conjunto de axiomas bien definidos.

11.7. Comentario final

Finalmente, una palabra de precaución en torno a la aplicabilidad de los desarrollos de este capítulo. Debemos subrayar, de nuevo, que la significación del análisis de renta y oportunidades aquí propuesto descansa sobre la partición en tipos y grupos isoesfuerzo considerada. En consecuencia, requiere un cuidadoso análisis previo, o un claro consenso social, sobre qué variables determinan las circunstancias y cuáles pertenecen a la esfera de la responsabilidad individual. Por tanto, las ideas que acabamos de desarrollar deben comenzar su puesta en práctica con el análisis de estas variables.

Conviene recordar también que hemos ignorado, incluso desde el punto de vista teórico, dos elementos muy importantes en la valoración de las oportunidades. El primero relativo a la naturaleza de los factores aleatorios, que aquí hemos asimilado implícitamente a las circunstancias pero que, en realidad, pueden tener una distribución dependiente del tipo. El segundo, esencial en un análisis dinámico del problema, se refiere a la interacción entre esfuerzo y circunstancias. En realidad, algunas de las decisiones actuales terminan convirtiéndose en condicionantes de las decisiones futuras, por ejemplo la educación, y pueden interpretarse, en algunos casos, como parte de las nuevas circunstancias desde las que los individuos afrontan su existencia. Cuando la información sobre el futuro es imperfecta, no resulta obvio que una decisión de hoy deba aceptarse sin más como condicionante elegido voluntariamente de todo el futuro.

TERCERA PARTE

DE LA TEORÍA A LA PRÁCTICA

En esta última parte del estudio volvemos sobre algunas de las cuestiones de índole práctico, que mencionamos en la introducción, y realizamos dos aplicaciones con datos reales procedendes de la economía española. La idea esencial es mostrar las potencialidades del análisis que hemos desarrollado a lo largo de las dos primeras partes, más que una aplicación exhaustiva de las técnicas introducidas.

Para comenzar la discusión (capítulo 12), analizaremos la mayor parte de las cuestiones eminentemente prácticas que aparecen en todo trabajo empírico. En esencia, volveremos sobre las dos cuestiones preliminares que mencionamos en el capítulo introductorio, y que desde entonces hemos considerado como dadas, es decir, la *noción de renta* y el *perceptor de esa renta.* Nuestro análisis aquí será, fundamentalmente, de orden práctico, examinando el origen de las cuestiones planteadas y las posibles soluciones disponibles en la literatura. Como tendremos ocasión de comprobar, muchas son las decisiones que debemos tomar desde un punto de vista meramente práctico.

Los dos últimos capítulos los dedicamos a dos ilustraciones de las técnicas que hemos venido examinando. El capítulo 13 ofrece una panorámica de la distribución de la renta y el bienestar en el ingreso personal en España, a partir de las Encuestas de Presupuestos Familiares, con especial énfasis en los aspectos regionales y dinámicos, al poder examinar un periodo relativamente largo de tiempo, desde 1973 hasta 2003. Para ello utilizamos gran parte del instrumental sobre medición de la desigualdad, expuesto en la primera parte, así como la función de evaluación social *S*-consistente con el índice de Theil, analizada en la segunda parte del trabajo. Un apéndice estadístico a dicho capítulo ofrece los índices de desigualdad calculados y otra información estadística relevante.

Finalmente, en el capítulo 14, último del estudio, se ofrece una aplicación de las ideas sobre la igualdad de oportunidades, expuestas en el capítulo 11, a la medición de la discriminación en razón de género en el mercado laboral español, un tema que ya esbozamos al final del capítulo 10. Insistiremos aquí en aspectos regionales y sectoriales, a partir de la Encuesta de Estructura Salarial de 2002 realizada por el Instituto Nacional de Estadística. Se trata de un análisis estático, pero muy detallado dada la riqueza de la fuente de información utilizada, lo que nos permite examinar la sensibilidad de los resultados a las variables de clasificación sobre los diferentes *tipos* y *categorías de trabajadores*. Al igual que en el capítulo anterior, un apéndice estadístico ofrece parte de los abundantes cálculos utilizados en la confección de este capítulo.

12. Desigualdad y bienestar: ¿de qué? y ¿entre quiénes?

Most economists have two compartments in their minds, one for rigorous economic theory and one for empirical compromises.

Robert M. Solow (1958)

12.1. Introducción

Este capítulo vuelve sobre las dos cuestiones preliminares que mencionamos en la introducción y que, hasta el momento, hemos considerado como resueltas. Cualquier trabajo empírico toma decisiones, ya sea de forma explícita o implícita sobre estas cuestiones y, por tanto, deberemos abordarlas antes de ofrecer algunas aplicaciones, a partir de datos reales, del instrumental presentado en las dos primeras partes de este trabajo.

Como ya indicamos en el capítulo introductorio, antes de poder hablar de forma inequívoca de *distribución de la renta* deberemos abordar una serie de cuestiones que afectan a dos ámbitos del análisis. Estas son: en primer lugar, la elección de una apropiada *noción de renta,* es decir, el problema de definir en términos precisos y operativos la variable cuya dispersión queremos analizar, ¿desigualdad de qué? (Sen 1980); y en segundo lugar, la especificación del *perceptor de esa renta,* es decir, el problema de definir en términos precisos y operativos la sociedad, N, de la que estamos hablando, ¿desigualdad entre quiénes?

Ninguna de estas dos cuestiones tiene una respuesta única e inequívoca, válida universalmente y en todos los casos. Por ello, este capítulo de transición tiene por objeto tender un puente entre el instrumental teórico que hemos presentado en los capítulos anteriores y los problemas de orden práctico a los que se enfrentan cotidianamente los investigadores aplicados, muchas veces sin ser conscientes de ello. En lo que resta del capítulo presentaremos muchos de estos problemas indicando las opciones disponibles y cómo la literatura ha tratado de solucionarlos. El lector debe tener siempre presente que, al igual que en muchas ocasiones los diversos índices de desigualdad pueden ordenar de distinta forma distribuciones de renta alternativas, las decisiones tomadas a nivel más práctico son susceptibles de alterar de forma importante los resultados y, en consecuencia, nuestra visión sobre la desigualdad y su evolución. Por tanto, comparaciones en el tiempo o entre sociedades requieren, como requisito mínimo, las mismas opciones metodológicas de orden práctico; no proceder de esta forma sería como comparar dos distribuciones con dos índices diferentes, lo que obviamente carece de sentido.

Resulta indiscutible que entre el concepto abstracto de *renta,* y_i, como indicador apropiado del nivel de vida del *individuo, i*, en la *sociedad, N,* y las cifras terrenales de ingresos, gastos o salarios de una muestra representativa de una población heterogénea de familias o individuos, cuyas características monetarias se recogen según la base de una serie de criterios contables, existe un abismo que es necesario cruzar si queremos finalmente aproximarnos al mundo real.

Dedicamos este capítulo a explicitar muchos de los compromisos que todo trabajo aplicado requiere. Nuestro recorrido será necesariamente breve; el lector interesado puede consultar, entre otros, los excelentes libros de Deaton (1997), Silber (1999) o Duclos y Araar (2006) sobre la transición del trabajo teórico al aplicado.

12.2. Renta y variabilidad en los precios

Puesto que los individuos no derivan bienestar en sí mismo de la renta de que disponen, sino de la capacidad de adquisición de bienes y servicios que disfrutan con la misma, resulta obvio que en el análisis de la distribución de la renta es necesario tomar en consideración la variabilidad, en el tiempo y en el espacio, de los precios de los diferentes bienes a los que se enfrentan los individuos de una misma sociedad.

Aunque es fácil estar de acuerdo con este principio general, su puesta en práctica es notablemente más complicada de lo que a primera vista pudiera parecer. Como veremos, un tratamiento adecuado del tema requiere un volumen de información muy elevado y raramente disponible en la práctica. Piénsese, por ejemplo, que, desde un punto de vista conceptual, esto incluye la consideración de la variabilidad en la calidad de los bienes a los que tienen acceso los individuos, así como las posibles restricciones cuantitativas a las que puedan enfrentarse.

La teoría de los números índices (Diewert y Nakamura 1993) sugiere que podemos aislar la variabilidad de los precios mediante la construcción de un *índice del coste de la vida* (Konüs 1939) con el que deflactar la renta nominal.[202] Una forma de construir este índice del coste de la vida es preguntarse por el nivel mínimo de renta necesario para que el individuo alcance el nivel de utilidad u_0 dado un vector de precios, $\mathbf{p}$. Designemos a esta cuantía por $c(u_0, \mathbf{p})$.[203] Podemos efectuar el mismo cálculo para un vector de precios de referencia, $\mathbf{p}^R$; el mínimo nivel de renta en este caso vendrá dado por $c(u_0, \mathbf{p}^R)$. La ratio

$$\frac{c(u_0, \mathbf{p})}{c(u_0, \mathbf{p}^R)} \tag{12.1}$$

es el índice del coste de la vida que estamos buscando. Dividiendo la renta nominal por (12.1) obtendremos nuestro indicador de *renta real* sobre el que basar el análisis de la distribución de la renta.

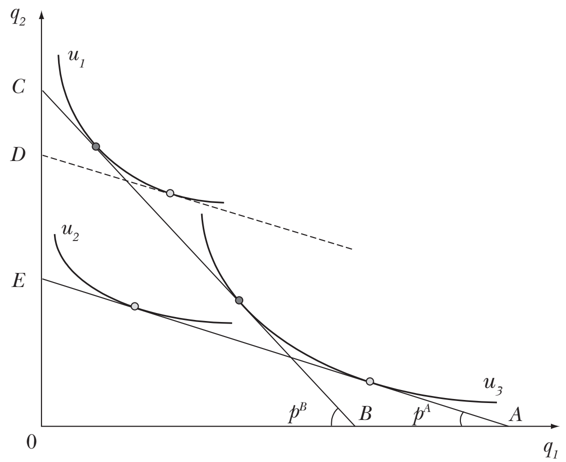
Si los precios, $\mathbf{p}$, nunca cambian, ni en el tiempo, ni en el espacio, entonces $\mathbf{p} = \mathbf{p}^R$ y, si todos los individuos son idénticos, podemos tomar como indicador de bienestar la renta nominal. En caso contrario la deflación es necesaria.

Dos características importantes del procedimiento que acabamos de describir merecen especial consideración. Por una parte, en general los índices del coste de la vida son específicos para

[202] El razonamiento se abstrae del ahorro y, en consecuencia, renta es igual a consumo, o ingreso es igual a gasto.

[203] En términos del comportamiento del consumidor dicha cuantía viene dada por la función de costes (Deaton y Muellbauer 1980, capítulo 2).

GRÁFICO 12.1: Ajuste por precios y bienestar



Fuente: Elaboración propia a partir de Duclos y Araar (2006, 25).

cada individuo. Por otra, dependen de un vector de precios de referencia, cambiar $\mathbf{p}^R$ alterará los resultados.

El siguiente ejemplo, tomado de Duclos y Araar (2006), ilustra cómo no tomar en consideración los precios puede afectar a los resultados y, al mismo tiempo, nos enseña que todo ajuste por precios incorpora algunos elementos arbitrarios de los que no es posible escapar. El gráfico 12.1 muestra tres curvas de indiferencia correspondientes a tres individuos diferentes, u_1, u_2 y u_3, en un mundo heterogéneo con solo dos bienes, q_1 y q_2. Muestra asimismo dos restricciones presupuestarias, A y B, para dos vectores de precios diferentes. En la primera, el precio relativo de q_1, p_1, es bajo en relación con el de q_2, p_2, de forma que

$$p^A = \left(\frac{p_1}{p_2}\right)_A < \left(\frac{p_1}{p_2}\right)_B = p^B$$

Comparar el nivel de vida de los individuos de nuestra sociedad, representado por sus curvas de indiferencia, exige valorar su consumo, según un determinado vector de precios. Para ello podemos utilizar tanto p^A como p^B. Si utilizamos p^A como precios de referencia entonces los individuos 2 y 3 poseen el mismo nivel de vida, ya que se sitúan sobre la misma restricción presupuestaria. Dicho nivel es valorado como E en términos de q_2. Por su parte, el individuo 1 se encuentra en mejor situación, al alcanzar un nivel de vida más elevado, D en términos de q_2. Por el contrario, si utilizamos p^B como vector de precios de referencia, entonces son los individuos 1 y 3 los que poseen el mismo nivel de vida, valorado en este caso en C en términos de q_2, y el individuo 2 se encuentra con un nivel de vida inferior. Por lo tanto, la elección del vector de precios de referencia es importante para las comparaciones de bienestar.

Este ejemplo muestra claramente la importancia crucial de los precios y, puesto que los individuos en diferentes niveles de utilidad tienen diferentes estructuras de consumo, tanto los precios relativos como los absolutos importan.

En la práctica, enfrentados con el problema de la deflación de la renta nominal no disponemos de índices del coste de la vida para cada individuo de la sociedad, sino simplemente de índices de precios al consumo, elaborados usualmente por los institutos de estadística, a partir de una cesta de consumo representativa. Dado un periodo base, estos índices de precios al consumo varían a través del tiempo y, en muchas ocasiones, presentan también cierto grado de variabilidad espacial, regional o por áreas urbanas y rurales. La utilización práctica de estos índices sugiere algunos comentarios de interés:

— Aunque estos índices presenten variación espacial y temporal, lo que no suelen presentar es variación a través de los diferentes niveles de renta, por decilas o simplemente para *los pobres* y *los ricos* de la sociedad. Esta es precisamente la variación que más nos interesa desde el punto de vista distributivo. Por ejemplo, consideremos el efecto de un incremento en el precio de los alimentos. Puesto que la proporción de gasto en alimentos es más elevada entre los individuos de renta baja que entre los individuos de renta alta, este incremento debe afectar más a los pobres, ya que se ve afectado una mayor proporción de su presupuesto. La utilización del mismo índice de precios para toda la población supone, implícitamente, que la carga del incremento en el precio de los alimentos es soportada de igual forma por todos los individuos de la sociedad.

— El argumento anterior sugiere que si disponemos de índices de consumo desagregados por tipos de bienes y de información sobre las estructuras de consumo de los individuos de la sociedad, sería posible construir un índice de precios al consumo aproximado para cada individuo, con el que deflactar su renta nominal (Del Río y Ruiz-Castillo 1996; Ruiz-Castillo 1998; Ruiz-Castillo, Ley e Izquierdo 1999a, 1999b; Ruiz-Castillo y Sastre 1999; Sastre 1999). Este procedimiento nos sitúa, probablemente, lo más cerca que podemos estar del ideal teórico. Es necesario reconocer que, aunque factible, dicho procedimiento requiere información que habitualmente no está al alcance del investigador individual.

— Todo ello aconseja en contra de la utilización de un único índice de precios común para todas las regiones y para todos los grupos socioeconómicos. Cuando sea posible, diferentes índices de precios deberán ser utilizados y cuanta mayor desagregación captemos, mejor. Obsérvese, además, que la utilización de un único índice de precios no tiene efectos sobre los índices de desigualdad relativos, es decir, aquellos que cumplen la propiedad (1.6), independencia de la escala.

— Desde un punto de vista práctico, los estudios suelen indicar que, en las economías desarrolladas, los efectos de los precios relativos son cuantitativamente menos importantes que en los países subdesarrollados, o en vías de desarrollo, donde las estructuras de consumo y los precios relativos son más dispares, y en consecuencia estos efectos tienden a ser notablemente más elevados (Budd 1993; Benjamín y Deaton 1993; Hentschel y Lanjouw 1996; Del Río y Ruiz-Castillo 1996). No obstante, también existen casos de economías desarrolladas en las que los precios relativos tienen efectos de cierta importancia sobre la medición de los aspectos distributivos (Ruiz-Castillo 1993, 1998). Es por ello que el análisis en términos nominales puede ofrecer, en muchos casos, una visión distorsionada de la realidad.

— Por otra parte, la deflación es absolutamente esencial cuando consideramos cuestiones de bienestar en situaciones de crecimiento,[204] ya que entonces los niveles son importantes y es necesario separar el crecimiento real del que se debe simplemente a la inflación.[205] Este es un tema diferente de cómo los precios afectan a la distribución.

12.3. Renta *versus* consumo

El epígrafe anterior ha considerado de forma indistinta la renta y el consumo, sin embargo, aunque desde un punto de vista conceptual ambas nociones de renta puedan ser tratadas de forma equivalente, en la práctica renta y consumo difieren.

Aunque podemos estar interesados en el análisis de otras nociones de renta, como la distribución de los salarios, del *stock* de riqueza o de cualquier tipo de activo como la tierra, la elección de renta *versus* consumo es probablemente la decisión más frecuente a la que se enfrentan los investigadores en la práctica. Puesto que, al contrario de lo que pasa con las estadísticas de cuentas nacionales, no existe un consenso acerca de las definiciones básicas sobre las que basar los estudios distributivos, consideramos de interés realizar algunos comentarios al respecto. No en vano, Atkinson y Brandolini (2001) han mostrado cómo tanto los niveles como las tendencias en la distribución de la renta pueden verse afectadas por elecciones relacionadas con la definición de la variable objeto de estudio, por lo que esta es una cuestión que no es en absoluto trivial.

La primera decisión que debemos tomar es si nuestros índices de desigualdad deben ser calculados a partir de un concepto de renta o ingreso o a partir de un concepto de consumo o gasto. En ambos casos se trata de magnitudes flujo, es decir, relativas a un periodo de tiempo determinado, y existe cierta evidencia de que periodos de tiempo más largos tienden a reducir el grado observado de dispersión. Al margen pues, de cuestiones concretas de medida, existe un argumento de ciclo vital por el que algunos

---

[204] Aun considerando un único índice de precios.

[205] Análogo razonamiento se aplica al análisis de la pobreza cuando la línea de pobreza no es siempre relativa.

autores consideran que el consumo es una variable *proxy* para la renta permanente y, en consecuencia, es un mejor indicador del nivel de vida que la renta corriente, sujeta a fluctuaciones de corto plazo (Slesnick 1991, 1993; Deaton y Zaidi 2002). Otros autores, sin embargo, no ven claras ventajas en la utilización del consumo frente a la renta, ya que el concepto económico de consumo es notablemente difícil de medir (Atkinson y Bourguignon 2000b).

Basándose en argumentos de ciclo vital, algunos autores han propuesto cambiar el énfasis y moverse hacia un concepto de *renta vital* que, en principio, podría generar resultados notablemente diferentes de los actualmente observados. Para entender la razón de las discrepancias, piénsese que, en un periodo de tiempo dado, coexisten en la sociedad personas con rentas bajas, pero que tendrán rentas más elevadas en el futuro (estudiantes, becarios o trabajadores en prácticas), con otros, también de rentas bajas, pero que tuvieron rentas más elevadas en el pasado (retirados y pensionistas). Por ello la renta vital estaría, en principio, más igualitariamente distribuida que la renta corriente observada. Sin embargo, la medición de la renta vital añade problemas conceptuales importantes de medición (horizonte vital, tasas de descuento, rentas futuras…) y por tanto no es implementada en la práctica (Palmer, Smeeding y Jencks 1988).[206]

Puesto que estos efectos derivan, en gran parte, de la estructura de la pirámide de edades de la sociedad bajo estudio, algunos autores han propuesto, desde una óptica más modesta, ajustes en la medición de la desigualdad que tratan de paliar estos efectos demográficos (Lam 1986, 1988).

Tanto si la elección de la variable de análisis descansa sobre la renta o sobre el consumo, deberemos definirla de forma precisa. Aunque ya hemos mencionado que no existe un consenso internacional sobre cuestiones de medición de variables para el análisis distributivo, es necesario observar que se han realizado algunos avances importantes a este respecto. Desde el punto de vista de la renta destaca el Grupo de Canberra (2001) en un contexto de

[206] Véase, no obstante, Pastor, Pons y Serrano (2006) para una aplicación a las desigualdades regionales y la convergencia en términos de ciclo vital.

cuentas nacionales y, más centrados en análisis puramente distributivos, merece la pena mencionar los esfuerzos de las Naciones Unidas (1977), del proyecto *Luxemburg Income Study* (LIS) (Smeeding, Allegreza y Schmaus 1985), o del Banco Mundial, bajo el proyecto *Living Standard Measurement Study (*LSMS) (Deaton y Zaidi 2002) y en el contexto de las economías subdesarrolladas, donde la captación y tratamiento de datos presentan problemas específicos.

En relación al concepto de renta, existe un acuerdo generalmente aceptado, basado en las recomendaciones del Grupo de Canberra (2001), que esta debe incluir todos los tipos de renta monetaria (rentas del trabajo, asalariado o no, del capital y de la propiedad, así como transferencias); más, al menos, ciertos tipos de renta no monetaria, como el salario en especie o el autoconsumo y el autosuministro, partidas estas especialmente relevantes en los países en vías de desarrollo. No existe un acuerdo tan generalizado sobre si la renta debe incluir rentas imputadas sobre las viviendas en propiedad ocupadas por sus inquilinos (Atkinson, Rainwater y Smeeding 1995; UNU-WIDER 2005), aunque la tendencia es a incluir estas partidas si están efectivamente disponibles.

Sí existe acuerdo en que, en la medida de lo posible, la noción de renta debe hacer referencia a la renta disponible, es decir debe ser neta de impuestos directos y contribuciones a la seguridad social.[207]

Por lo que respecta al concepto de consumo, la cuestión clave es la evaluación del *consumo* y no la del *gasto en consumo,* que es lo que típicamente recogen las Encuestas de Presupuestos Familiares (Deaton y Zaidi 2002). En otras palabras, la consideración del consumo como indicador de nivel de vida implica que debemos distinguir claramente entre lo que efectivamente es consumido y lo que se ha gastado. Esto significa que, en el caso de los bienes de consumo duradero, en lo que estamos interesados no es en el valor de compra de dichos bienes, sino en el valor de uso de los mismos a lo largo del periodo de referencia. Salvo en el caso de

[207] La distinción entre renta bruta y neta es de importancia capital en el análisis de los efectos redistributivos del sistema fiscal (Lambert 1993).

la vivienda, y aun en este caso no siempre, no es posible disponer con generalidad de valores de uso para la mayoría de los bienes de consumo duradero, tales como vehículos o electrodomésticos.[208]

Obviamente, el consumo debe incluir todas las categorías de bienes y al igual que en el caso de la renta debemos hacer frente al tratamiento de ciertas categorías de consumo no monetario, de nuevo el salario en especie, el autoconsumo y el autosuministro, que como regla general deben ser incluidas. En este caso sí existe un mayor consenso sobre la conveniencia de incluir las rentas imputadas sobre las viviendas en propiedad ocupadas por sus inquilinos, para llegar de esta forma a un concepto de consumo total y no puramente monetario. Por el mismo argumento, la provisión pública de ciertos bienes básicos, como la sanidad y la educación, debería valorarse desde la óptica del consumo, puesto que aunque el gasto en estos bienes sea nulo o reducido, forman parte del consumo de los individuos y, en consecuencia, afectan a su nivel de vida.

Sí existe acuerdo sobre el hecho de que la valoración del consumo no debe incluir el pago de impuestos, la compra de activos o los gastos de inversión.

Un comentario final es de interés. Sea cual sea la variable elegida, renta o consumo, la *unidad estadística de análisis*, es decir, la unidad sobre la que recogemos la información, debe ser la familia, no el individuo. No hacerlo así implicaría que a muchos individuos de la sociedad se les asigna rentas nulas, por ejemplo, niños pequeños, estudiantes, amas de casa o ancianos dependientes, lo que sin duda alguna distorsionaría gravemente la medición del bienestar en un mundo en el que muchas de las decisiones sobre la obtención y usos de la renta se realizan en un contexto familiar. Si nuestro interés último es el bienestar de los individuos, tendremos el problema añadido de cómo pasar de la renta familiar a la renta individual, es decir de cómo comparar el nivel de vida de familias heterogéneas, teniendo en cuenta las posibles economías de escala asociadas al tamaño familiar, cuando nuestro objeto último de análisis es el individuo. Este es un tema importante desde

[208] Un argumento similar se aplica al denominado problema de la *gran compra* (Peña y Ruiz-Castillo 1998).

el punto de vista práctico y que está relacionado con las escalas de equivalencia y la ponderación adecuada de la noción representativa de renta. Ambos temas son tratados a continuación.

12.4. Familias, individuos y necesidades

Como acabamos de señalar, tenemos un problema práctico importante cuando deseamos analizar el nivel de vida de los individuos y solo disponemos de datos familiares. El problema sería relativamente sencillo si las familias fueran homogéneas, es decir, fueran idénticas en cualquier otro atributo que no fuera la renta, ya que entonces podríamos considerar que las familias tienen las mismas necesidades y la renta familiar sería suficiente.

Fuera de este marco irreal, debemos reconocer que las diferencias en atributos distintos de la renta, características tales como el tamaño y la composición, generan diferencias en las necesidades familiares y estas deben ser tenidas en cuenta en el análisis del nivel de vida de los individuos que viven en familias heterogéneas.[209] La forma obvia de abordar el problema es mediante la introducción de una serie de ponderaciones con las que ajustar la renta familiar. De esta forma, familias heterogéneas pueden ser comparadas sobre una base común.

Al igual que en el caso examinado de los precios, es fácil estar de acuerdo con este principio general de ajuste por necesidades. Pero, como veremos a continuación, es mucho más difícil estar de acuerdo sobre la forma en que dicho ajuste debe realizarse.

Conceptualmente podemos abordar el problema de la misma forma que ya hicimos al examinar la cuestión de la variabilidad en los precios. Mediante la construcción de unos *índices de necesidad* o *índices del coste de las características familiares* con los que deflactar la renta familiar. Siguiendo la misma línea de razonamiento que antes, podemos preguntarnos por el nivel mínimo de renta necesario para que la familia con características familiares o demográ-

---

[209] Al igual que en el capítulo 1, nos introducimos de nuevo en el mundo de la multidimensionalidad.

ficas $\boldsymbol{a}$ alcance el nivel de utilidad u_0 dado un vector de precios, $\mathbf{p}$.[210] Designemos a esta cuantía por $c(u_0, \mathbf{p}, \boldsymbol{a})$. Podemos efectuar el mismo cálculo para una familia de referencia (un adulto, una pareja de edad media sin hijos, …) cuyas características representamos por $\boldsymbol{a}^R$; el mínimo nivel de renta en este caso vendrá dado por $c(u_0, \mathbf{p}, \boldsymbol{a}^R)$. La ratio

$$m(u_0, \mathbf{p}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}^R) = \frac{c(u_0, \mathbf{p}, \boldsymbol{a})}{c(u_0, \mathbf{p}, \boldsymbol{a}^R)} \tag{12.2}$$

es el índice del coste de características que estamos buscando. Dividiendo la renta familiar[211] por $m(u_0, \mathbf{p}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}^R)$ obtendremos la *renta equivalente,*[212] y_h/m, sobre la que basar el análisis de la distribución de la renta.[213]

El término $m(u_0, \mathbf{p}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}^R)$ se conoce como *escala de equivalencia* y compara dos familias con características diferentes en la misma forma que los *índices del coste de la vida* comparan dos vectores de precios.

El sentido en el que la renta deflactada por $m(u_0, \mathbf{p}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}^R)$ es equivalente debe quedar claro a partir de la construcción de (12.2). Los individuos de una familia con características $\boldsymbol{a}$ disfrutan del mismo nivel de vida que los individuos de la familia de referencia, con características $\boldsymbol{a}^R$, cuando dicha familia recibe una renta que es $m(u_0, \mathbf{p}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}^R)$ veces la renta de la familia de referencia.

---

[210] Suponemos implícitamente que las únicas diferencias en las funciones de utilidad son aquellas que derivan de las diferencias en las características y que los individuos tienen la misma función de utilidad que la familia en la que viven. En la práctica ello implica un supuesto de idéntica participación de todos los individuos en la vida familiar en todos sus ámbitos y la ausencia de desigualdades *intrafamiliares,* una cuestión en absoluto trivial (Haddad y Kanbur 1990).

[211] Puesto que ahora tratamos con rentas familiares, en lugar de con rentas de *individuos* abstractos tal y como hacíamos en las partes I y II de este trabajo, enfatizamos este hecho mediante el subíndice h, y_h.

[212] El principio de basar el análisis de la distribución sobre rentas equivalentes es más general que el del ajuste por diferentes necesidades. Así, podríamos pensar en rentas equivalentes en términos de capacidades (Sen 1985). Por ejemplo, la renta de una familia podría ajustarse al alza por niveles de educación elevados y a la baja por analfabetismo.

[213] Obviamente esta renta equivalente es nominal, para que fuera real debería a su vez ser deflactada mediante (12.1).

Por analogía con el análisis de los precios debe quedar claro que las escalas de equivalencia dependen de las características de la familia de referencia, $\boldsymbol{a}^R$, así como del vector de precios, $\mathbf{p}$, y el nivel de utilidad, u_0, bajo el cual efectuamos la comparación. Al igual que sucedía con los precios, todo ajuste por necesidades incorpora algunos elementos arbitrarios de los que no es posible escapar. Dicho con otras palabras, la elección de una escala de equivalencia concreta introduce, de forma explícita o implícita, una serie de juicios de valor sobre como valorar las necesidades de familias o individuos que difieren en características distintas de la renta.

Al contrario de lo que sucede con el ajuste por precios, no se dispone en las estadísticas de índices que nos permitan aproximar (12.2), por lo que la literatura sobre las escalas de equivalencia carece de un mínimo consenso desde el punto de vista aplicado.

En general la literatura ha considerado tres grandes formas de proceder a la hora de estimar $m(u_0, \mathbf{p}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}^R)$.

12.4.1. Escalas de equivalencia econométricas

Las escalas de equivalencia econométricas tratan de estimar $m(u_0, \mathbf{p}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}^R)$ a partir del comportamiento de gasto observado. Esta es, quizá, la forma más antigua de estimar escalas de equivalencia, ya que puede ser rastreada al menos hasta Engel (1857). A pesar de la aparente elegancia del método, el principal problema de las escalas de equivalencia econométricas es que el conocimiento de la estructura de gasto por sí sola (las funciones de demanda), no es suficiente para identificar las escalas de equivalencia.[214]

Puesto que cualquier transformación monótona creciente de la función de utilidad tiene las mismas consecuencias de comportamiento que la función de utilidad original, entonces diferentes funciones $c(u_0, \mathbf{p}, \boldsymbol{a})$ son consistentes con los mismos patrones de gasto observado, simplemente transformando u_0 de forma apro-

[214] Este resultado es diferente para los índices del coste de la vida que mencionamos anteriormente. En este caso, dado el valor de las funciones de coste para un vector de precios, su valor para otro vector de precios puede ser obtenido mediante integración numérica (Hausman 1981; Vartia 1983; Hausman y Newey 1995).

piada. Pero diferentes funciones $c(u_0, \mathbf{p}, \boldsymbol{a})$ representan diferentes valoraciones de las características familiares o demográficas, $\boldsymbol{a}$. En consecuencia, no es posible recuperar una escala de equivalencia única a partir de las estructuras de gasto observadas. De hecho, es posible demostrar que cualquier método utilizado para identificar $m(u_0, \mathbf{p}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}^R)$, con los datos disponibles usualmente, es equivalente a elegir valores arbitrarios en el periodo de referencia (Pollak y Wales 1979; Blundell y Lewbel 1991).

Como en otros casos econométricos en los que no es posible la identificación, lo cual no significa que las escalas de equivalencia no puedan ser estimadas, sino simplemente que necesitamos información adicional para ello, la literatura ha procedido en distintas direcciones:

1) Podemos intentar acotar el conjunto mínimo de condiciones necesario para permitir la identificación de una escala de equivalencia única. La literatura muestra, sin embargo, que dichas condiciones son excesivamente restrictivas y, además, son solo parcialmente contrastables a partir de la información típicamente disponible en las Encuestas de Presupuestos Familiares (Lewbel 1989, 1993; Blackorby y Donaldson 1991, 1993a, 1993b).
2) Finalmente, la opción más frecuentemente utilizada considera un modelo particular de utilidad individual que permita la identificación de una escala de equivalencia única (Barten 1964; Muellbauer 1974; Deaton y Muellbauer 1986; Nelson 1988; Bosch 1990).

Así pues, este último enfoque es capaz de derivar escalas de equivalencia, pero la falta de identificación mencionada nos indica que una especificación alternativa de $c(u_0, \mathbf{p}, \boldsymbol{a})$, que no tenga efectos sobre las funciones de demanda, generará una escala de equivalencia diferente. La identificación se alcanza, en este caso, mediante la selección de una función de utilidad, de un número potencialmente infinito de funciones observacionalmente equivalentes, de forma que los supuestos sobre la identificación permanecen implícitos en la mayoría de los casos.

El principal mensaje de la falta de identificación de las escalas de equivalencia no es que estas no puedan ser estimadas, sino que no es posible escapar de ciertos elementos arbitrarios en su construcción y, en consecuencia, que aquellas escalas de equivalencia que no estén basadas en supuestos explícitos razonables no deben ser consideradas seriamente.

En vista de estas dificultades, la literatura más reciente ha enfatizado el carácter parcialmente arbitrario de las escalas de equivalencia, haciendo hincapié en que su utilización implica la consideración de determinados juicios de valor sobre cómo ponderar las necesidades de individuos que difieren en características distintas de la renta. Por esta razón, las escalas de equivalencia econométricas no son muy utilizadas actualmente en la práctica, especialmente si queremos efectuar comparaciones entre países o regiones.

12.4.2. Escalas de equivalencia determinadas por expertos

Una alternativa a las escalas de equivalencia econométricas consiste en la determinación directa, por paneles de expertos y a partir de información diversa (estructuras de gasto, información subjetiva a partir de encuestas, indicadores de salud…), de un sistema de ponderaciones según las características familiares.

Estas son las escalas de equivalencia favorecidas por los institutos nacionales de estadística y las Administraciones Públicas en la determinación de la población por debajo de un determinado umbral de pobreza o los beneficiarios de programas públicos.

CUADRO 12.1: **La escala de Ámsterdam**

Grupo de edad	**Hombre**	**Mujer**
Menor de 14 años	0,52	0,52
De 14 a 17 años	0,98	0,90
De 18 años o más	1,00	0,90

Fuente: Deaton y Muellbauer (1980).

El cuadro 12.1 muestra la denominada escala de Ámsterdam, utilizada por Stone (1954) en su análisis del gasto del Reino Unido. Claramente esta escala toma como referencia un adulto varón de 18 o más años. De esta forma, una familia formada por una pareja de hombre y mujer con una hija menor de 14 años y un hijo de 15 estaría formada por $m = 3{,}4$ *adultos varones equivalentes,* aunque en realidad consta de 4 miembros. Así pues la renta equivalente de esta familia vendría dada por $y_h/3{,}4$.

Aunque este tipo de escalas de equivalencia son muy abundantes en la práctica (McClements 1977, 1978; Goodman, Johnson y Webb 1989; Department of Social Security 1992; U.S. Department of Commerce 1992, 1993), la más frecuentemente utilizada en la actualidad, dentro de este enfoque, es la denominada escala de la OCDE, que en su versión original[215] (OCDE 1982) asigna un valor de 1 al primer miembro de la familia, 0,7 a cada adulto adicional y 0,5 a cada niño (miembro inferior a 14 años de edad).

Este esquema de ponderación original sufrió modificaciones al adoptar la oficina de estadística de la Unión Europea (EUROSTAT) la denominada escala de la OCDE modificada (Hagenaars, De Vos y Zaidi 1994), que asigna un valor de 1 al primer miembro de la familia, 0,5 a cada adulto adicional y 0,3 a cada niño (miembro inferior a 14 años de edad).[216] De esta forma, la escala modificada introduce un mayor grado de economías de escala asociadas al tamaño familiar, distinguiendo por edades pero no por sexos.[217]

Por razones que serán claras, a continuación, resulta de interés observar que la escala de la OCDE puede ser parametrizada a partir de la siguiente fórmula sencilla. Sean respectivamente n_A y n_C el número de adultos y niños de una familia, entonces

$$m(n_A, n_B) = 1 + \alpha(n_A - 1) + \beta n_B \tag{12.3}$$

donde $\alpha = 0{,}7$ y $\beta = 0{,}5$ para la escala original y $\alpha = 0{,}5$ y $\beta = 0{,}3$ para la escala modificada.

---

[215] También conocida como la escala de Oxford.

[216] A pesar de su nombre debe observarse que, dada la falta de consenso sobre un método general para la determinación de las escalas de equivalencia, la OCDE no recomienda ninguna escala en particular.

[217] Las Encuestas de Presupuestos Familiares del Instituto Nacional de Estadística ofrecen directamente el número de adultos equivalentes bajo la escala de la OCDE, original y modificada.

12.4.3. Escalas de equivalencia paramétricas

La alternativa más natural a las escalas de equivalencia determinadas por expertos son las denominadas escalas de equivalencia paramétricas. Dada la evidencia presentada en Buhmann et al. (1988) de que la elección de la escala de equivalencia afecta a la ordenación de distribuciones en términos de desigualdad y bienestar, el enfoque más reciente hace énfasis en la sensibilidad y robustez de los resultados a diferentes escalas.

Así pues, el enfoque paramétrico selecciona las características consideradas más relevantes de las familias y propone una forma funcional sencilla con parámetros de interpretación directa, que representa cómo las necesidades cambian cuando las características no asociadas a la renta son modificadas. Así pues, este enfoque simplemente postula una forma funcional para $m(\boldsymbol{a})$ que podamos interpretar con facilidad.

El punto de partida es que dos individuos viviendo juntos pueden hacerlo de forma más barata que viviendo por separado. El caso más sencillo lo obtenemos cuando consideramos que la única característica relevante es el tamaño familiar, n_h, de forma que la escala de equivalencia puede entonces ser identificada en términos de las economías de escala asociadas al tamaño del hogar, $m(n_h)$. Esta simplificación puede resultar excesiva, puesto que las necesidades también dependen de la estructura de sexos y edades del hogar, del estado de salud de sus miembros o de su localización geográfica, por citar algunos ejemplos; sin embargo, el tamaño es quizá la variable más representativa de economías de escala, por lo que constituye el mejor ejemplo para ilustrar las escalas de equivalencia paramétricas. Además, este es el caso más ampliamente utilizado en la práctica.

Una formulación útil es considerar que la elasticidad de las necesidades respecto al tamaño del hogar es constante, lo que parece resumir un buen número de las escalas de equivalencia propuestas en la práctica (Buhmann et al. 1988; Atkinson, Rainwater y Smeeding 1995), y nos lleva a la formulación

$$m(n_h) = n_h^{\theta} \tag{12.4}$$

donde $\theta \in [0, 1]$ es la *elasticidad de las necesidades* respecto a n_h. Con la formulación (12.4) la renta equivalente vendría dada por y_h / n_h^{θ}.

Resulta de interés examinar cómo cambia la renta equivalente conforme variamos θ, y cómo se relaciona esto con las *economías de escala asociadas al tamaño.* Para,

— $\theta = 0$, la renta equivalente es simplemente la renta de la familia, y_h; en este caso no se realiza ningún ajuste por necesidades o, visto de otra forma, las necesidades no varían conforme aumenta n_h, y en consecuencia, las economías de escala asociadas al tamaño familiar son infinitas; para

— $\theta = 1$, la renta equivalente es simplemente la renta per cápita, y_h/n_h, en este caso no existen economías de escala asociadas al tamaño familiar, ya que las necesidades crecen proporcionalmente conforme aumenta n_h; y para

— $0 < \theta < 1$, las necesidades crecen conforme aumenta n_h, pero menos que proporcionalmente, por lo tanto existe cierto grado de economías de escala asociadas al tamaño familiar.

El parámetro θ regula, de esta forma, las economías de escala, conforme θ aumenta las economías de escala disminuyen, ya que el ajuste por necesidades crece, para un valor dado de n_h, según $m(n_h) = n_h^{\theta}$. Para $0 < \theta < 1$ nos movemos entre los casos extremos de considerar como renta equivalente la renta familiar, y_h, o la renta per cápita, y_h/n_h.

El caso más popular es $\theta = 0{,}5$, que se conoce como la *escala de la raíz cuadrada,* $m(n_h) = n_h^{0,5} = \sqrt{n_h}$, en este caso una familia de cuatro miembros se considera que tiene unas necesidades del doble de una familia de un solo miembro; y $\theta = 1$, sobre todo en las comparaciones internacionales, donde la renta per cápita es un estándar reconocido (Atkinson, Rainwater y Smeeding 1995; UNU-WIDER 2005).

El cuadro 12.2 ilustra la variación de la renta equivalente conforme varía el tamaño familiar y la elasticidad de las necesidades respecto a n_h, θ, para una renta de referencia de mil euros por familia, lo que deja claro los puntos anteriores.

De esta forma, la renta equivalente es una *medida monetaria del nivel de vida del hogar* y representa, por construcción, la renta que, si fuera asignada a un solo individuo, le permitiría disfrutar del mismo nivel de vida que un miembro representativo de la familia original.

CUADRO 12.2: **Renta equivalente**

(euros; renta familiar de referencia: 1.000 €)

Número de miembros	Elasticidad (θ)				
	0	**0,25**	**0,5**	**0,75**	**1**
1	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
2	1.000	841	707	595	500
3	1.000	760	577	439	333
4	1.000	707	500	354	250
5	1.000	669	447	299	200
6	1.000	639	408	261	167

Fuente: Elaboración propia.

Alternativamente podríamos preguntarnos por la renta familiar equivalente respecto al hogar unipersonal que disfruta de una renta de mil euros. Esta renta familiar equivalente viene dada en el cuadro 12.3. Observamos, leyendo el cuadro por columnas, cómo para $0<\theta<1$ las necesidades familiares, para mantener un nivel de vida constante, crecen con n_h, pero menos que proporcionalmente. Para $\theta = 1$, dichas necesidades crecen proporcionalmente, mientras que para $\theta = 0$, las necesidades permanecen inalteradas. De esta forma, las columnas del cuadro 12.3 nos proporcionan el coste adicional de un miembro más de la unidad familiar, bajo un determinado supuesto acerca de las economías de escala.

Por su parte, leyendo el cuadro por filas observamos el efecto no lineal que tiene la consideración de las diferentes economías de escala para un tamaño fijo del hogar. Conforme estas economías de escala disminuyen, $\theta \rightarrow 1$, necesitamos un mayor nivel de renta, a una tasa creciente, para mantener el mismo nivel de vida del hogar.[218]

[218] Los cuadros 12.2 y 12.3 ilustran las dos caras del mismo fenómeno. El cuadro 12.2 muestra la renta equivalente de diferentes familias con una renta de mil euros, en función de su diferente composición y supuestos acerca de θ. El cuadro 12.3 muestra cuál debería ser la renta familiar, en función de la composición y supuestos acerca de θ, para que dicha renta fuera equivalente a la de un hogar unipersonal con una renta de mil euros.

CUADRO 12.3: **Renta familiar equivalente**

(euros; renta familiar de referencia: 1.000 €)

Número de miembros	Elasticidad (θ)				
	0	**0,25**	**0,5**	**0,75**	**1**
1	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
2	1.000	1.189	1.414	1.682	2.000
3	1.000	1.316	1.732	2.280	3.000
4	1.000	1.414	2.000	2.828	4.000
5	1.000	1.495	2.236	3.344	5.000
6	1.000	1.565	2.449	3.834	6.000

Fuente: Elaboración propia.

Aunque la especificación (12.4) es extremadamente simple, puede ampliarse para considerar otras características familiares. Por ejemplo, la distinción entre niños y adultos puede hacerse a partir de la siguiente forma funcional (Cutler y Katz 1992; Banks y Johnson 1994),

$$m(n_A, n_B) = \left(n_A + \lambda n_B\right)^{\theta} \tag{12.5}$$

donde $\lambda \in [0, 1]$ es un parámetro que refleja el coste de un niño en relación al de un adulto, y $\theta \in [0, 1]$ es de nuevo un indicador del grado global de economías de escala en relación al tamaño familiar. Obsérvese que cuando $\lambda = 1$ entonces (12.5) se convierte en (12.4).

Existen muchas formas en que características adicionales pueden ser incorporadas al análisis, pero solo aquellas formas funcionales con parámetros que tengan una interpretación clara deben ser consideradas. A este respecto ya observamos cómo la escala de la OCDE puede ser parametrizada de forma relativamente sencilla. En cualquier aplicación práctica es necesario sopesar la consideración de una mayor heterogeneidad con la sencillez y la interpretabilidad de las escalas de equivalencia, por lo que la fórmula (12.4) es ampliamente utilizada en la actualidad. De esta forma claridad, sencillez y comparabilidad, parecen haber ganado, de momento, la batalla.

Observación (12.1): En presencia de rentas equivalentes, las propiedades básicas de los índices de desigualdad analizadas en el capítulo 1 deberemos suponer que se verifican para la distribución equivalente. En concreto, el principio de las transferencias de Dalton, propiedad (1.4), se define en términos de transferencias de renta equivalente, sin que ello altere ni el ranking de los individuos afectados por la transferencia, ni la media de la distribución equivalente. Debe observarse, sin embargo, que transferencias que mantengan inalterada la media de la distribución equivalente, requerirán normalmente ajustes en la media de la distribución de la renta original. Ello no debe preocuparnos, puesto que es la renta equivalente, y no la original, el objeto de análisis relevante desde el punto de vista del bienestar.[219]

Por último, puesto que no existe un consenso en la profesión sobre la escala de equivalencia más adecuada en la práctica y dado que los resultados son ampliamente sensibles a la utilización de diferentes escalas de equivalencia, la literatura reciente ha enfatizado la imperiosa necesidad de comprobar la robustez de los resultados distributivos con la consideración de diferentes escalas de equivalencia (Buhmann et al. 1988; Jenkins 1991; Coulter, Cowell y Jenkins 1992a, 1992b).[220] Por supuesto, las comparaciones de la desigualdad solo deben ser efectuadas bajo la misma escala de equivalencia. Existen además dos estrategias adicionales que es posible utilizar para examinar la distribución de la renta en poblaciones heterogéneas.

En primer lugar, podemos utilizar los métodos de dominancia secuencial de Atkinson y Bourguignon (1982, 1987) si existe un mínimo consenso sobre las características que definen las necesidades básicas y las familias pueden ser ordenadas de acuerdo

---

[219] Esta no es la única alternativa en la que el principio de las transferencias de Dalton puede ser reformulado cuando tratamos con rentas equivalentes. En una población heterogénea, el significado de una transferencia de Dalton no es tan obvio como en el caso homogéneo, examinado en las dos primeras partes de este trabajo, cuando dicha transferencia tiene lugar entre familias con diferentes necesidades. La razón es que la relación entre renta y nivel de vida es ahora más complicada y una transferencia de ricos a pobres no implica necesariamente una reducción en la desigualdad en los *niveles de vida*. Ahora las necesidades interactúan con la renta en la determinación del nivel de vida, y las diferencias en las necesidades pueden más que compensar el efecto positivo de las transferencias de renta sobre los niveles de vida (Glewwe 1991). En esta situación es posible extender el principio de las tranferencias de Dalton de diferentes formas (Ebert 1995, 1997, 1999; Ebert y Moyes 2003).

[220] Esta falta de consenso hace que, en las comparaciones internacionales la renta per cápita sea todavía el estándar más utilizado (Milanovic 2002; UNU-WIDER 2005).

con estas necesidades (Atkinson 1992; Jenkins y Lambert 1993). Estos métodos extienden la dominancia de Lorenz, examinada en el capítulo 5, a situaciones en las que los individuos difieren en algo más que la renta. Sin embargo, su principal inconveniente, además de que no son aplicables en todas las situaciones, es que proporcionan un orden parcial y no un orden completo. Por tanto, el precio de no utilizar una escala de equivalencia concreta es que es posible encontrar situaciones de no comparabilidad.

En segundo lugar, es posible efectuar una partición de la población según sus necesidades, de forma que cada grupo sea homogéneo, y analizar la distribución de la renta dentro de cada uno de estos grupos y entre ellos. Las comparaciones dentro de cada grupo son independientes de la escala de equivalencia elegida y, en consecuencia, las conclusiones son robustas en este sentido.

12.5. Pero, ¿quién disfruta la renta equivalente?

Cualquiera que sea la decisión sobre la utilización de las economías de escala y cuál debe ser la renta equivalente a utilizar en el análisis distributivo, siempre nos quedará una decisión final acerca de quién disfruta de dicha renta, es decir quién es el *perceptor* de la renta equivalente.

Si nos abstraemos por un momento del ajuste por necesidades y las escalas de equivalencia, dos parecen ser las opciones naturales. La familia, cuando el objeto de análisis es la renta familiar, y_h, y el individuo, cuando el objeto de análisis es la renta per cápita, y_h/n_h. En el primer caso, cada familia cuenta como un solo *individuo,* en el segundo caso, una familia de cuatro miembros cuenta como cuatro familias de un solo miembro, una vez se le ha asignado a cada miembro del hogar una renta igual a $1/4\, y_h$. Así pues, si en el primer caso estudiamos la *distribución de la renta familiar,* en el segundo estudiamos la *distribución personal de la renta,* bajo el supuesto implícito de ausencia de *desigualdad intrafamiliar.*[221]

[221] A pesar de estas dos opciones, algunos autores asignan la renta per cápita, y_h/n_h, a la familia. De esta forma y_h/n_h se toma como indicador del nivel de vida del hogar, que es quien constituye la unidad económica de análisis (Bosch, Escribano y Sánchez 1989).

En el caso de la renta equivalente, por ejemplo y_h/n_h^{θ}, tenemos mayores opciones. Ciertamente podemos considerar que dicha renta es un indicador del nivel de vida de las familias y asignar y_h/n_h^{θ} a cada familia, que cuenta en este caso como un solo *individuo*. Aunque la lógica de utilizar la familia como *unidad de análisis* ha sido defendida, en este sentido, por algunos autores (Bottiroli y Martinetti 1995), el análisis económico se ha centrado tradicionalmente en el bienestar de los individuos, y no de las familias en sí mismas, por ello la práctica más habitual pondera cada renta equivalente por el número de miembros de la unidad familiar, con la esperanza de que este esquema de ponderación genere una estimación de la distribución personal de la renta (Danziger y Taussing 1979; Cowell 1984; Coulter, Cowell y Jenkins 1992a; Ruiz-Castillo 1993, 1994, 1995a; Atkinson, Rainwater y Smeeding 1995; Cowell y Mercader-Prats 1999; UNU-WIDER 2005).

En otras palabras, a cada renta equivalente, y_h/n_h^{θ}, se le asigna un peso igual al tamaño familiar, n_h; lo que es equivalente a asignar a cada individuo la renta equivalente del hogar al que pertenece y estudiar la distribución personal de dichas rentas equivalentes.

Aunque esta opción es la más lógica, al menos desde el punto de vista del análisis individualista del bienestar, cuando trabajamos con rentas equivalentes existe una tercera posibilidad a considerar. Podemos asignar la renta equivalente a los *individuos equivalentes*, n_h^{θ}. Esto implica ponderar cada renta equivalente, y_h/n_h^{θ}, por n_h^{θ}, y, en consecuencia, trabajar con una población ficticia (Ebert 1997; Ebert y Moyes 2003).

Este esquema de ponderación puede ser defendido desde diversas perspectivas. Considérese la renta equivalente del cuadro 12.2; si ahora asignamos a cada individuo la renta equivalente del hogar al que pertenece, entonces la renta ficticia que correspondería a cada familia sería el resultado de multiplicar cada fila de dicho cuadro por el número de miembros del hogar. Los cálculos se muestran en el cuadro 12.4. Claramente, esta forma de proceder genera una *renta agregada ficticia* mucho mayor que la efectivamente disponible para cuestiones redistributivas, por ejemplo, salvo en el caso de ausencia de economías de escala, $\theta = 1$.

Además Glewwe (1991) examina un ejemplo en el que asignar a cada individuo la renta equivalente del hogar al que pertenece genera resultados aparentemente sorprendentes. En concreto, una transferencia progresiva de Pigou-Dalton en términos de las rentas originales lleva a una disminución de la media de la distribución equivalente tras la transferencia, lo que altera la participación de cada individuo en la renta y genera, finalmente, un incremento de la desigualdad en la distribución equivalente.[222]

CUADRO 12.4: **Renta familiar ficticia**

(euros; renta familiar de referencia: 1.000 €)

Número de miembros	Elasticidad (θ)				
	0	**0,25**	**0,5**	**0,75**	**1**
1	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
2	2.000	1.682	1.414	1.189	1.000
3	3.000	2.280	1.732	1.316	1.000
4	4.000	2.828	2.000	1.414	1.000
5	5.000	3.344	2.236	1.495	1.000
6	6.000	3.834	2.449	1.565	1.000

Fuente: Elaboración propia.

La forma de evitar este tipo de situaciones es ponderar la renta equivalente, y_h/n_h^θ, por n_h^θ, y utilizar así una *población ficticia de individuos equivalentes,* ya que este esquema de ponderación preserva la media de la distribución equivalente. Esta es la principal razón por la que Pyatt (1985, 1990) y Ebert (1997, 1999) recomiendan este esquema de ponderación a partir de la extensión del principio de las transferencias de Pigou-Dalton para poblaciones heterogéneas expuesta en Ebert (1995).

El inconveniente de utilizar dicho esquema de ponderación es que entonces los individuos no son tratados de forma simétrica (Ebert 1997; Ebert y Moyes 2003), una propiedad con profundas raíces en términos de la economía del bienestar. Así pues, fuera de los casos extremos en los que y_h es asignada a la familia, $\theta = 0$, o y_h/n_h a n_h, $\theta = 1$, debemos decidir en la práctica qué propie-

[222] Véase Lambert (1993, ejercicio 6.3.2) para un ejemplo de similares características en relación con la imposición progresiva.

dad sacrificar: si la simetría o el principio de las transferencias de Pigou-Dalton.[223]

12.6. Desigualdad intrafamiliar

Un aspecto final, a tener en cuenta cuando en la práctica utilizamos datos familiares para obtener conclusiones sobre el bienestar individual, es que de forma explícita o, más frecuentemente implícita, estamos haciendo supuestos acerca de las reglas de reparto de poder y decisión intrafamiliares. Por ejemplo, atribuir de forma idéntica a todos los miembros del hogar la misma renta, ya sea per cápita o equivalente, implica suponer un reparto igualitario de las cargas familiares, que los individuos participan de forma idéntica en todos los ámbitos de la vida familiar y tienen la misma capacidad de decisión y que no existen desigualdades intrafamiliares. Algo sobre lo que algunos autores han mostrado evidencia en contra (Haddad y Kanbur 1990).

Si la forma en la que las decisiones intrafamiliares son tomadas en la práctica genera situaciones no equitativas entre los miembros de la unidad familiar, entonces la desigualdad observada con los métodos que acabamos de exponer no es más que una subestimación de la desigualdad existente en la sociedad. Ciertamente, valorar a los individuos de forma diferente en función de su situación dentro de la familia requiere, no solo juicios de valor que supondrían el abandono de algunas de las propiedades del capítulo 1, por ejemplo la propiedad (1.2) de simetría, sino un volumen de información considerable acerca de la distribución del bienestar dentro de la familia, lo que no suele estar disponible en la práctica.[224]

Es necesario matizar, no obstante, que la incapacidad para tomar en consideración las desigualdades intrafamiliares tiene importantes consecuencias desde el punto de vista del diseño de

---

[223] Véase Shorrocks (2004) para una discusión reciente sobre este tema.

[224] Existen sin embargo algunos trabajos interesantes sobre el tema de las asignaciones intrafamiliares (Browning y Chiappori 1998), aunque las implicaciones de este tipo de trabajos sobre la medición de la desigualdad están todavía por explorar.

políticas públicas de bienestar a nivel individual y de lucha contra la pobreza. Por ejemplo, ante una situación de manifiesta desigualdad intrafamiliar, sería poco efectivo un programa de beneficios públicos orientado a las familias, sin tener en cuenta cómo los recursos son finalmente distribuidos dentro de la propia familia. En esta situación es probable que los miembros más desfavorecidos sigan sin percibir los beneficios de dicho programa. En su lugar, sería necesario el diseño de políticas que seleccionaran a los individuos y trataran de mejorar su situación de forma directa.

El mismo argumento puede esgrimirse cuando analizamos las desigualdades regionales. Si las desigualdades están finalmente en los individuos y no en los territorios, las políticas de mejora en la distribución personal de la renta deben ser diseñadas desde el estado central con el individuo como objetivo. La mera redistribución de fondos entre regiones no es suficiente para garantizar una distribución personal más equitativa.

12.7. Diseño muestral

El análisis aplicado de la distribución de la renta requiere estadísticas cuya procedencia puede ser muy variada: registros administrativos de origen fiscal, censos exhaustivos de la población bajo consideración, o incluso estadísticas regionales o nacionales en el caso del análisis de la distribución regional o internacional de la renta. Sin embargo, la fuente de datos más frecuente la constituyen las encuestas de presupuestos o condiciones de vida, en las que se recoge información de determinadas familias o individuos seleccionados de un listado completo de la población mediante una determinada regla probabilística conocida.

La principal característica de orden práctico que deberemos tener en cuenta al analizar datos de encuesta es que cada observación lleva asociado un *peso muestral* o factor de elevación *(sampling weight)*.[225] Estos pesos aseguran que podemos estimar las caracte-

[225] Damos por supuesto que la cobertura de la encuesta es la adecuada para los propósitos de nuestro análisis en términos de las características recogidas en ella y la población de referencia. Normalmente, las encuestas llevan asociado un documento metodológico

rísticas de la población a partir de los datos muestrales, así si la renta de una familia son 100 euros y su peso asociado es 10, ello implica que esta familia en la muestra representa a diez familias en la población y, por tanto, la renta de esta familia *elevada* a la población es 100 euros × 10 = 1.000 euros. Efectuando el mismo proceso para todas las familias de la encuesta podemos llegar a tener una estimación del total de renta de la población. De esta forma, los pesos muestrales expanden los resultados muestrales y los elevan a resultados poblacionales.

En consecuencia, y aun en ausencia de otros atributos, nuestra distribución de la renta vendrá dada por la lista de pares[226]

$$\left((y_1,\omega_1),(y_2,\omega_2),\ldots,(y_n,\omega_n)\right) \tag{12.6}$$

donde ω_i indica el peso asociado a y_i.

Por esta razón, los índices de desigualdad estimados a partir de datos de encuesta pueden considerarse como estimadores de sus contrapartidas poblacionales y, en consecuencia, están sujetos a variabilidad muestral. Un tema sobre el que no insistiremos en este trabajo, pero que ha preocupado a la literatura desde hace tiempo (Goldie 1977; Beach y Davidson 1983; Beach y Kaliski 1986; Cowell 1989, 1999; Davidson y Duclos 1997, 2000; Cowell y Jenkins 2000). En la práctica ello implica que la estimación de índices de desigualdad debería ir acompañada de sus correspondientes errores estándares que muestren la precisión de las estimaciones y cualifiquen de esta forma las conclusiones que podemos obtener de ellos.

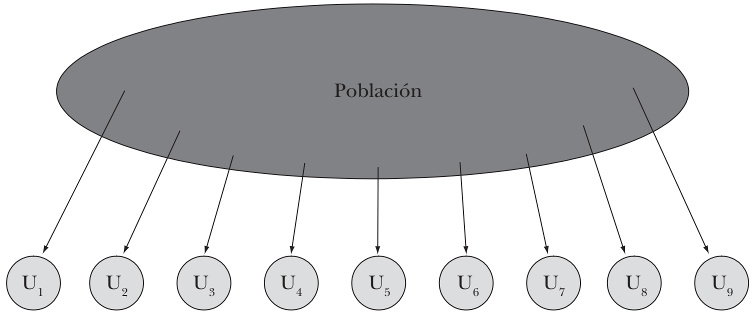
Cómo se determinan estos pesos en cada caso concreto depende del llamado *diseño muestral*, es decir, de la regla probabilística de selección de las observaciones. El esquema 12.1 muestra el diseño más simple posible, conocido como *muestreo aleatorio simple*, en el que cada elemento de la muestra es elegido directamente

donde se explican las cuestiones técnicas recogidas en este epígrafe y cuya lectura es esencial para conocer la estructura y calidad de los datos con los que estamos trabajando.

[226] Desde el punto de vista del cálculo de los diferentes índices de desigualdad, ello significa que todas las fórmulas que aparece en las dos primeras partes de este trabajo deben sustituir los sumatorios simples por sumatorios ponderados, pero ello no constituye ninguna dificultad especial (Cowell 1999; 2000, sección 8.3).

de la población con la misma probabilidad.[227] En este caso todos los elementos de la muestra son igualmente representativos de la población y, en consecuencia, llevan asociado el mismo peso, $\omega_i = \omega\ \forall i$. La consideración de los pesos en este caso es irrelevante en el cálculo de los índices de desigualdad relativos pero, al igual que sucede con la deflación, son absolutamente indispensables cuando consideramos cuestiones de bienestar y los niveles son importantes.

ESQUEMA 12.1: Muestreo aleatorio simple



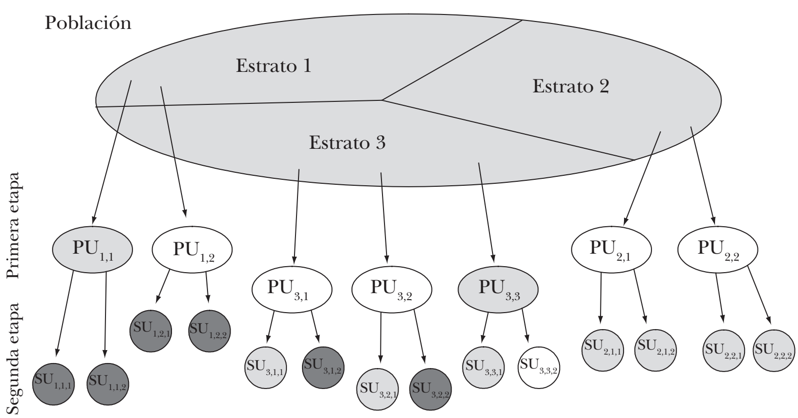
Nota: Observaciones muestrales, por ejemplo familias, elegidas con la misma probabilidad de la población, cada una de ellas con un número determinado de elementos de análisis, por ejemplo individuos dentro de cada familia.
Fuente: Elaboración propia a partir de Duclos, Araar y Fortin (2004).

El muestreo aleatorio simple raramente es empleado en la práctica, fundamentalmente por cuestiones de coste y eficiencia en la recogida de información. Las encuestas disponibles típicamente seleccionan las familias o individuos mediante un proceso en etapas y presentan los denominados estratos. El esquema 12.2 presenta un ejemplo de *muestreo bietápico estratificado*, que es el utilizado en la mayoría de las encuestas del Instituto Nacional de Estadística (INE), como por ejemplo las Encuestas de Presupuestos Familiares (EPF). En este caso la población es dividida en

[227] Técnicamente, el muestreo puede ser con reemplazo, que es lo que suponemos implícitamente, o sin reemplazo, en el que un elemento de la población una vez seleccionado ya no puede volver a aparecer en la muestra. Nos abstraeremos de estos detalles técnicos que pueden ser consultados en cualquier manual de teoría del muestreo (Kish 1965; Levy y Lemeshow 1991; Dorofeev y Grant 2006).

estratos, es decir subconjuntos de la población con determinadas características comunes[228], y se selecciona una muestra de cada uno de ellos. Por motivos de eficiencia en la selección de la muestra, en una primera etapa se seleccionan conglomerados *(clusters)* de familias, por ejemplo, dado que todo el territorio nacional está dividido en secciones censales, las unidades de primera etapa *(primary sampling units)* en las EPF son las secciones censales. Una vez seleccionadas estas se procede, en una segunda etapa, a la selección de familias *(second or last sampling units)*, dentro de dichas secciones. Son estas familias sobre las que finalmente se recoge la información.

ESQUEMA 12.2: Muestreo bietápico estratificado



Nota: En la segunda etapa se obtienen las observaciones muestrales, por ejemplo familias, cada una de ellas con un número determinado de elementos de análisis, por ejemplo individuos dentro de cada familia.
Fuente: Elaboración propia a partir de Duclos, Araar y Fortin (2004).

Resulta obvio que este proceso puede complicarse. Por ejemplo después de la primera etapa podemos proceder a otra estratificación y/o podríamos diseñar un esquema de más de dos etapas.

En cualquier caso los elementos fundamentales del diseño muestral que deberemos tener en cuenta son los siguientes:

---

[228] El criterio de selección de estratos es típicamente geográfico (regiones, tamaños municipales o áreas urbanas *versus* rurales).

— En los datos procedentes de encuestas, cada observación lleva un peso asociado, ω_i, utilizado para elevar los resultados muestrales a los poblacionales y que deberá ser incluido de forma rutinaria en los cálculos.
— La utilización de estratos permite, dado un mínimo de información para cada estrato, extraer conclusiones separadas para cada uno de ellos. El diseño muestral facilita, de esta forma, el estudio de subpoblaciones, al mismo tiempo que acota cuáles pueden ser estudiadas y cuáles no.
— Puesto que varias muestras potenciales podrían ser elegidas de una misma población, la obtención de índices de desigualdad a partir de datos de encuesta está sujeta a errores de muestreo. La utilización de estratos tiende a reducir estos errores y, en consecuencia, a aumentar la eficiencia de los estimadores. Ello es debido a que los estratos aumentan el contenido informativo de la muestra al recoger información de las diferentes partes de la población y, en este sentido, tienen un efecto similar al de aumentar el tamaño muestral. Por su parte, la selección de observaciones mediante la utilización de conglomerados *(clusters)* tiende a aumentar los errores de muestreo, ya que las observaciones dentro de un mismo conglomerado suelen ser relativamente homogéneas y, en consecuencia, la selección mediante etapas tiende a reducir el contenido informativo de la muestra.
— Aunque, desde el punto de vista de la obtención de los índices de desigualdad, todo lo que necesitamos conocer son los pesos muestrales asociados a cada observación, la literatura ha mostrado cómo el diseño muestral tiene un efecto no despreciable sobre la precisión con que dichos índices son estimados (Howes y Lanjouw 1997; Cowell y Jenkins 2000).

Finalmente, debemos señalar que, aunque nos hemos referido a aspectos relacionados con la medición de la desigualdad económica, el instrumental presentado en la primera parte de este trabajo puede ser utilizado para la medición del grado de dispersión de cualquier otra variable de interés. Por ejemplo, es posible analizar cuestiones relacionadas con la concentración industrial y la distribución espacial de la actividad económica (Combes y Overman 2004), la dispersión de la población entre municipios o sobre el territorio (Goerlich et al. 2006), la distribución del capital humano (Thomas, Wang y Fan 2001) o incluso la desigualdad individual en la longitud del tiempo de vida (Shkolnikov, Andreev y Begun 2003). En todos estos casos los aspectos normativos mencionados a lo largo del trabajo, fundamentalmente en la parte II, carecen de fundamento, pero los aspectos positivos de la parte I permanecen totalmente válidos.

13. La dinámica de la distribución de la renta y el bienestar en España y sus comunidades autónomas (1973-2003)

13.1. Introducción

Dedicamos este capítulo a analizar la evolución de la distribución de la renta y el bienestar en España usando el tipo de instrumental que hemos presentado en los capítulos precedentes. Seguiremos un orden secuencial similar al expuesto en las dos primeras partes del texto. Así pues, examinaremos en primer lugar la evolución de la distribución de la renta relativa, y_i/μ, utilizando gran parte del aparato teórico expuesto en la primera parte, fundamentalmente índices relativos de desigualdad, y abstrayéndonos aquí de los niveles de renta, que no obstante serán presentados de forma breve en el primer estadio del análisis. Y examinaremos, en segundo lugar, la evolución del bienestar siguiendo las pautas expuestas en la segunda parte, es decir, básicamente deflactando los niveles por un término que mide el coste monetario de la desigualdad.

Recordemos que una función de evaluación social es S-consistente, (9.2), cuando puede escribirse como

$$V(\mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(\mathbf{y}) y_i = n\xi = Y(1 - I(\mathbf{y}))$$

donde $Y = n\mu$ es la renta total y ξ representa la renta igualitaria equivalente. Con este enfoque de evaluación del bienestar estamos usando una métrica monetaria, (medimos el bienestar *en dinero*). Como en toda métrica monetaria las magnitudes absolutas en que medimos el bienestar dependen de las unidades en que medimos la renta. Por ello, en ocasiones recurriremos a normalizar las variables para neutralizar este efecto.

Habíamos visto, también, que una función de evaluación social homogénea y diferenciable verifica los principios de equidad mínima, independencia y escala unitaria, si y solo si adopta la forma

$$V^T(\mathbf{y};\beta) = n\mu\left(1-\beta T(\mathbf{y})\right)$$

donde el parámetro β es una medida de preferencia por la igualdad y $T(\mathbf{y})$ es el índice de desigualdad de Theil.

Tomaremos aquí el caso particular $\beta = 1$, que garantiza la descomponibilidad aditiva del indicador por subgrupos de población (y supone dar pesos negativos a aquellos individuos cuya renta supera tres veces la renta per cápita). En este caso la función de evaluación social toma la forma ya conocida

$$V^T(\mathbf{y}) = Y\left(1-T(\mathbf{y})\right)$$

donde $Y = n\mu(\mathbf{y})$. Esta función de evaluación social establece que el bienestar asociado a una distribución de renta viene dado por la renta total deflactada por un término que mide la desigualdad en términos del primer índice de Theil. Nuestro análisis en este campo se centrará fundamentalmente en la evaluación de bienestar social a través de esta particularización de la función de evaluación social.

De lo anterior se deduce que el término $YT(\mathbf{y})$ proporciona una medida de la pérdida agregada de bienestar derivada de la desigualdad. Si queremos tener una medida de esta pérdida de bienestar como proporción del bienestar total (una medida relativa, independiente de las unidades en que midamos la renta), podemos tomar

$$z_{V^T}(\mathbf{y}) = \frac{YT(\mathbf{y})}{V^T(\mathbf{y})} = \frac{T(\mathbf{y})}{1-T(\mathbf{y})}$$

Por otra parte, cuando queremos comparar sociedades con distinto número de individuos podemos recurrir al cálculo del bienestar per cápita como medida de referencia (que obviamente coincide con la renta igualitaria equivalente); es decir,

$$w(\mathbf{y}) = \mu(\mathbf{y})\left(1-T(\mathbf{y})\right)$$

Dedicamos el resto del capítulo a analizar la evolución de la distribución de la renta y el bienestar en España y sus comunidades autónomas, medido de este modo, a lo largo del periodo 1973-2003.[229] La estructura del capítulo es la siguiente. El epígrafe 13.2 presenta las fuentes de información utilizadas, el ámbito geográfico, la variable objeto de estudio y el resto de opciones metodológicas que hemos considerado convenientes dada la finalidad del análisis. El epígrafe siguiente ofrece brevemente los niveles promedio de partida a nivel nacional y por comunidades autónomas, y examinamos, a continuación, la evolución de la distribución de la renta relativa, haciendo hincapié fundamentalmente en aspectos regionales. El epígrafe 13.5 analiza la evolución del bienestar según las líneas que acabamos de mencionar. Finalmente, el apéndice A.7 recoge resultados adicionales de interés.

13.2. Fuentes de información y decisiones metodológicas

La fuente de información básica utilizada en este capítulo son diversas EPF del INE. Los objetivos fundamentales de las EPF están relacionados con la determinación de los niveles de ingresos y sus fuentes, así como los volúmenes de gasto a diferentes niveles de desagregación, tanto territorial como por tipos de bienes. Todo ello con una doble finalidad:

> [...] proporcionar información estructural para la estimación del consumo privado por funciones de la Contabilidad Nacional y suministrar, cuando sea necesario, el conjunto de ponderaciones para la elaboración del Índice de Precios al Consumo (IPC).
>
> (INE 1997a)

[229] Nuestro análisis es similar al realizado por Ruiz-Castillo y Sastre (1999), Sastre (1999) o Ayala, Jurado y Pedraja (2006), si bien el periodo de análisis, las opciones metodológicas y el énfasis en los temas no son exactamente coincidentes.

En la práctica, estas encuestas pueden considerarse como de objetivos múltiples, la riqueza de información que contienen las hacen especialmente adecuadas para el estudio de cuestiones más allá de las meramente económicas y se han convertido en un elemento estadístico de fundamental importancia en el sistema de indicadores sociales de un país. En este sentido, son una fuente de información especialmente útil para el análisis de cuestiones distributivas como las que nos interesan en este capítulo. Así lo ha entendido la profesión que, tras un trabajo inicial de Ruiz-Castillo (1987), ha utilizado profusamente esta rica fuente de información para el análisis de cuestiones como las que ahora nos ocupan.[230] Aunque una descripción detallada de los aspectos metodológicos de las EPF está fuera del ámbito de este trabajo, ofrecemos a continuación unos breves comentarios sobre aquellos aspectos de especial relevancia para nuestros cálculos.[231]

Es de observar que tanto la información sobre niveles de renta, como la dispersión individual observada en la distribución de la renta proceden de una única fuente, las EPF. De esta forma evitamos la inconsistencia de utilizar valores medios de las variables procedentes de la Contabilidad Regional, por ejemplo, con índices de desigualdad procedentes de encuestas de presupuestos. En definitiva, si otorgamos fiabilidad a estas encuestas para medir la dispersión en la distribución también deberemos otorgársela para medir niveles promedio (Milanovic 2005).

13.2.1. Las Encuestas de Presupuestos Familiares en España

Aunque la primera EPF fue realizada por el INE en 1958 y a esta siguió otra con mayor cobertura, tanto desde el punto de vista geográfico como temporal, realizada entre abril de 1964 y marzo de 1965, EPF 1964/65, la primera encuesta que en propiedad se considera como una encuesta de presupuestos familiares es la de

[230] Sin ánimo de ser exhaustivos pueden ser consultados los trabajos de Ruiz-Castillo (1987, 1993, 1994, 1995b, 1998, 1999), Bosch, Escribano y Sánchez (1989), Martín-Guzmán et al. (1996), Del Río y Ruiz-Castillo (1996, 2000), Ruiz-Castillo y Sastre (1999), Goerlich y Mas (2001a, 2002, 2004a) o Oliver-Alonso, Ramos y Raymond-Bara (2001), entre muchos otros.

[231] Una mayor información puede encontrase en los volúmenes metodológicos asociados a las encuestas utilizadas, en particular INE (1975, 1983, 1992 y 1997b).

1973/74. Dicha encuesta incorpora una riqueza de información sobre ingresos, gastos y características personales y familiares muy elevada para la época de su realización, entre julio de 1973 y junio de 1974, e incorporó un diseño muestral que, basado en la Encuesta General de Población (García España 1974), ha perdurado, en líneas generales, hasta nuestros días. Con esta encuesta comenzaremos nuestro periodo de análisis.

A esta encuesta, le siguió la EPF de 1980/81, realizada entre abril de 1980 y marzo de 1981, adaptada a las recomendaciones internacionales y con un mayor nivel de detalle que la anterior. Diez años más tarde, el INE realizó una nueva encuesta, la EPF 1990/91, cuya recogida de información se llevó a cabo entre abril de 1990 y marzo de 1991, de similares características pero que ampliaba todavía más la información recopilada en la anterior. Así no solo se aumentaba el nivel de detalle sobre ingresos y gastos, sino que se profundizó de forma notable en el estudio de las características sociales y demográficas de los hogares españoles.

Estas tres encuestas que acabamos de mencionar constituyen lo que el INE llama encuestas básicas o estructurales. Se realizan cada cierto tiempo y recopilan gran cantidad de información, en todos los casos se superan los 20.000 registros y permiten una desagregación a nivel provincial, si bien la EPF 1973/74 no incorpora información sobre las ciudades autónomas de Ceuta y Melilla, algo que fue subsanado a partir de la EPF de 1980/81. Resulta de interés mencionar que el Departamento de Economía de la Universidad Carlos III de Madrid realizó una importante tarea de homogenización de estas tres encuestas básicas, las EPF de 1973/74, 1980/81 y 1990/91.[232]

---

[232] Dicha información puede consultarse en http://www.eco.uc3m.es/investigacion/index.html#toc4. Al mismo tiempo se ponía a disposición de los usuarios, de forma libre y gratuita, los micro-datos homogenizados de dichas encuestas. Información adicional sobre este proceso de homogeneización puede encontrase en Alonso-Colmenares et al. (sin fecha), Alonso-Colmenares et al. (1999) y Arévalo, Cardelús y Ruiz-Castillo (1998), documentos todos ellos disponibles en la dirección de Internet mencionada.

De hecho los datos utilizados por nosotros en este capítulo para estas encuestas proceden de esta fuente de información, si bien los microdatos de las EPF de 1980/81 y 1990/91 están a disposición pública en la web de INE, http://www.ine.es, pero no así los de la EPF 1973/74.

No obstante, estas no han sido el único tipo de EPF que ha realizado el INE, también existen las encuestas de tipo coyuntural, realizadas de forma continuada, con periodicidad trimestral y menores nivel de desagregación, tanto en el ámbito geográfico como en lo referente el detalle de bienes y servicios investigados y a las características de hogares y personas. Este tipo de encuestas suelen tener una estructura de panel rotante de hogares y, por tanto, la muestra se va renovando por partes a lo largo del tiempo.

La primera encuesta de este tipo fue la denominada Encuesta Permanente de Consumo, vigente entre el primer trimestre de 1977 y el cuarto de 1983, y con poca representatividad. A continuación, en 1985, se implantó la Encuesta Continua de Presupuestos Familiares, base 1985 ($ECPF_{1985}$), que con representatividad nacional estuvo vigente hasta el segundo trimestre de 1997. La decisión de no elaborar otra encuesta básica tras la EPF de 1990/91 propició una reforma metodológica importante en la ECPF para, entre otras cosas, dotarla de una representatividad regional, a nivel de comunidad autónoma. De esta forma, en el segundo trimestre de 1997 aparece la Encuesta Continua de Presupuestos Familiares, base 1997 ($ECPF_{1997}$), reforma directa de su antecesora, la $ECPF_{1985}$, pero con notables diferencias derivadas, como acabamos de indicar, de su representatividad a nivel regional, de un cambio en la clasificación de los bienes y servicios analizados y de un aumento importante en la información socioeconómica recogida sobre características de los hogares. Esta encuesta sigue vigente en la actualidad.[233]

La Encuesta Continua de Presupuestos Familiares, base 1997 ($ECPF_{1997}$), presenta algunas diferencias metodológicas respecto a las anteriores encuestas básicas que es conveniente mencionar.[234]

---

[233] No obstante ha sido sustituida en 2006 por una nueva ECPF.

[234] Aunque la $ECPF_{1997}$ comenzó a publicarse en el tercer trimestre de 1997, en la actualidad solo está disponible a partir del primer trimestre de 1998. La $ECPF_{1997}$ ha sufrido tres revisiones retrospectivas desde su publicación. La primera, con fecha 7 de febrero de 2003, como consecuencia de un error en el tratamiento de datos por parte del INE, y que fue aprovechado para expresar todos los datos monetarios en euros. La segunda, con fecha 25 de junio de 2004, para incorporar los datos poblacionales procedentes del censo de 2001, afectó a los factores de elevación de la encuesta y, en consecuencia, a todos los resultados generados a partir de la $ECPF_{1997}$. Tras esta segunda revisión, el INE no suministró los datos de los dos trimestres de 1997 disponibles

En primer lugar, se trata de una encuesta trimestral, por lo que su comparación con las encuestas básicas, de carácter anual, requiere de un proceso de anualización. En segundo lugar, las EPF de 1973/74, 1980/81 y 1990/91, tienen una estructura estándar de encuestas de corte transversal, sin embargo la $ECPF_{1997}$ tiene una estructura de panel rotante que hace que una familia permanezca en la encuesta durante ocho trimestres, de esta forma la muestra se renueva a razón de 1/8 por trimestre.[235] Además, para suavizar la carga de trabajo que supone a las familias la colaboración con el INE en la realización de la $ECPF_{1997}$, se establecen dos grados de colaboración, lo que en la práctica se traduce en la coexistencia de dos submuestras dentro de la $ECPF_{1997}$ en cada trimestre, las cuales no pueden ser tratadas de idéntica forma a efectos de estudios distributivos.

Ante estas dificultades, y para facilitar la comparación entre encuestas, el propio INE ha efectuado una anualización de la $ECPF_{1997}$, poniendo a disposición de los usuarios los denominados *ficheros longitudinales* con los que:

> [...] se consigue disponer de una muestra anual representativa de hogares a partir de la cual se podrán realizar estudios similares a los que hasta ahora se venían realizando con la muestra anual de las Encuestas Básicas de Presupuestos Familiares, como la obtención de indicadores de desigualdad y distribución por decilas de gasto anual, etc., para los que es necesario asignar valores anuales del gasto para cada hogar.
>
> (INE 2002)

Parece pues, de la propia descripción del INE, que este tipo de ficheros están especialmente diseñados para el estudio de las cuestiones distributivas en las que estamos interesados y, en con-

---

anteriormente. La tercera, con fecha 10 de agosto de 2006, afectó a los resultados del tercer trimestre de 2004 al haberse detectado un error en la tabulación de los mismos.

[235] En todos los casos, sin embargo, el muestreo es de tipo bietápico estratificado; siendo las unidades de primera etapa las secciones censales y las de segunda, y última, las viviendas familiares principales.

secuencia, será este fichero longitudinal, preparado por el INE, el que será objeto de utilización en este capítulo.[236]

En el momento de acometer este capítulo, el último fichero longitudinal disponible de la ECPF$_{1997}$ es el de 2003,[237] por ello nuestro periodo de análisis se extiende desde 1973 hasta el 2003, utilizando las EPF de 1973/74, 1980/81 y 1990/91 y el fichero longitudinal de la ECPF$_{1997}$ de 2003, un periodo de 30 años con profundos cambios para la sociedad española. El cuadro 13.1 muestra algunas características, a nivel regional, de las encuestas utilizadas en términos de tamaño muestral (hogares), población representada y valores medios (nominales) del ingreso monetario y del gasto total en términos relativos respecto al valor nacional del año respectivo.

Este cuadro permite apreciar algunas diferencias importantes en términos de los cambios metodológicos de la ECPF$_{1997}$ respecto a las encuestas básicas anteriores. El número de observaciones en los ficheros longitudinales de la ECPF$_{1997}$ se sitúa algo por debajo de la mitad de observaciones que en el resto de EPF. Además, no todas las comunidades autónomas mantienen un porcentaje de observaciones similares a lo largo del tiempo, así regiones como Cataluña o la Comunidad de Madrid, relativamente pobladas, o Illes Balears, Comunidad Foral de Navarra o La Rioja, relativamente poco pobladas, incrementan su participación en la muestra, mientras que comunidades como Andalucía o Castilla y León reducen su participación en la misma. Estos cambios no parecen afectar a las posiciones relativas de las diferentes comunidades autónomas en términos de su ingreso o gasto per cápita; con leves diferencias estas posiciones relativas parecen ser suficientemente robustas, tanto en la variable utilizada como en las diferentes encuestas.

---

[236] Es cierto que pueden subsistir algunos problemas de comparabilidad entre las Encuestas Continuas recientes y las antiguas Encuestas Básicas, dada su diferente finalidad; pero esta es la única opción si queremos realizar un análisis de largo plazo. Justo es reconocer que más problemático puede ser la discrepancia observada en Goerlich (2007) en lo referente a los resultados procedentes de los ficheros trimestrales y el correspondiente fichero longitudinal, pero este es un tema actualmente bajo investigación.

[237] Ello a pesar de que para los ficheros trimestrales disponemos de hasta el primer trimestre de 2005, lo que se debe a que para la elaboración de los ficheros longitudinales el INE toma en consideración información de fuera del año de referencia, lo que provoca un mayor desfase en la disponibilidad de los datos anualizados.

CUADRO 13.1: Tamaño muestral, población representada, ingreso monetario per cápita y gasto total per cápita relativo

EPF 1973/74						
Comunidades autónomas	**Hogares**		**Población representada**		**Ingreso monetario per cápita**	**Gasto total per cápita**
	(n.º de observs.)	**(porcentaje)**	**(hab.)**	**(porcentaje)**	**(España = 100)**	**(España = 100)**
Andalucía	4.472	18,54	5.855.966	17,17	76,60	77,92
Aragón	1.221	5,06	1.131.137	3,32	111,26	105,92
Asturias, P. de	728	3,02	1.023.130	3,00	97,54	95,01
Balears, Illes	455	1,89	583.758	1,71	120,02	104,73
Canarias	941	3,90	1.201.034	3,52	92,06	96,93
Cantabria	479	1,99	460.915	1,35	95,30	116,65
Castilla y León	2.853	11,83	2.495.731	7,32	84,34	82,66
C.-La Mancha	1.803	7,48	1.581.643	4,64	78,42	80,34
Cataluña	2.477	10,27	5.411.590	15,87	127,01	119,28
C. Valenciana	1.907	7,91	3.201.903	9,39	95,69	98,74
Extremadura	1.027	4,26	1.054.230	3,09	73,36	67,54
Galicia	1.723	7,14	2.518.549	7,39	78,64	83,19
Madrid, C. de	1.419	5,88	4.067.363	11,93	128,76	135,33
Murcia, R. de	562	2,33	822.165	2,41	85,68	79,62
Navarra, C.F. de	398	1,65	459.081	1,35	103,15	108,82
País Vasco	1.318	5,47	2.004.716	5,88	120,66	119,66
Rioja, La	332	1,38	229.062	0,67	106,49	105,19
España	**24.115**	**100,00**	**34.101.972**	**100,00**	**100,00**	**100,00**
Municipios[1]						
Pequeños	6.133	25,43	10.736.671	31,48	76,78	77,25
Medianos	5.025	20,84	7.915.903	23,21	89,79	90,06
Grandes	12.957	53,73	15.449.398	45,30	121,37	120,90

CUADRO 13.1 *(cont.)*: **Tamaño muestral, población representada, ingreso monetario per cápita y gasto total per cápita relativo**

EPF 1980/81						
Comunidades autónomas	**Hogares**		**Población representada**		**Ingreso monetario per cápita**	**Gasto total per cápita**
	(n.º de observs.)	**(porcentaje)**	**(hab.)**	**(porcentaje)**	**(España = 100)**	**(España = 100)**
Andalucía	4.404	18,62	6.331.703	17,15	76,99	82,06
Aragón	1.299	5,49	1.166.778	3,16	106,13	107,21
Asturias, P. de	689	2,91	1.110.329	3,01	109,70	99,31
Balears, Illes	477	2,02	644.108	1,74	112,97	118,43
Canarias	859	3,63	1.342.666	3,64	79,00	83,63
Cantabria	527	2,23	502.973	1,36	106,49	117,48
Castilla y León	3.335	14,01	2.529.531	6,85	94,68	94,18
C.-La Mancha	1.799	7,61	1.619.652	4,39	73,77	75,59
Cataluña	2.364	9,99	5.864.032	15,88	125,28	110,35
C. Valenciana	1.764	7,46	3.605.473	9,76	100,67	100,33
Extremadura	931	3,94	1.047.248	2,84	64,02	68,64
Galicia	1.574	6,65	2.774.215	7,51	80,36	94,50
Madrid, C. de	1.269	5,36	4.596.937	12,45	125,01	123,59
Murcia, R. de	452	1,91	934.394	2,53	82,40	92,75
Navarra, C.F. de	364	1,54	499.063	1,35	119,51	120,31
País Vasco	1.203	5,09	2.105.154	5,70	115,75	116,91
Rioja, La	344	1,45	251.157	0,68	101,39	101,24
España	**23.654**	**100,00**	**36.925.412**	**100,00**	**100,00**	**100,00**
Municipios[1]						
Pequeños	6.873	29,06	10.907.748	29,54	79,57	81,58
Medianos	4.347	18,38	8.001.869	21,67	87,41	89,70
Grandes	12.434	52,57	18.015.795	48,79	117,96	115,73

CUADRO 13.1 *(cont.)*: **Tamaño muestral, población representada, ingreso monetario per cápita y gasto total per cápita relativo**

EPF 1990/91						
Comunidades autónomas	**Hogares**		**Población representada**		**Ingreso monetario per cápita**	**Gasto total per cápita**
	(n.º de observs.)	**(porcentaje)**	**(hab.)**	**(porcentaje)**	**(España = 100)**	**(España = 100)**
Andalucía	3.672	17,55	6.849.005	17,86	80,27	82,44
Aragón	1.105	5,28	1.191.943	3,11	106,88	93,85
Asturias, P. de	442	2,11	1.108.033	2,89	105,37	105,89
Balears, Illes	428	2,05	667.487	1,74	112,97	111,44
Canarias	771	3,69	1.462.265	3,81	83,60	87,40
Cantabria	360	1,72	521.524	1,36	100,18	96,50
Castilla y León	3.160	15,11	2.573.505	6,71	97,80	91,74
C.-La Mancha	1.694	8,01	1.690.665	4,41	87,10	85,41
Cataluña	1.642	7,85	5.903.705	15,39	122,45	121,17
C. Valenciana	1.705	8,15	3.756.074	9,79	97,21	90,24
Extremadura	830	3,97	1.114.354	2,91	73,14	71,25
Galicia	1.738	8,31	2.781.389	7,25	90,91	89,98
Madrid, C. de	762	3,64	4.837.882	12,62	114,88	126,91
Murcia, R. de	526	2,51	1.021.479	2,66	85,69	86,41
Navarra, C.F. de	367	1,75	511.225	1,33	108,52	121,85
País Vasco	1.359	6,50	2.103.911	5,49	114,18	111,74
Rioja, La	357	1,71	254.470	0,66	120,82	96,15
España	**20.918**	**100,00**	**38.348.915**	**100,00**	**100,00**	**100,00**
Municipios[1]						
Pequeños	5.905	28,23	9.762.987	25,46	86,68	82,88
Medianos	4.905	23,45	8.991.560	23,45	91,26	91,88
Grandes	10.108	48,32	19.594.368	51,09	110,65	112,25

CUADRO 13.1 *(cont.)*: **Tamaño muestral, población representada, ingreso monetario per cápita y gasto total per cápita relativo**

ECPF 2003 (fichero longitudinal)						
Comunidades autónomas	**Hogares**		**Población representada**		**Ingreso monetario per cápita**	**Gasto total per cápita**
	(n.º de observs.)	**(porcentaje)**	**(hab.)**	**(porcentaje)**	**(España = 100)**	**(España = 100)**
Andalucía	1.080	11,97	7.452.592	17,93	84,38	87,65
Aragón	447	4,95	1.209.835	2,91	102,68	107,82
Asturias, P. de	405	4,49	1.049.759	2,53	109,59	96,22
Balears, Illes	322	3,57	919.075	2,21	118,65	110,44
Canarias	459	5,09	1.829.372	4,40	81,60	88,48
Cantabria	232	2,57	536.440	1,29	90,94	103,12
Castilla y León	677	7,50	2.429.067	5,84	102,40	96,49
C.-La Mancha	456	5,05	1.792.915	4,31	88,70	80,88
Cataluña	1.062	11,77	6.536.293	15,72	115,71	109,92
C. Valenciana	794	8,80	4.322.394	10,40	106,31	100,15
Extremadura	344	3,81	1.050.404	2,53	82,91	74,07
Galicia	727	8,06	2.688.827	6,47	91,94	91,78
Madrid, C. de	718	7,96	5.596.095	13,46	107,57	115,34
Murcia, R. de	348	3,86	1.241.826	2,99	77,78	89,59
Navarra, C.F. de	228	2,53	562.112	1,35	121,01	111,87
País Vasco	485	5,38	2.075.150	4,99	110,65	120,67
Rioja, La	239	2,65	281.787	0,68	99,44	101,80
España	**9.023**	**100,00**	**41.573.943**	**100,00**	**100,00**	**100,00**
Municipios[1]						
Pequeños	2.203	24,42	10.429.058	25,09	87,77	86,97
Medianos	1.987	22,02	10.305.201	24,79	94,35	92,69
Grandes	4.833	53,56%	20.839.683	50,13	108,92	110,13

[1] Pequeños: municipios de hasta 10.000 habitantes; medianos: de 10.001 hasta 50.000 habitantes (excepto capitales de provincia); y grandes: de más de 50.000 habitantes.
Nota: La población representada se obtiene a partir de numero de miembros del hogar y los factores de elevación de la encuesta. Valores medios relativos de ingresos y gastos en términos nominales.
Fuente: EPF 1973/74, 1980/81, 1990/91 y ECPF (fichero longitudinal) 2003.

Si observamos los datos por tamaños de municipios, vemos que la representación muestral es aproximadamente igual a la representación poblacional, lo que nos permite concluir que los municipios pequeños y medianos están infrarepresentados y por tanto las EPF captan mejor los patrones de consumo urbanos. Además observamos cómo los niveles relativos de ingreso o gasto per cápita son siempre mayores en las grandes ciudades que en los municipios más pequeños.

13.2.2. Opciones metodológicas

Una vez delimitado el periodo de análisis y las fuentes de información, deberemos decidirnos sobre las opciones metodológicas a emplear en el análisis, es decir, deberemos decir algo sobre la noción de renta y el perceptor de esa renta.

Como noción de renta utilizaremos el *ingreso monetario neto regular* de los hogares, como aproximación a su renta disponible ordinaria.[238] Dentro de la clasificación de ingresos considerados por las EPF se distingue, atendiendo a su naturaleza, entre:

1) *Ingresos monetarios:* ingresos del trabajo por cuenta ajena, ingresos del trabajo por cuenta propia, rentas del capital y la propiedad, prestaciones sociales regulares y extraordinarias y, finalmente, transferencias regulares y extraordinarias, tales como los premios de loterías y quinielas.
2) *Ingresos no monetarios:* valoraciones monetarias de consumos que no son objeto de pago alguno por parte del hogar pero que, sin embargo, el hogar disfruta de los mismos: autoconsumo, autosuministro, salario en especie, alquiler imputado a la vivienda en propiedad o cesión y comidas y cenas en el lugar de trabajo o establecimiento de hostelería propiedad del hogar.

---

[238] Véase Aldás, Goerlich y Mas (2006a, 2006b) para un análisis exhaustivo de la distribución de la renta, desde el punto de vista del gasto para este mismo periodo. Adicionalmente, puede verse también Ruiz-Castillo (1987, 1993, 1994, 1995b, 1998, 1999), Del Río y Ruiz-Castillo (1996, 2000), Ruiz-Castillo y Sastre (1999) o Goerlich y Mas (2001a, 2002, 2004a), entre otros.

Nuestra noción de renta se corresponde, pues, solo con una parte de los ingresos monetarios, no incorporando ninguna de las partidas imputadas estimadas por el INE, ni tampoco las prestaciones sociales y transferencias extraordinarias,[239] dichos ingresos deben entenderse en términos netos, es decir se excluyen las retenciones a cuenta y los pagos fraccionados, así como las cotizaciones a la Seguridad Social y otros pagos asimilados.[240] Además se eliminaron las observaciones para las que nuestra definición de renta arroja valores nulos.[241]

Debe recordarse que nuestra renta se corresponde con la renta real, por lo que deberemos abordar el tema de la deflación. A la vista de la información publicada por el INE nos decantamos por una opción que básicamente solo tiene en cuenta los niveles de precios para el análisis del bienestar, pero no para cuestiones distributivas.[242] Los IPC correspondientes a las bases 1983, 1992 y 2001 se enlazaron, a nivel de comunidad autónoma, utilizando los coeficientes de enlace correspondientes al año de cambio de base

---

[239] La eliminación de las partidas extraordinarias en los ingresos monetarios responde a un criterio de homogeneidad, ya que la $ECPF_{1997}$ solo recoge los ingresos netos regulares del hogar (INE 1997b). No obstante, parece razonable la no consideración de dichas partidas en orden a eliminar fluctuaciones transitorias de renta y centrarnos en una consideración más permanente del flujo monetario a disposición de los hogares, así por ejemplo en la EPF de 1990/91 una familia de tres miembros de Cuenca declara haber recibido 98 millones de la antiguas pesetas como premio de lotería. Parece sensato eliminar este tipo de ingresos del análisis.

[240] Consideramos necesario realizar una matización en lo referente a los ingresos procedentes de la actual ECPF, ya que es bien conocido que dichos ingresos no están tratados con mucho cuidado. De hecho, en los ficheros originales (trimestrales) se dispone de información sobre los ingresos para muy pocos hogares, alrededor de un 19,30% en el año 2003, sin embargo cuando no se dispone de un valor puntual sobre la cifra de ingresos, el INE dispone de un intervalo. Con esta información de los ficheros originales, el INE ha procedido a imputar una cifra de ingresos monetarios netos para cada hogar en los ficheros longitudinales (INE 2002).

[241] 36 observaciones en el caso de la EPF 1973/74, 53 en el caso de la EPF 1980/81, 17 en el caso de la EPF 1990/91 y 7 en el caso de la ECPF 2003.

[242] Cualquier otra opción, como la construcción de índices individuales por hogares o índices por cestas de consumo (Ruiz-Castillo, Ley e Izquierdo 1999a, 1999b; Sastre 1999), implicaba costes prohibitivos en términos de tiempo y recursos y constituye un proyecto de investigación en sí mismo. Sobre los efectos de los precios relativos en la distribución, en el caso español, puede verse Del Río y Ruiz-Castillo (1996) y Ruiz-Castillo (1998). En estos trabajos se muestra cómo durante la década de los ochenta la evolución de los precios relativos fue distribucionalmente neutra, pero durante el periodo 1973/74 -1980/81 la evolución de dichos precios favoreció mayoritariamente a las rentas inferiores.

y todos los valores monetarios fueron deflactados con los índices resultantes a este nivel de desagregación.[243] De esta forma la renta del hogar se expresa en euros constantes de 2001.[244] Los índices utilizados se ofrecen en el cuadro A.7.1 del apéndice A.7.

La renta familiar, que es la que obtenemos directamente de las encuestas, será distribuida de forma uniforme entre todos los miembros de la unidad familiar, como mecanismo para la comparación de hogares heterogéneos. De esta forma, nuestro indicador de bienestar es la renta per cápita. Recordamos del capítulo anterior que ello implica considerar que no existen economías de escala asociadas al tamaño familiar, ya que las necesidades crecen proporcionalmente conforme aumenta el número de miembros del hogar, un supuesto poco realista que efectuamos en beneficio de no perder intuición al comparar valores medios de diferentes distribuciones. Puesto que nuestro interés se centra en el individuo, asignamos dicha renta per cápita a cada miembro del hogar, de forma que nuestra disposición se centra en la distribución personal de la renta, bajo el supuesto implícito de ausencia de desigualdad intrafamiliar.

Desde el punto de vista geográfico, nuestro interés se centrará en las diecisiete comunidades autónomas. Aunque las EPF de 1973/74, 1980/81 y 1990/91 permiten una desagregación a nivel provincial, ello no es así para la $ECPF_{1997}$, por su parte la EPF de 1973/74 no consideró las ciudades autónomas de Ceuta y Melilla, por lo que nuestra atención se reducirá a las diecisiete comunidades autónomas y España, constituida por la agregación de dichas comunidades. En ocasiones, utilizaremos un criterio territorial diferente del administrativo y basado en el tamaño del munici-

[243] Puesto que los datos del IPC a nivel de comunidades autónomas solo se extienden hasta 1978, para la elaboración de los índices de 1973 y 1974 se procedió a enlazar el índice nacional, disponible desde 1961 en base 1992, y se mantuvieron las diferencias relativas por comunidades autónomas observadas en 1978. Se prefirió esta opción para la deflación de la EPF de 1973/74 a la de la utilización de un índice común para todas las comunidades autónomas en dicho periodo.

[244] Dado que la deflación se realiza a nivel de comunidades autónomas, ello no tiene efectos sobre los índices de desigualdad relativos calculados a este nivel de agregación, aunque sí tiene un efecto marginal sobre los índices calculados a nivel nacional o cuando utilizamos otro criterio de clasificación que tome observaciones de diferentes comunidades autónomas.

pio de residencia. Aunque los tamaños municipales considerados por las diferentes encuestas son dispares podemos efectuar una agrupación en tres bloques que se corresponden con diversos grados interesantes de urbanización: municipios de hasta 10.000 habitantes, de 10.001 hasta 50.000 habitantes (excepto capitales de provincia) y de más de 50.000 habitantes. Nos referiremos a estos tamaños municipales como municipios pequeños, medianos y grandes, respectivamente.

13.3. Evolución del ingreso per cápita

Antes de analizar la distribución examinaremos, brevemente, los niveles medios de ingreso per cápita en euros de 2001 a todos los niveles de desagregación considerados. En realidad, nuestra evaluación del bienestar simplemente se basa en descontar estos niveles medios según una medida de desigualdad, la proporcionada por el índice de Theil, *T*.

El cuadro 13.2 muestra el ingreso per cápita por comunidades autónomas y tamaños municipales para todas las encuestas, así como el crecimiento experimentado en los valores medios a lo largo de todo el periodo. Estas son las cifras objeto de discusión en la abundante literatura de la convergencia regional en España (Villaverde 1999; Goerlich y Mas 2001b; Goerlich, Mas y Pérez 2002; Raymond 2002; Tortosa Ausina et al. 2005), excepto por el hecho de que nuestros promedios proceden directamente de datos de encuestas de presupuestos y no de la contabilidad regional, con lo que potencialmente podrían arrojar resultados diferentes. Incluimos, además, dos normalizaciones de interés que mantendremos a lo largo del capítulo. Por una parte, las diferencias relativas respecto al valor de España en el año correspondiente, lo que permite examinar la convergencia y, por otra, los valores normalizados respecto al valor nacional en 1973/74.

En conjunto los datos muestran no solo el enorme crecimiento en los niveles promedios de ingreso experimentados por todas las comunidades autónomas, sino también el proceso de convergencia interregional. A nivel nacional, el ingreso per cápita experimentó un crecimiento del 67,2% a lo largo de estos treinta años,

CUADRO 13.2: Ingreso monetario neto ordinario per cápita

Comunidades autónomas	1973-1974	1980-1981	1990-1991	2003	Porcentaje de variación 1973/1974-2003
	(euros de 2001)				
Andalucía	2.563	2.894	3.747	4.821	88,1
Aragón	3.671	3.946	5.063	5.855	59,5
Asturias, P. de	3.419	4.152	5.110	6.245	82,7
Balears, Illes	4.131	4.366	5.598	6.753	63,5
Canarias	3.344	3.119	4.255	4.730	41,4
Cantabria	3.170	3.858	4.873	5.211	64,4
Castilla y León	2.816	3.543	4.690	5.867	108,4
C.-La Mancha	2.699	2.785	4.256	5.070	87,8
Cataluña	4.393	4.858	5.795	6.559	49,3
C. Valenciana	3.236	3.762	4.488	6.075	87,7
Extremadura	2.515	2.436	3.564	4.774	89,8
Galicia	2.649	3.056	4.286	5.227	97,3
Madrid, C. de	4.370	4.624	5.382	6.131	40,3
Murcia, R. de	2.966	3.187	4.119	4.407	48,6
Navarra, C.F. de	3.610	4.654	5.411	6.886	90,8
País Vasco	4.167	4.558	5.426	6.314	51,5
Rioja, La	3.629	3.945	5.727	5.646	55,6
España	**3.412**	**3.796**	**4.745**	**5.703**	**67,2**
Municipios[1]					
Pequeños	2.610	3.021	4.132	5.009	91,9
Medianos	3.071	3.332	4.330	5.382	75,3
Grandes	4.144	4.472	5.241	6.210	49,8

CUADRO 13.2 *(cont.)*: **Ingreso monetario neto ordinario per cápita**

Comunidades autónomas	1973-1974	1980-1981	1990-1991	2003
	(España = 100)			
Andalucía	75,11	76,23	78,97	84,53
Aragón	107,58	103,95	106,70	102,65
Asturias, P. de	100,20	109,38	107,69	109,50
Balears, Illes	121,07	115,00	117,98	118,40
Canarias	98,02	82,15	89,66	82,94
Cantabria	92,91	101,63	102,69	91,36
Castilla y León	82,52	93,34	98,84	102,87
C.-La Mancha	79,11	73,35	89,70	88,90
Cataluña	128,76	127,97	122,13	115,01
C. Valenciana	94,85	99,09	94,58	106,52
Extremadura	73,71	64,17	75,10	83,71
Galicia	77,64	80,51	90,33	91,64
Madrid, C. de	128,07	121,80	113,41	107,49
Murcia, R. de	86,94	83,97	86,80	77,28
Navarra, C. F. de	105,79	122,60	114,04	120,74
País Vasco	122,13	120,08	114,34	110,72
Rioja, La	106,35	103,91	120,69	99,00
España	**100,00**	**100,00**	**100,00**	**100,00**
Municipios[1]				
Pequeños	76,49	79,59	87,07	87,82
Medianos	90,00	87,77	91,25	94,37
Grandes	121,46	117,79	110,46	108,88

CUADRO 13.2 *(cont.)*: **Ingreso monetario neto ordinario per cápita**

Comunidades autónomas	1973-1974	1980-1981	1990-1991	2003
	(España = 100 en 1973-1974)			
Andalucía	75,11	84,81	109,83	141,29
Aragón	107,58	115,66	148,39	171,59
Asturias, P. de	100,20	121,70	149,78	183,04
Balears, Illes	121,07	127,95	164,08	197,91
Canarias	98,02	91,41	124,70	138,64
Cantabria	92,91	113,08	142,82	152,72
Castilla y León	82,52	103,85	137,47	171,95
C.-La Mancha	79,11	81,61	124,75	148,60
Cataluña	128,76	142,38	169,85	192,24
C. Valenciana	94,85	110,25	131,54	178,05
Extremadura	73,71	71,39	104,45	139,93
Galicia	77,64	89,57	125,62	153,18
Madrid, C. de	128,07	135,52	157,73	179,68
Murcia, R. de	86,94	93,42	120,72	129,17
Navarra, C.F. de	105,79	136,41	158,60	201,83
País Vasco	122,13	133,60	159,02	185,07
Rioja, La	106,35	115,61	167,85	165,48
España	**100,00**	**111,26**	**139,08**	**167,16**
Municipios[1]				
Pequeños	76,49	88,55	121,01	146,79
Medianos	90,00	97,65	126,91	157,74
Grandes	121,46	131,05	153,62	182,00

[1] Pequeños: municipios de hasta 10.000 habitantes; medianos: de 10.001 hasta 50.000 habitantes (excepto capitales de provincia); y grandes: de más de 50.000 habitantes.
Fuente: Elaboración propia a partir de EPF 1973/74, 1980/81, 1990/91 y ECPF (fichero longitudinal) 2003.

pero el crecimiento no fue uniforme por territorios. Todas las comunidades que crecen por encima del promedio nacional, ocho en total, lo hacen en más de 10 puntos porcentuales de diferencia respecto al agregado nacional. Castilla y León y Galicia se encuentran a la cabeza de este grupo, con crecimientos diferenciales de 41,2 y 30,2 puntos porcentuales respectivamente.

Por su parte, las comunidades que crecen por debajo del promedio nacional no ofrecen diferencias relativas tan acusadas, así por ejemplo la Comunidad de Madrid, que es la región con menor crecimiento relativo (40,3%), lo hace solo en 26,9 puntos porcentuales por debajo del promedio. Con algunas excepciones, como la Comunidad Foral de Navarra por una parte y la Región de Murcia por otra,[245] las comunidades autónomas que más crecen suelen ser las que parten de niveles de renta inferiores al promedio, mientras que las que menos crecen suelen partir de niveles de renta superiores al promedio. Esto no es sino una forma de manifestación del proceso de convergencia mencionado. Los datos del cuadro 13.2 indican que dicho proceso fue especialmente intenso en la década de los ochenta, que todavía no parece haber acabado y que ha tenido lugar básicamente desde abajo, es decir, por un acercamiento más rápido de las comunidades que partían de niveles inferiores al promedio nacional.

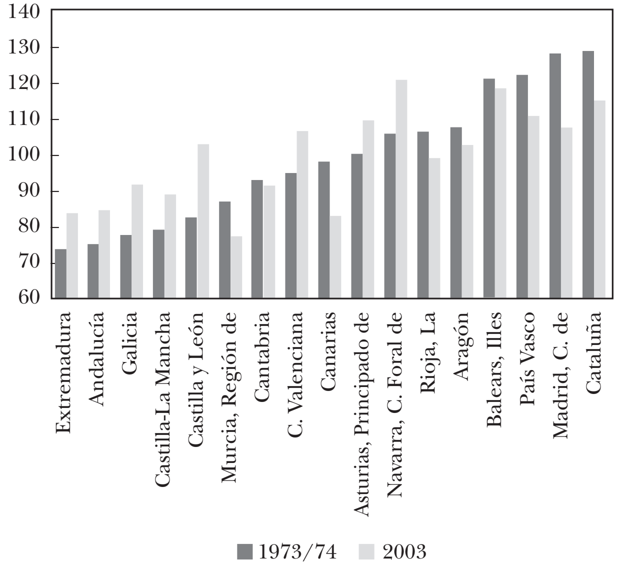
El gráfico 13.1 permite observar visualmente este proceso a partir de la representación de los niveles relativos inicial, 1973/74, y final, 2003, ordenando las comunidades autónomas en orden creciente en 1973/74. Se observa claramente cómo las cinco comunidades situadas a la cola han ganado posiciones relativas, superando a otras comunidades, como Región de Murcia o Canarias, que han perdido posiciones importantes en términos relativos. Los cambios experimentados por la cola superior de la distribución no son tan homogéneos ni, en líneas generales, de tanta magnitud como los acaecidos en el extremo inferior, lo que justifica la afirmación de que la convergencia ha tenido lugar básicamente desde abajo. Volveremos más adelante sobre estas cues-

---

[245] En ambos casos se trata de comunidades con poca representatividad muestral, lo que puede condicionar los resultados.

GRÁFICO 13.1: Ingreso per cápita relativo. Comunidades autónomas

(España = 100)



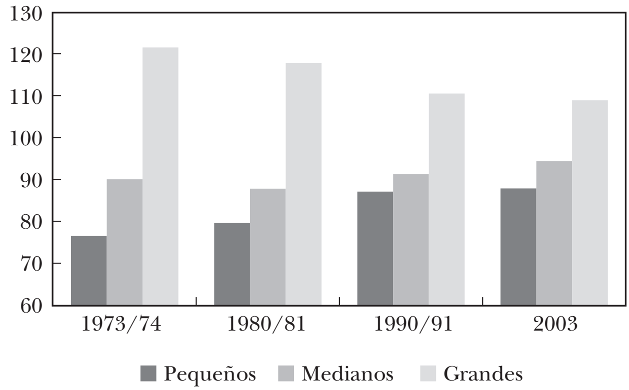
Fuente: Elaboración propia a partir de EPF 1973/74, 1980/81, 1990/91 y ECPF (fichero longitudinal) 2003.

tiones mediante la descomposición de los índices de desigualdad que examinamos en los capítulos 6 y 7.

Atendiendo al grado de urbanización, aproximado por el tamaño de los municipios, el proceso de convergencia es todavía más evidente. El esfuerzo de los municipios más pequeños, de carácter marcadamente rural sobre todo en los años setenta, por aproximar sus niveles de ingresos a los de las áreas urbanas se ha traducido en un claro acortamiento de las distancias relativas. En 1973/74 el ingreso promedio de los municipios de menos de 10.000 habitantes era un 37% inferior al de los de 50.000 o más habitantes, dicha diferencia se había reducido en 2003 a un 19%. Sin duda alguna, el proceso de crecimiento generalizado que ha tenido lugar en España a lo largo de estos treinta años, así como la extensión de las políticas de gasto público, infraestructuras, sanidad y educación fundamentalmente, han contribuido de forma considerable al acortamiento de estas diferencias que, no obstante, siguen siendo importantes en la actualidad. El gráfico 13.2, que

GRÁFICO 13.2: Ingreso per cápita relativo. Municipios

(España = 100)



Nota: Pequeños: municipios de hasta 10.000 habitantes; medianos: de 10.001 hasta 50.000 habitantes (excepto capitales de provincia); y grandes: de más de 50.000 habitantes.
Fuente: Elaboración propia a partir de EPF 1973/74, 1980/81, 1990/91 y ECPF (fichero longitudinal) 2003.

ofrece los valores relativos por tamaños municipales en todos los periodos considerados, no puede ser más ilustrativo al respecto.

No obstante, no son estas diferencias regionales o territoriales las que nos interesan, sino las de ámbito individual y cómo la distribución puede alterar los resultados que acabamos de examinar mediante la determinación de lo que hemos denominado bienestar, en lugar de simplemente niveles de renta. Volvemos pues sobre estas cuestiones en lo que resta de capítulo.

13.4. Distribución de la renta: evolución de la desigualdad

Comenzaremos por examinar la distribución de la renta relativa, y_i/μ, para el conjunto de España, posteriormente examinaremos cuestiones regionales y de ámbito territorial, para finalizar el epígrafe con algunos resultados sobre descomponibilidad.

13.4.1. La distribución de la renta en España

Antes de ofrecer el resultado de algunos de los índices de desigualdad examinados en los capítulos 2, 3 y 4, resulta conveniente examinar el conjunto de la distribución, ya sea mediante la curva de Lorenz, introducida en el capítulo 2 o mediante la función cuantil, mencionada en la introducción, y algunos percentiles asociados para la renta relativa, y_i/μ. Aunque este procedimiento no proporciona una ordenación completa de distribuciones de renta es muy útil desde el punto de vista práctico para saber que es lo que pasa en diferentes partes de la distribución.

El cuadro 13.3 muestra algunas ordenadas de Lorenz, así como la diferencia entre dichas ordenadas para los años inicial y final. Ciertamente, mirando los dos años extremos la desigualdad se ha

CUADRO 13.3: **Curvas de Lorenz. España**
(porcentaje)

Porcentaje de población	Ordenadas de Lorenz				Dominancia 1973/74 -2003
	1973-1974	1980-1981	1990-1991	2003	
5	0,99	0,96	1,13	1,52	0,54
10	2,56	2,58	2,96	3,66	1,11
15	4,49	4,59	5,19	6,18	1,68
20	6,74	6,92	7,74	8,95	2,21
25	9,28	9,54	10,56	11,97	2,69
30	12,10	12,43	13,63	15,20	3,11
35	15,19	15,60	16,93	18,67	3,49
40	18,55	19,01	20,48	22,39	3,85
45	22,18	22,71	24,32	26,34	4,16
50	**26,10**	**26,70**	**28,43**	**30,50**	**4,40**
55	30,34	30,98	32,85	34,86	4,53
60	34,91	35,58	37,58	39,54	4,63
65	39,83	40,55	42,64	44,70	4,88
70	45,18	45,93	48,08	50,19	5,01
75	51,01	51,77	53,94	55,98	4,97
80	57,42	58,20	60,30	62,30	4,89
85	64,56	65,39	67,35	69,28	4,72
90	72,73	73,61	75,35	77,21	4,48
95	82,70	83,56	84,96	86,35	3,66

Fuente: Elaboración propia a partir de EPF 1973/74, 1980/81, 1990/91 y ECPF (fichero longitudinal) 2003.

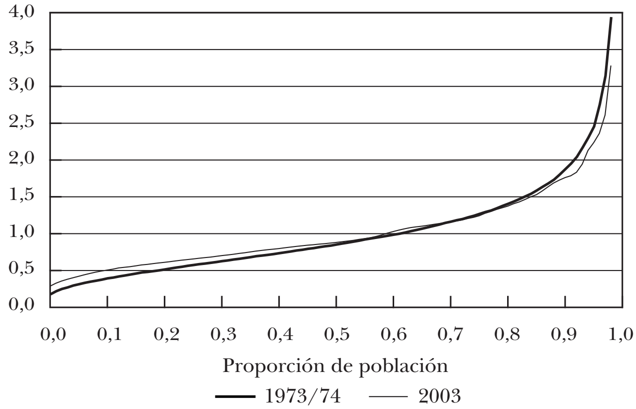
reducido en todos los tramos de la distribución, ya que la curva de Lorenz de 2003 se encuentra totalmente dentro de la de 1973/74. En consecuencia, podemos decir de forma inequívoca que, en los treinta años considerados, la desigualdad se ha reducido. Cualquier índice que satisfaga las propiedades (1.1) a (1.6) nos conducirá al mismo resultado.

Esta reducción de la desigualdad no se ha producido de forma uniforme, ni siquiera es universalmente válida en todos los subperiodos. Así, por ejemplo, es posible observar un ligero empeoramiento en la cola inferior de la distribución entre 1973/74 y 1980/81. Los cuadros A.7.2 a A.7.18 reproducen estos mismos resultados para cada comunidad autónoma y permiten observar igualmente una diversidad de situaciones dentro de la tendencia general hacia la reducción de la desigualdad.

Las ordenadas de Lorenz del cuadro 13.3 nos proporcionan mucha información adicional. Así, la diferencia de ordenadas consecutivas nos indica el porcentaje de renta del que disfruta cada tramo de población, una vez ha sido ordenada esta de forma no decreciente de acuerdo con su renta. Mientras que en 1973/74 el 10% de la población más pobre disfrutaba solo del 2,6% del total de renta, en 2003 dicho porcentaje se había elevado hasta el 3,7%. En el otro extremo, el 10% de población más rico se repartía en 1973/74 el 27,3% de la renta, mientras que en 2003 dicho porcentaje había disminuido hasta el 22,8%. Sin acudir a valores tan extremos en la distribución, podemos observar cómo el 75% de la población más pobre disfrutaba del 51,0% de renta en 1973/74 y del 56,0% en 2003. Así pues, las mejoras en la distribución parecen tener una tendencia hacia la igualdad, pero todavía quedaría un largo camino por recorrer si el objetivo fuera una distribución totalmente igualitaria (lo que, como ya hemos mencionado, no tiene porqué ser un objetivo deseable).

Alternativamente podemos examinar algunos percentiles seleccionados de la distribución de la renta relativa, y_i/μ, para abstraernos de esta forma del crecimiento. La función percentil para los años extremos podemos observarla en el gráfico 13.3. Recordemos que el área bajo esta función es la media de la distribución, que al estar normalizada es uno en ambos casos. De esta forma, mejoras en la distribución se manifiestan en desplazamientos

GRÁFICO 13.3: Función percentil: renta relativa. España



Fuente: Elaboración propia a partir de EPF 1973/74, 1980/81, 1990/91 y ECPF (fichero longitudinal) 2003.

hacia arriba para valores de la función inferiores a uno y desplazamientos hacia abajo para valores de la función superiores a la unidad, ya que en esta situación, tanto por debajo como por encima de la media, nos aproximamos a ella. Este es, precisamente, el comportamiento observado en el gráfico 13.3.

Percentiles seleccionados que sustentan el gráfico 13.3, así como los correspondientes a los periodos intermedios, pueden observarse en el cuadro 13.4.[246] Un valor por debajo de 100 nos indica que, en una ordenación no decreciente de la población en función de su renta, esta persona está situada por debajo del promedio, mientras que un valor por encima de 100 nos indica que está situada por encima del promedio. Así el individuo mediano, el que se sitúa justo en el medio de la distribución, disfrutaba en 1973/74 de una renta per cápita un 18,8% inferior a la renta media, mientras que en el 2003 había conseguido reducir la brecha hasta un 15,0% del valor medio. Un análisis de los cambios entre periodos consecutivos muestra que los años setenta generaron escasas mejoras en la distribución de la renta, mientras que los mayores cambios se produjeron en la década de los ochenta.

[246] De nuevo esta información es ofrecida a nivel de comunidades autónomas y de tamaños municipales en el apéndice A.7, lo que muestra, al igual que en el caso de las curvas de Lorenz, la heterogeneidad de situaciones.

CUADRO 13.4: **Percentiles de la distribución relativa. España**

Percentil (porcentaje)	1973-1974	1980-1981	1990-1991	2003	Variación 1973/1974-2003
5	27,1	27,6	32,1	37,8	-10,75
10	35,1	36,7	41,2	47,0	-11,92
15	42,0	43,4	47,8	53,0	-10,98
20	47,6	49,7	53,7	58,0	-10,32
25	53,8	55,2	59,0	62,6	-8,78
30	58,9	60,6	63,6	66,9	-7,99
35	64,4	65,7	68,5	71,8	-7,41
40	69,7	71,0	73,8	76,7	-7,04
45	75,6	77,0	79,5	81,2	-5,68
50	**81,2**	**82,6**	**85,2**	**85,0**	**-3,75**
55	88,0	88,8	91,5	89,9	-1,97
60	94,8	95,6	97,8	98,6	-3,80
65	102,5	103,4	104,8	106,9	-4,43
70	112,1	111,7	112,6	112,7	-0,58
75	121,7	122,3	121,8	119,9	1,86
80	135,1	135,4	133,3	132,8	2,28
85	151,6	153,2	149,0	147,8	3,83
90	177,6	176,9	172,8	170,4	7,21
95	228,0	225,1	214,0	210,8	17,18

Fuente: Elaboración propia a partir de EPF 1973/74, 1980/81, 1990/91 y ECPF (fichero longitudinal) 2003.

Algo que ya ha sido señalado por numerosos autores (Ruiz-Castillo 1987, 1993, 1994, 1998; Del Río y Ruiz-Castillo 1996; Goerlich y Mas 2002, 2004a; Ayala, Jurado y Pedraja 2006).

Podemos examinar, ahora, los índices de desigualdad como una medida resumen de las distribuciones que acabamos de examinar. El cuadro 13.5 muestra algunos de los índices más populares. Si omitimos, de momento, el índice de Atkinson con parámetro de aversión a la desigualdad $\varepsilon = 2$, A_2, observamos que todos los índices indican, de forma unánime, una mejora en la distribución en todos los subperiodos considerados, aunque la magnitud de la reducción es diferente según el índice de que se trate, pero sabemos que esto no debe preocuparnos, porque la ordenación de

CUADRO 13.5: **Índices de desigualdad. España**

Índice	**1973-1974**	**1980-1981**	**1990-1991**	**2003**
Gini	0,356	0,346	0,318	0,286
T	0,230	0,218	0,181	0,139
T^*	0,219	0,211	0,177	0,136
$A_{0.5}$	0,105	0,100	0,084	0,066
A_1	0,197	0,190	0,162	0,127
A_2	0,360	0,373	0,334	0,242

Fuente: Elaboración propia a partir de EPF 1973/74, 1980/81, 1990/91 y ECPF (fichero longitudinal) 2003.

distribuciones de renta es unánime. Si consideramos ahora la evolución de A_2 observamos que este índice, al contrario que el resto, muestra un ligero incremento de la desigualdad entre 1973/74 y 1980/81. Al incrementar ε estamos aumentando nuestra aversión a la desigualdad y, en consecuencia, estamos dando más peso a la cola inferior en la distribución. Como se observa en el cuadro 13.3 la distribución de la renta empeoró ligeramente en este periodo en los percentiles más bajos, el incremento observado en A_2 está recogiendo este empeoramiento, de forma que otorgando un peso suficiente a este tramo de la distribución el índice de desigualdad A_2 nos indica un ligero incremento en la desigualdad. Así pues, incluso valores moderadamente elevados de ε son capaces de captar lo que sucede en los extremos inferiores de la distribución y otorgar más peso a estos extremos que al resto de la distribución.

En resumen, valorado en su conjunto, no solo el crecimiento en los niveles de renta per cápita ha sido sustancial a lo largo de los treinta años considerados, sino que dicho crecimiento ha ido acompañado de una mejora en la distribución de la renta relativa en prácticamente todos los tramos de la distribución. Así pues, podemos estar seguros de que nuestros indicadores de bienestar, que toman en consideración niveles y dispersión, mostrarán una mejora inequívoca en el bienestar. Las experiencias regionales son, sin embargo, diversas y la contribución de las diferentes comunidades autónomas al bienestar agregado también. A estas cuestiones dedicamos el resto del capítulo.

13.4.2. Distribución de la renta: aspectos territoriales

Los índices de desigualdad de Theil, *T*, para las comunidades autónomas y los tamaños municipales considerados se ofrecen en el cuadro 13.6. Puesto que, como ya hemos mencionado en la introducción del capítulo, el análisis del bienestar se centrará en la función de evaluación social *S*-consistente dada por $V^T(\mathbf{y}) = Y\left(1 - T(\mathbf{y})\right)$ relegamos al apéndice A.7 el resto de índices de desigualdad.

Los siguientes comentarios son de interés:

— La mejora en la distribución es generalizada en todas las comunidades autónomas y también en las agrupaciones de municipios. En todos los casos, los índices de Theil, *T*, indican menores niveles de desigualdad en 2003 que en 1973/74. Ello es evidente a partir de la inspección del gráfico 13.4, que muestra los índices en estos dos periodos a partir de una ordenación decreciente en el año inicial.

— Sin embargo, aunque en la década de los ochenta se observa una importante mejora en la distribución, a nivel nacional, algunas comunidades autónomas experimentan incrementos en la desigualdad, por ejemplo, Comunidad de Madrid, Región de Murcia, País Vasco o La Rioja y, en menor medida, Cantabria. Todos estos empeoramientos parecen temporales y la década de los noventa y principios del siglo XXI parecen mostrar una vuelta a la tendencia en las mejoras distributivas.

— En términos de mejoras en la distribución, y atendiendo al conjunto del periodo, destacan las comunidades de Castilla y León, Castilla-La Mancha, Extremadura, Galicia y Región de Murcia. Todas ellas han recibido importantes ayudas públicas para el desarrollo regional, lo que parece haber sido aprovechado no solo para acercarse a los niveles de renta per cápita del promedio nacional, sino también para mejorar su distribución interna. A estas comunidades le sigue de cerca el Principado de Asturias, comunidad en la que la distribución muestra una fuerte dependencia de los procesos de transferencias del sector público.

CUADRO 13.6: **Desigualdad. Índices de Theil, *T***

Comunidades autónomas	**1973-1974**	**1980-1981**	**1990-1991**	**2003**
	(índice)			
Andalucía	0,227	0,204	0,178	0,137
Aragón	0,231	0,198	0,137	0,143
Asturias, P. de	0,188	0,179	0,107	0,093
Balears, Illes	0,134	0,197	0,154	0,114
Canarias	0,219	0,220	0,182	0,166
Cantabria	0,153	0,155	0,160	0,132
Castilla y León	0,296	0,199	0,170	0,127
C.-La Mancha	0,220	0,180	0,153	0,111
Cataluña	0,153	0,218	0,149	0,124
C. Valenciana	0,170	0,160	0,135	0,132
Extremadura	0,254	0,200	0,175	0,134
Galicia	0,242	0,229	0,165	0,132
Madrid, C. de	0,235	0,211	0,230	0,148
Murcia, R. de	0,244	0,165	0,196	0,133
Navarra, C.F. de	0,172	0,187	0,122	0,110
País Vasco	0,192	0,128	0,180	0,112
Rioja, La	0,189	0,120	0,191	0,132
España	**0,230**	**0,218**	**0,181**	**0,139**
Municipios[1]				
Pequeños	0,216	0,260	0,160	0,118
Medianos	0,187	0,169	0,164	0,118
Grandes	0,215	0,189	0,186	0,149

CUADRO 13.6 *(cont.)*: **Desigualdad. Índices de Theil, *T***

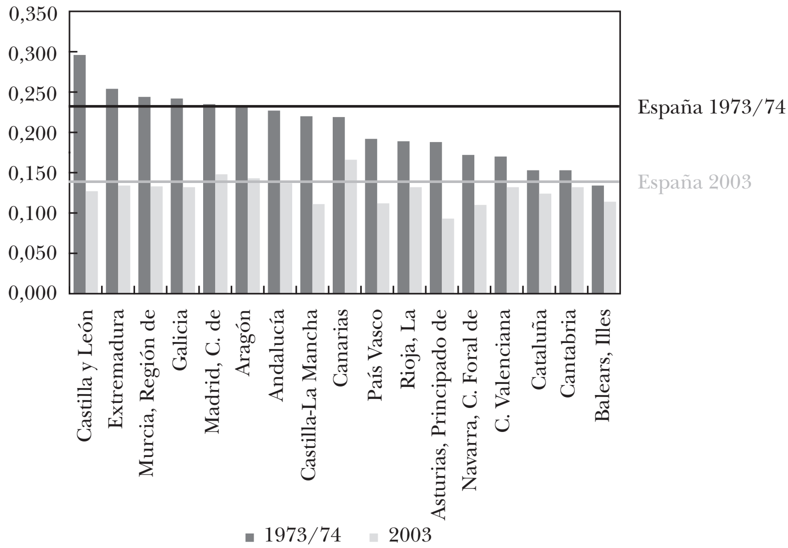
Comunidades autónomas	1973-1974	1980-1981	1990-1991	2003
	(España = 100)			
Andalucía	98,77	93,51	98,05	98,18
Aragón	100,28	90,97	75,41	103,19
Asturias, P. de	81,88	82,33	58,72	66,89
Balears, Illes	58,44	90,47	84,76	81,78
Canarias	95,43	101,12	100,39	119,46
Cantabria	66,36	71,12	88,04	94,80
Castilla y León	128,61	91,57	93,72	91,03
C.-La Mancha	95,65	82,62	84,30	80,02
Cataluña	66,53	100,23	82,19	88,96
C. Valenciana	74,02	73,57	74,42	94,84
Extremadura	110,38	91,78	96,53	96,07
Galicia	105,33	105,04	90,70	95,05
Madrid, C. de	102,41	97,03	126,77	106,48
Murcia, R. de	106,08	75,82	108,22	95,55
Navarra, C.F. de	74,72	85,69	67,47	79,01
País Vasco	83,38	58,71	99,27	80,89
Rioja, La	82,15	55,13	105,27	95,12
España	**100,00**	**100,00**	**100,00**	**100,00**
Municipios[1]				
Pequeños	93,87	119,54	88,19	84,72
Medianos	81,54	77,49	90,13	84,79
Grandes	93,54	86,98	102,67	107,06

CUADRO 13.6 *(cont.)*: **Desigualdad. Índices de Theil, *T***

Comunidades autónomas	1973-1974	1980-1981	1990-1991	2003
	(España = 100 en 1973-1974)			
Andalucía	98,77	88,58	77,39	59,37
Aragón	100,28	86,17	59,51	62,40
Asturias, P. de	81,88	77,99	46,35	40,45
Balears, Illes	58,44	85,70	66,89	49,46
Canarias	95,43	95,79	79,23	72,24
Cantabria	66,36	67,37	69,48	57,33
Castilla y León	128,61	86,74	73,97	55,05
C.-La Mancha	95,65	78,26	66,53	48,39
Cataluña	66,53	94,95	64,86	53,80
C. Valenciana	74,02	69,70	58,73	57,35
Extremadura	110,38	86,94	76,18	58,01
Galicia	105,33	99,50	71,58	57,48
Madrid, C. de	102,41	91,91	100,05	64,39
Murcia, R. de	106,08	71,82	85,41	57,79
Navarra, C.F. de	74,72	81,17	53,25	47,83
País Vasco	83,38	55,61	78,34	48,92
Rioja, La	82,15	52,22	83,08	57,53
España	**100,00**	**94,73**	**78,92**	**60,47**
Municipios[1]				
Pequeños	93,87	113,24	69,60	51,23
Medianos	81,54	73,40	71,14	51,28
Grandes	93,54	82,40	81,03	64,75

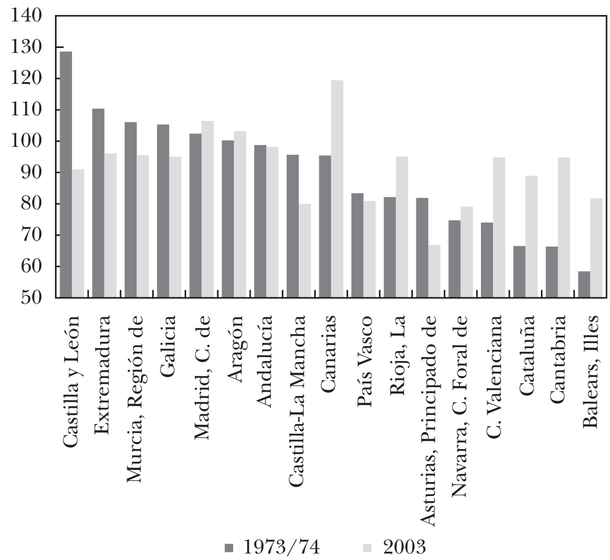
[1] Pequeños: municipios de hasta 10.000 habitantes; medianos: de 10.001 hasta 50.000 habitantes (excepto capitales de provincia); y grandes: de más de 50.000 habitantes.
Fuente: Elaboración propia a partir de EPF 1973/74, 1980/81, 1990/91 y ECPF (fichero longitudinal) 2003.

GRÁFICO 13.4: Índices de Theil, *T*



Fuente: Elaboración propia a partir de EPF 1973/74, 1980/81, 1990/91 y ECPF (fichero longitudinal) 2003.

GRAFICO 13.5: Índices de Theil relativos, *T*



Fuente: Elaboración propia a partir de EPF 1973/74, 1980/81, 1990/91 y ECPF (fichero longitudinal) 2003.

— Si nos centramos en las posiciones relativas de las comunidades autónomas, ilustradas en el gráfico 13.5, podemos observar cómo las importantes mejoras de Castilla y León, Extremadura, Región de Murcia y Galicia han situado a estas comunidades en niveles de desigualdad desde valores por encima de la media nacional en 1973/74 hasta valores por debajo en 2003. La situación contraria se observa en Canarias que, aunque reduce su índice de desigualdad a lo largo del periodo, muestra niveles superiores a la media en 2003, aun partiendo de niveles algo inferiores en 1973/74.
— Desde una perspectiva global, el gráfico 13.5 indica una cierta convergencia relativa en los niveles de desigualdad de las comunidades autónomas conducido por las comunidades situadas en los extremos. Un proceso ya señalado por otros autores (Goerlich y Mas 2004b; Ayala, Jurado y Pedraja 2006).
— Desde una perspectiva temporal, si tomamos la distribución de España en 1973/74 como referencia, todas las comunidades presentaban una distribución más igualitaria una década más tarde, situación que parece totalmente consolidada, salvo una observación puntual para Madrid en 1990/91.
— La tendencia a la reducción de la desigualdad es también evidente en la clasificación por tamaños municipales, salvo por el gran aumento del índice observado en 1980/81 para los municipios más pequeños. Las dificultades del mundo rural antes de las ayudas públicas a las comunidades más desfavorecidas, con abundancia de pequeños municipios, puede estar detrás de esta observación.

En resumen, aunque las experiencias de las comunidades autónomas no son totalmente coincidentes, ni los periodos temporales homogéneos en cuanto a su evolución, la tendencia hacia una mejor distribución de la renta es evidente, con una menor reducción de la desigualdad en el primer periodo analizado. Así pues no solo crecemos, sino que dicho crecimiento se traduce en una distribución más igualitaria.

13.4.3. Algunos resultados sobre descomponibilidad

Antes de analizar de forma conjunta niveles y dispersión resulta interesante examinar que parte de la desigualdad observada puede ser atribuida a las desigualdades entre las diferentes comunidades autónomas o ámbitos de desarrollo urbano (tamaños municipales).

Es sabido que las políticas regionales tienen, entre uno de sus objetivos prioritarios, la nivelación de las rentas per cápita entre los diferentes territorios, básicamente creando las condiciones para que aquellas regiones menos favorecidas sean capaces de alcanzar a las de mayores niveles de renta. La pregunta que aparece rápidamente es pues: si lográramos la plena convergencia regional, entendida como desigualdad cero en niveles de renta per cápita entre comunidades autónomas, ¿podemos asegurar que esta igualdad regional se traducirá también en una igualdad en la distribución personal dentro de cada comunidad?.

La respuesta, a nivel regional, la proporciona el cuadro 13.7 aplicando la fórmula de descomposición del índice de Theil, T, (3.29). Los resultados no pueden ser más reveladores.

— El componente intergrupos, que no es más que el índice de Theil, T, aplicado a los valores medios de cada comunidad autónoma, nos muestra el continuado proceso de convergencia regional que mencionábamos anteriormente en este capítulo, y nos indica cómo dicha convergencia tuvo lugar fundamentalmente en la década de los ochenta, y fue escasa en la década de los setenta, pero en modo alguno parece haberse acabado.

— En cualquier caso, el porcentaje de desigualdad que es capaz de explicar el componente intergrupos es escaso, un 10,4% al principio del periodo y un reducido 5,8% al final del mismo. Si tomáramos estas cifras en un sentido literal, la desaparición de las desigualdades regionales solo conseguiría reducir la desigualdad observada actualmente en un escaso 5,8%. Definitivamente, la desigualdad está en los individuos y no en los territorios.

— Esta conclusión tiene importantes implicaciones de política económica, ya que las ayudas para mejorar la distribución

CUADRO 13.7: **Descomposición del índice de Theil, *T*. Comunidades autónomas**

	1973-1974	1980-1981	1990-1991	2003
España	0,230	0,218	0,181	0,139
Componente intergrupos	0,024	0,022	0,012	0,008
Porcentaje	(10,36)	(10,08)	(6,76)	(5,77)
Componente intragrupos	0,206	0,196	0,169	0,131
Porcentaje	(89,64)	(89,92)	(93,24)	(94,23)
Contribución por comunidades autónomas al componente intragrupos (porcentaje)				
Andalucía	14,21	13,59	14,83	15,79
Aragón	3,99	3,32	2,68	3,27
Asturias, Principado de	2,75	3,01	1,96	1,96
Balears, Illes	1,35	2,02	1,87	2,27
Canarias	3,67	3,36	3,68	4,63
Cantabria	0,93	1,09	1,32	1,18
Castilla y León	8,67	6,51	6,67	5,81
Castilla-La Mancha	3,92	2,96	3,58	3,25
Cataluña	15,16	22,65	16,57	17,07
C. Valenciana	7,35	7,92	7,39	11,15
Extremadura	2,80	1,86	2,26	2,15
Galicia	6,74	7,07	6,37	5,98
Madrid, C. de	17,45	16,36	19,45	16,35
Murcia, Región de	2,48	1,79	2,68	2,34
Navarra, C. Foral de	1,19	1,58	1,10	1,37
País Vasco	6,68	4,47	6,68	4,74
Rioja, La	0,66	0,43	0,90	0,68

Fuente: Elaboración propia a partir de EPF 1973/74, 1980/81, 1990/91 y ECPF (fichero longitudinal) 2003.

de la renta en España no tendrán éxito si se articulan mediante una política genérica (no finalista) de transferencias de las comunidades ricas a las comunidades pobres. Dichas transferencias pueden ser útiles para otros fines, pero no para la consecución de una distribución más igualitaria. Solo si estas transferencias consiguen afectar a las causas que generan la desigualdad interna de las regiones cabe esperar que se alcance el efecto deseado.

— Analizando la contribución porcentual de cada comunidad autónoma al componente intragrupos de la descomposición, observamos que dicho componente está dominado por tres comunidades, Andalucía, Cataluña y Comunidad de Madrid. Entre ellas se explica alrededor del 50% de la variación de dicho componente.

En este sentido es posible que el proceso de convergencia lo que haya provocado sea un mayor grado de solapamiento entre las distribuciones de las comunidades autónomas, de forma que, si seleccionáramos un individuo al azar de la sociedad española, sería más difícil conocer su comunidad de residencia, conociendo solamente su renta, en la actualidad que hace treinta años. Como examinamos con detalle, en el capítulo 7, esta cuestión no puede ser analizada con la descomposición de los índices de Theil, pero el componente residual en la descomposición del índice de Gini, (7.5), puede jugar su papel aquí. Dicho componente representa más de un 50% de la desigualdad observada en términos del índice de Gini en todos los años analizados, lo que muestra el alto grado de solapamiento entre las distribuciones, pero se observa además una tendencia creciente, pasando de representar un 56,4% en 1973/74 (sobre un índice global de Gini de 0,356) a un 65,2% en 2003 (sobre un índice global de Gini de 0,286). Claramente la convergencia regional ha ido acompañada de un proceso de solapamiento de las distribuciones entre las comunidades autónomas.

El cuadro 13.8 muestra los mismos resultados para los tamaños municipales con similares conclusiones. La convergencia entre las rentas per cápita por tamaños municipales, como *proxy* del grado de urbanización, que señalábamos a la luz del gráfico 13.2, tiene ahora una cuantificación en términos del componente intergru-

CUADRO 13.8: **Descomposición del índice de Theil, *T*. Municipios**

	1973-1974	**1980-1981**	**1990-1991**	**2003**
España	0,230	0,218	0,181	0,139
Componente intergrupos	0,020	0,016	0,006	0,004
Porcentaje	(8,89)	(7,17)	(3,22)	(3,07)
Componente intragrupos	0,209	0,202	0,176	0,135
Porcentaje	(91,11)	(92,83)	(96,78)	(96,93)
Contribución por tamaño municipal[1] al componente intragrupos (porcentaje)				
Pequeños	24,81	30,27	20,20	19,26
Medianos	18,69	15,88	19,93	20,46
Grandes	56,49	53,85	59,87	60,28

[1] Pequeños: municipios de hasta 10.000 habitantes; medianos: de 10.001 hasta 50.000 habitantes (excepto capitales de provincia); y grandes: de más de 50.000 habitantes.
Fuente: Elaboración propia a partir de EPF 1973/74, 1980/81, 1990/91 y ECPF (fichero longitudinal) 2003.

pos de la descomposición del índice de Theil. Las desigualdades vuelven a estar en los individuos y no en el tipo de municipio en el que habitan. Esto es especialmente cierto a final del periodo de análisis, en el que tan solo algo más del 3% de la desigualdad es explicada por el componente intergrupos. Por su parte, la evolución del componente intragrupos está totalmente dominada por lo que sucede en las grandes ciudades (municipios de más de 50.000 habitantes).[247]

13.5. Evolución del bienestar per cápita

Con la información mostrada en los epígrafes anteriores estamos ahora en condiciones de examinar la evolución del bienestar per cápita a lo largo de todo el periodo considerado. El cuadro 13.9

[247] Recuérdese que las ponderaciones del componente intragrupos en la descomposición de *T*, (6.4), están constituidas por las proporciones de renta de cada uno de los grupos, por tanto cuando uno de los grupos domina al resto en términos de actividad económica (como es el caso de los municipios considerados), su evolución condiciona totalmente la evolución del componente intragrupos en (6.4).

CUADRO 13.9: Bienestar per cápita. Índices de Theil, *T*

Comunidades autónomas	1973-1974	1980-1981	1990-1991	2003	Porcentaje de variación 1973/1974-2003
	(Euros de 2001)				
Andalucía	1.981	2.305	3.081	4.163	110,2
Aragón	2.825	3.164	4.370	5.015	77,5
Asturias, P. de	2.775	3.408	4.566	5.665	104,1
Balears, Illes	3.576	3.506	4.737	5.985	67,4
Canarias	2.611	2.432	3.480	3.945	51,1
Cantabria	2.686	3.261	4.095	4.524	68,4
Castilla y León	1.983	2.837	3.893	5.124	158,4
C.-La Mancha	2.106	2.284	3.605	4.506	114,0
Cataluña	3.721	3.798	4.931	5.748	54,5
C. Valenciana	2.686	3.159	3.882	5.274	96,4
Extremadura	1.877	1.949	2.940	4.137	120,4
Galicia	2.008	2.357	3.581	4.536	125,9
Madrid, C. de	3.341	3.647	4.144	5.223	56,3
Murcia, R. de	2.243	2.661	3.310	3.822	70,4
Navarra, C.F. de	2.990	3.786	4.749	6.129	105,0
País Vasco	3.368	3.976	4.448	5.604	66,4
Rioja, La	2.943	3.471	4.633	4.899	66,5
España	**2.628**	**2.969**	**3.884**	**4.910**	**86,9**
Municipios[1]					
Pequeños	2.047	2.235	3.471	4.419	115,9
Medianos	2.495	2.770	3.622	4.748	90,3
Grandes	3.253	3.625	4.265	5.286	62,5

CUADRO 13.9 *(cont.)*: **Bienestar per cápita. Índices de Theil, *T***

Comunidades autónomas	**1973-1974**	**1980-1981**	**1990-1991**	**2003**
	(España = 100)			
Andalucía	75,38	77,61	79,31	84,78
Aragón	107,49	106,57	112,51	102,12
Asturias, P. de	105,62	114,76	117,55	115,36
Balears, Illes	136,09	118,05	121,96	121,88
Canarias	99,36	81,90	89,59	80,33
Cantabria	102,24	109,81	105,41	92,13
Castilla y León	75,48	95,53	100,22	104,36
C.-La Mancha	80,14	76,90	92,82	91,77
Cataluña	141,62	127,89	126,95	117,06
C. Valenciana	102,20	106,38	99,95	107,41
Extremadura	71,43	65,64	75,68	84,24
Galicia	76,40	79,38	92,19	92,37
Madrid, C. de	127,14	122,81	106,68	106,37
Murcia, R. de	85,36	89,62	85,22	77,83
Navarra, C.F. de	113,77	127,49	122,26	124,82
País Vasco	128,19	133,89	114,52	114,13
Rioja, La	112,01	116,89	119,28	99,78
España	**100,00**	**100,00**	**100,00**	**100,00**
Municipios[1]				
Pequeños	77,89	75,26	89,35	89,99
Medianos	94,96	93,27	93,24	96,68
Grandes	123,80	122,06	109,80	107,64

CUADRO 13.9 *(cont.)*: **Bienestar per cápita. Índices de Theil, *T***

Comunidades autónomas	**1973-1974**	**1980-1981**	**1990-1991**	**2003**
	(España = 100 en 1973-1974)			
Andalucía	75,38	87,71	117,24	158,43
Aragón	107,49	120,43	166,33	190,85
Asturias, P. de	105,62	129,70	173,77	215,58
Balears, Illes	136,09	133,41	180,30	227,77
Canarias	99,36	92,56	132,43	150,13
Cantabria	102,24	124,09	155,83	172,17
Castilla y León	75,48	107,96	148,15	195,02
C.-La Mancha	80,14	86,91	137,21	171,49
Cataluña	141,62	144,53	187,66	218,75
C. Valenciana	102,20	120,22	147,75	200,72
Extremadura	71,43	74,17	111,88	157,43
Galicia	76,40	89,71	136,28	172,63
Madrid, C. de	127,14	138,79	157,70	198,78
Murcia, R. de	85,36	101,28	125,98	145,45
Navarra, C. F. de	113,77	144,07	180,73	233,26
País Vasco	128,19	151,31	169,30	213,29
Rioja, La	112,01	132,01	176,33	186,46
España	**100,00**	**113,01**	**147,83**	**186,88**
Municipios[1]				
Pequeños	77,89	85,05	132,09	168,16
Medianos	94,96	105,41	137,84	180,68
Grandes	123,80	137,94	162,32	201,16

[1] Pequeños: municipios de hasta 10.000 habitantes; medianos: de 10.001 hasta 50.000 habitantes (excepto capitales de provincia); y grandes: de más de 50.000 habitantes.

Fuente: Elaboración propia a partir de EPF 1973/74, 1980/81, 1990/91 y ECPF (fichero longitudinal) 2003.

ofrece la información equivalente al cuadro 13.2 pero ahora en términos de bienestar, medido este a través de la función de evaluación social

$$V^{T}(\mathbf{y}) = Y\left(1 - T(\mathbf{y})\right)$$

Aunque lógicamente los niveles se ven amortiguados por la pérdida de bienestar atribuida a la desigualdad, las variaciones se ven amplificadas por la evolución favorable conjunta de los dos factores que estamos considerando, el crecimiento en la renta y la mejora en la distribución. A nivel agregado, España muestra un crecimiento pronunciado del 86,9% durante todo el periodo. En términos de tasa anual acumulativa el crecimiento se sitúa en un 2,1%, algo superior al 1,7%, en términos de renta que se deriva del cuadro 13.2. Sin duda, el periodo de mayor crecimiento es la década de los ochenta, con un 2,7% anual acumulativo, superior en casi un punto porcentual al crecimiento de la década de los setenta, un 1,8%, y del periodo más reciente, un 1,9%.

Esta evolución temporal que presenta España en su conjunto se repite en lo fundamental en las comunidades autónomas, y también en los tamaños municipales, si bien se observan comportamientos claramente diferenciados entre comunidades y por periodos.

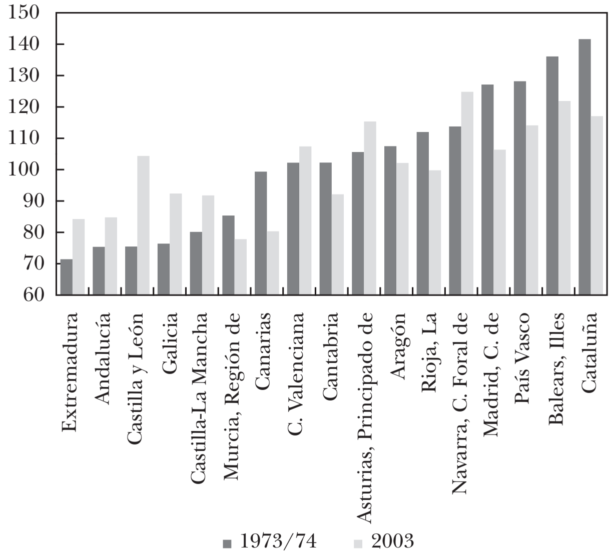
Los siguientes aspectos merecen ser destacados:

- A grandes rasgos podemos identificar cuatro grupos de comunidades autónomas:
  1) Comunidades con un crecimiento del bienestar per cápita muy superior a la media nacional, más de 20 puntos porcentuales de diferencia. Son, por este orden, Castilla y León, Galicia, Extremadura, Castilla-La Mancha y Andalucía. Se trata de las comunidades con menor bienestar per cápita inicial, lo que sugiere de nuevo cierto proceso de convergencia.
  2) Comunidades con un crecimiento del bienestar per cápita algo mayor que la media nacional, hasta 20 puntos porcentuales de diferencia. Son, por orden de mayor a menor crecimiento, la Comunidad Foral de Navarra, Principado de Asturias y Comunitat Valenciana.

3) Comunidades con un crecimiento del bienestar per cápita algo menor que la media nacional, hasta 20 puntos porcentuales negativos de diferencia. Son, en orden decreciente, Aragón, Región de Murcia, Cantabria e Illes Balears.
4) Comunidades con un crecimiento del bienestar per cápita muy inferior a la media nacional, más de 20 puntos porcentuales negativos de diferencia. Son, por este orden, La Rioja, País Vasco, Comunidad de Madrid, Cataluña y Canarias. Entre ellas encontramos las comunidades con mayor bienestar per cápita inicial, lo que apunta de nuevo al proceso de convergencia.

- El gráfico 13.6 muestra la posición relativa de las comunidades autónomas en términos de bienestar per cápita a partir de la ordenación creciente de comunidades según su ranking en 1973/74. Este gráfico es idéntico al 13.2, pero ahora en términos de bienestar. Aunque las tendencias generales en ambos gráficos son las mismas, podemos constatar ciertas diferencias. La ordenación de comunidades en 1973/74 no es exactamente la misma. La peor distribución relativa de Castilla y León en 1973/74 provoca su pérdida de posiciones en el ranking inicial, mientras que la mejor distribución relativa de Illes Balears le hace ganar posiciones. Las mejoras relativas de las comunidades con menos bienestar y las pérdidas relativas de las comunidades con mayor bienestar, al principio del periodo, son ahora más evidentes, lo que muestra que el proceso de convergencia que hemos mencionado de forma repetida es más intenso en términos de bienestar que en términos de ingreso monetario. Así pues, la evolución en la distribución parece haber jugado en la dirección de favorecer la convergencia.
- Dentro de esta tendencia general destacan los comportamientos negativos de la Región de Murcia, fundamentalmente por la evolución de su renta per cápita, y Canarias, por el comportamiento de ambos componentes. Tampoco Cantabria muestra una evolución favorable como consecuencia fundamentalmente de los aspectos distributivos unidos a su estancamiento relativo en términos de renta.

GRAFICO 13.6: Bienestar per cápita relativo. Comunidades autónomas



Fuente: Elaboración propia a partir de EPF 1973/74, 1980/81, 1990/91 y ECPF (fichero longitudinal) 2003.

- Por el contrario, destacan los comportamientos positivos de la Comunitat Valenciana, Asturias y sobre todo la Comunidad Foral de Navarra que, partiendo de valores por encima del promedio en 1973/74, tienden a separarse todavía más de los valores medios al final del periodo.
- En todo caso es importante advertir que el proceso no ha sido uniforme durante todo el periodo considerado, ya que la mayor parte de comunidades experimentan subidas y bajadas en su posición respecto a la media nacional, tal y como se desprende de los datos del cuadro 13.9.
- El proceso de convergencia en bienestar mencionado, a nivel de comunidad autónoma, es también evidente cuando centramos nuestra atención en los tamaños municipales considerados.

Podemos ahora preguntarnos por el papel que ha jugado el incremento promedio en las rentas de los individuos y el cambio en la distribución en la evolución observada del bienestar per cápita. Para abordar esta cuestión comenzaremos por analizar cuál ha sido la pérdida de bienestar debida a la desigual distribución de la renta, medida como porcentaje del bienestar total. Esta medida nos dice cuál sería el porcentaje de aumento en el bienestar que se produciría si no hubiera desigualdad en el interior de cada una de las comunidades autónomas.

Recordemos que esta pérdida viene dada por

$$z_{V^T}(\mathbf{y}) = \frac{T(\mathbf{y})}{1 - T(\mathbf{y})}$$

y se ofrece en el cuadro 13.10 lo que nos permite observar cómo este indicador expande las diferencias observadas en el índice de Theil, T, mostrado en el cuadro 13.6.

Resulta natural, pues, apreciar comportamientos diferenciados, tanto por periodos como por comunidades autónomas. A nivel nacional, las magnitudes de pérdida relativa de bienestar se reducen desde un 29,9% en 1973/74 hasta un 16,1% en 2003, pero casi todas las ganancias tienen lugar en las dos últimas décadas. Desde el punto de vista regional, podemos observar comportamientos bastante diferenciados, desde la modesta ganancia de Illes Balears, cuyo porcentaje de reducción no alcanza los 3 puntos porcentuales, pero que se sitúa en uno de los niveles más bajos de pérdida porcentual en el bienestar debida a la desigualdad en 2003; hasta la importante ganancia de Castilla y León, que pasa de una pérdida porcentual del 42,0% en 1973/74 hasta un escaso 14,5% en 2003, lo que muestra una evolución muy positiva en la distribución de la renta.

Finalmente, la descomponibilidad aditiva de $T(\mathbf{y})$ puede ser aprovechada para calcular la pérdida porcentual de bienestar debida a la desigualdad entre comunidades autónomas o municipios agrupados por su tamaño. Simplemente, a partir de la descomposición (7.4), $T(\mathbf{y}) = T_W + T_B$, podemos calcular la pérdida porcentual de bienestar debida a la desigualdad intergrupos como $(T_B)/[1 - T(\mathbf{y})]$. Los resultados de este ejercicio, tanto para comunidades autónomas como para tamaños municipales, se muestran en el cuadro 13.11. Obtenemos así, por otra vía, los resultados ya mencionados anteriormente y que aparecen sistemáticamente en todos los estudios sobre desigualdad. La desigualdad agregada se debe, en su mayor parte, a la desigualdad observada dentro de los

CUADRO 13.10: **Pérdida porcentual de bienestar debida a la desigualdad. Índices de Theil, *T***

Comunidades autónomas	**1973-1974**	**1980-1981**	**1990-1991**	**2003**
Andalucía	29,4	25,6	21,6	15,8
Aragón	30,0	24,7	15,9	16,7
Asturias, P. de	23,2	21,8	11,9	10,3
Balears, Illes	15,5	24,5	18,2	12,8
Canarias	28,1	28,2	22,3	19,9
Cantabria	18,0	18,3	19,0	15,2
Castilla y León	42,0	24,9	20,5	14,5
C.-La Mancha	28,2	21,9	18,1	12,5
Cataluña	18,1	27,9	17,5	14,1
C. Valenciana	20,5	19,1	15,6	15,2
Extremadura	34,0	25,0	21,2	15,4
Galicia	32,0	29,7	19,7	15,2
Madrid, C. de	30,8	26,8	29,9	17,4
Murcia, R. de	32,3	19,8	24,4	15,3
Navarra, C. F. de	20,7	22,9	13,9	12,4
País Vasco	23,7	14,7	22,0	12,7
Rioja, La	23,3	13,6	23,6	15,2
España	**29,9**	**27,8**	**22,2**	**16,1**
Municipios[1]				
Pequeños	27,5	35,2	19,1	13,4
Medianos	23,1	20,3	19,6	13,4
Grandes	27,4	23,4	22,9	17,5

CUADRO 13.10 *(cont.)*: **Pérdida porcentual de bienestar debida a la desigualdad. Índices de Theil, *T***

Comunidades autónomas	**1973-1974**	**1980-1981**	**1990-1991**	**2003**
	(España = 100)			
Andalucía	98,41	91,85	97,63	97,89
Aragón	100,37	88,74	71,51	103,72
Asturias, P. de	77,68	78,47	53,80	63,50
Balears, Illes	51,99	88,13	81,98	79,44
Canarias	94,15	101,43	100,48	123,34
Cantabria	60,30	65,82	85,77	94,01
Castilla y León	140,62	89,47	92,44	89,73
C.-La Mancha	94,42	78,81	81,47	77,52
Cataluña	60,49	100,29	79,07	87,40
C. Valenciana	68,69	68,53	70,42	94,05
Extremadura	113,91	89,73	95,79	95,47
Galicia	107,04	106,54	88,86	94,30
Madrid, C. de	103,16	96,23	134,77	107,61
Murcia, R. de	108,04	71,04	110,23	94,87
Navarra, C.F. de	69,48	82,41	62,93	76,52
País Vasco	79,44	52,65	99,11	78,47
Rioja, La	77,99	49,01	106,51	94,38
España	**100,00**	**100,00**	**100,00**	**100,00**
Municipios[1]				
Pequeños	92,18	126,41	85,95	82,67
Medianos	77,28	72,92	88,21	82,76
Grandes	91,77	83,94	103,28	108,30

[1] Pequeños: municipios de hasta 10.000 habitantes; medianos: de 10.001 hasta 50.000 habitantes (excepto capitales de provincia); y grandes: de más de 50.000 habitantes.

Fuente: Elaboración propia a partir de EPF 1973/74, 1980/81, 1990/91 y ECPF (fichero longitudinal) 2003.

CUADRO 13.11: **Pérdida porcentual de bienestar debida a la desigualdad intergrupos. Índices de Theil, *T***
(porcentaje)

	1973-1974	1980-1981	1990-1991	2003
Comunidades autónomas	3,1	2,8	1,5	0,9
Municipios	2,7	2,0	0,7	0,5

Fuente: Elaboración propia a partir de EPF 1973/74, 1980/81, 1990/91 y ECPF (fichero longitudinal) 2003.

grupos, ya sea comunidades autónomas o municipios clasificados según su tamaño. La pérdida relativa de bienestar debida a la desigualdad intergrupos es de muy reducida cuantía y ha experimentado una tendencia continua y decreciente a lo largo del periodo considerado.

En resumen, aunque con matices, la evolución del bienestar per cápita sigue el patrón marcado por la evolución de la renta per cápita, si bien las mejoras distributivas observadas tienden a reforzar la convergencia interregional en términos de bienestar. Esto es así, en casi todas las comunidades autónomas, con alguna excepción negativa en términos relativos, como la Región de Murcia o Canarias, pero con notables mejoras absolutas en todos los casos. Las mejoras en la distribución, ciertamente han mejorado los resultados alcanzados por los niveles de renta per cápita, pero la evolución de estos niveles (el crecimiento) sigue siendo el principal determinante, en nuestro contexto, de la evolución de bienestar. Esta conclusión debe enmarcarse en un contexto de largo plazo, los treinta años que van desde 1973 hasta 2003, con las consiguientes oscilaciones en periodos de tiempo más cortos.

14. Discriminación de género e igualdad de oportunidades

14.1. Desigualdad de oportunidades y discriminación

Al final del capítulo 10, presentamos una medida agregada de la pérdida de bienestar derivada de la discriminación de rentas entre mujeres y hombres como una sencilla aplicación de la propiedad de descomponibilidad del índice $V^T(\mathbf{y})$. Ya advertimos allí que se trataba de una ilustración que, en realidad, requería más elaboración para poder ser considerada como una medida razonable del impacto de la discriminación de género sobre el bienestar. La razón es que dicha medida ignoraba las diferencias salariales entre hombres y mujeres que se deben, no a motivos de género, sino a características diferenciales de estos grupos de trabajadores: niveles de estudios, experiencia laboral, estatus, etc. Nos ocuparemos, ahora, de esta cuestión aprovechando los desarrollos elaborados en el capítulo 11 en torno a la ideas de desigualdad de renta y de oportunidades. Con objeto de hacer más preciso el análisis, nos centraremos en la discriminación relativa a las rentas salariales. Seguimos aquí la orientación desarrollada en el trabajo de García Pérez y Villar (2006).

Consideremos una sociedad con un número finito de individuos en edad de trabajar, que son heterogéneos con respecto a ciertos aspectos básicos: edad, raza, sexo, educación, estado civil, experiencia profesional, sector en el que trabajan, ocupación, etc. Estos diferentes aspectos pueden agruparse en dos grandes categorías a las que denominaremos *características* y *circunstancias*. Por características entenderemos aquellos aspectos relacionados con la remuneración de los mercados a las diferencias en el capital humano de los trabajadores (educación y experiencia, por ejemplo). Las circunstancias engloban aquellos otros aspectos que pueden considerarse como fuente de discriminación y no reflejan las decisiones libres de los individuos (raza, sexo, origen familiar, etc.). En este contexto diremos que dos individuos son del mismo *tipo* si tienen similares circunstancias y que pertenecen a la misma *categoría de trabajadores* si comparten las mismas características.

La idea obvia, aquí, es hacer jugar a las categorías de trabajadores el papel de los *grupos isoesfuerzo* en el análisis del capítulo 11 y evaluar así el bienestar de la distribución de la renta laboral. Si tomamos hombres y mujeres como los subgrupos poblacionales de referencia y aplicamos la propiedad de descomponibilidad, generamos automáticamente el tipo de indicador de discriminación que buscamos, el cual se corresponde con la pérdida de bienestar asociada a la desigualdad entre hombres y mujeres agregada a través de las diferentes categorías de trabajadores.[248]

Esta forma de medir la discriminación supone considerar que la distribución de la renta es *justa* cuando hombres y mujeres reciben la misma remuneración, dentro de cada categoría de trabajadores. Y, consecuentemente, que las diferencias derivadas de diversas características no deben considerarse como discriminación de género. Ello implica que la elección de las variables que asociamos al *tipo* y aquellas que asociamos a la categoría de trabajadores afectará sustancialmente a nuestra medición de la discriminación.[249]

---

[248] El uso de índices aditivamente descomponibles para medir segregación había sido ya propuesto en Theil y Finizza (1971), Fuchs (1975) y, muy cerca de nuestro planteamiento, en Mora y Ruiz-Castillo (2003a, 2003b, 2004, 2005). Para un análisis econométrico puede verse, por ejemplo, Hernández Martínez (1995) o De la Rica y Ugidos (1995); y para una perspectiva comparada en el contexto europeo Simón (2006).

[249] Un tema de especial relevancia en este contexto es el relativo al tratamiento de empleados y no empleados, donde en *no empleados* incluimos tanto a los desempleados como a los inactivos. Si definimos estos aspectos como *características* de los agentes, estaremos ignorando la desigualdad debida a las diferencias en la participación en el mercado de trabajo, pues estaremos atribuyendo la desigualdad a trabajar o no trabajar y no a motivos de género. Si, por el contrario, consideramos estas variables como definitorias del *tipo*, entonces la pérdida de bienestar estará computando simultáneamente las diferencias salariales y los diferenciales en las tasas de ocupación y actividad. Nosotros consideramos más adecuado este segundo tratamiento porque entendemos que trabajar o no trabajar es más un producto de los condicionantes sociales que una decisión totalmente libre y autónoma de los individuos.

Sea pues $N=\{1,2,\ldots,n\}$ el conjunto de individuos que corresponden a la población asalariada de una cierta sociedad, a los que llamaremos genéricamente *trabajadores*. Los trabajadores pueden clasificarse, agrupando los individuos con iguales circunstancias, en q tipos diferentes, $t = 1,2,\ldots, q$. Podemos adicionalmente distinguir k categorías de trabajadores, $h = 1,2,\ldots, k$, cada una de las cuales agrupa a individuos de similares características: igual formación, experiencia, intensidad de esfuerzo, ocupación laboral, etc. El vector

$$\mathbf{y}^h = \bigcup_{t=1}^{q} \mathbf{y}^{t,h}$$

representa ahora la distribución de la renta en la categoría de trabajadores h, para $h = 1,2,\ldots, k$, donde $\mathbf{y}^{t,h}$ es la distribución de la renta de los trabajadores de tipo t de la categoría h.

La valoración social del bienestar de una distribución de rentas laborales, $\mathbf{y}$, en una sociedad compuesta por k categorías de trabajadores donde no consideramos desigualdad la dispersión de rentas entre las distintas categorías, vendrá dada por,

$$\hat{V}^T(\mathbf{y}) = \sum_{h=1}^{k} V^T(\mathbf{y}^h) = \sum_{h=1}^{k} n_h \mu_h \left(1 - T(\mathbf{y}^h)\right) \tag{14.1}$$

es decir, la suma del bienestar de las diferentes categorías de trabajadores.

Si aplicamos ahora la descomponibilidad considerando los distintos tipos que integran cada categoría de trabajadores, obtendremos, a partir de los desarrollos del capítulo 11, (11.7) y (11.9),

$$\begin{aligned} \hat{V}^T(\mathbf{y}) &= \sum_{h=1}^{k}\sum_{t=1}^{q} V^T(\mathbf{y}^{t,h}) - \sum_{h=1}^{k} V_B^T(\boldsymbol{\mu}^h) \\ &= \sum_{h=1}^{k}\sum_{t=1}^{q} n_{th}.\mu_{th}\left(1 - T(\mathbf{y}^{t,h})\right) - \sum_{h=1}^{k}\sum_{t=1}^{q} n_{th}.\mu_{th} \log \frac{\mu_{th}}{\mu_h} \end{aligned} \tag{14.2}$$

El último término de esta ecuación,

$$D(\mathbf{y}) = \sum_{h=1}^{k}\sum_{t=1}^{q} n_{th}\mu_{th} \log \frac{\mu_{th}}{\mu_h} \tag{14.3}$$

corresponde a la medida de discriminación que buscamos. Identifica la discriminación con la pérdida de bienestar, medida en unidades monetarias, que se deriva de la desigualdad entre tipos.

Esta magnitud viene dada por la suma ponderada de la discriminación de tipos en las diversas categorías de trabajadores, donde las ponderaciones son las rentas de las diversas celdas. Cuando los tipos son sencillamente hombres, *m*, y mujeres, *f*, entonces la expresión anterior adopta la forma particular,

$$D(\mathbf{y}) = \sum_{h=1}^{k} \left(n_{mh} \mu_{mh} \log \frac{\mu_{mh}}{\mu_h} + n_{fh} \mu_{fh} \log \frac{\mu_{fh}}{\mu_h} \right) \qquad (14.4)$$

que constituye una generalización de (10.11) a una sociedad heterogénea.

Para tener una idea de lo que representa esta magnitud podemos recurrir a formularla en términos relativos, es decir,

$$z_{\hat{V}^T}(\mathbf{y}) = \frac{D(\mathbf{y})}{\hat{V}^T(\mathbf{y})} \times 100 \qquad (14.5)$$

que nos da la pérdida porcentual de bienestar debida a la desigualdad de oportunidades.

Por supuesto, si queremos efectuar un análisis que sea independiente del tamaño de la población, con objeto de comparar sociedades con distinto tamaño, podemos tomar la valoración social del bienestar de la distribución de rentas laborales en términos per cápita. De esta forma,

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \hat{V}^T(\mathbf{y}) &= \sum_{h=1}^{k} \frac{n_h}{n} \mu_h \left(1 - T(\mathbf{y}^h)\right) \\ &= \sum_{h=1}^{k} \sum_{t=1}^{q} \frac{n_{th}}{n} . \mu_{th} \left(1 - T(\mathbf{y}^{t,h})\right) \\ &\quad - \sum_{h=1}^{k} \sum_{t=1}^{q} \frac{n_{th}}{n} . \mu_{th} \log \frac{\mu_{th}}{\mu_h} \qquad (14.6) \\ &= \sum_{h=1}^{k} \frac{n_h}{n} \sum_{t=1}^{q} \frac{n_{th}}{n_h} . \mu_{th} \left(1 - T(\mathbf{y}^{t,h})\right) \\ &\quad - \sum_{h=1}^{k} \frac{n_h}{n} \sum_{t=1}^{q} \frac{n_{th}}{n_h} . \mu_{th} \log \frac{\mu_{th}}{\mu_h} \end{aligned}$$

y a partir de aquí obtener la medida de discriminación en términos per cápita,

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}D(\mathbf{y}) &= \sum_{h=1}^{k}\sum_{t=1}^{q}\frac{n_{th}}{n}\mu_{th}\log\frac{\mu_{th}}{\mu_h} \\ &= \sum_{h=1}^{k}\frac{n_h}{n}\sum_{t=1}^{q}\frac{n_{th}}{n_h}\mu_{th}\log\frac{\mu_{th}}{\mu_h}\end{aligned} \tag{14.7}$$

comparable entre sociedades de distinto tamaño poblacional.

En muchas aplicaciones empíricas nos encontraremos con que los únicos datos de que disponemos con respecto a la población de una determinada celda es la renta media, μ_{th}, y la población de dicha celda, n_{th}. En tal caso, debemos suponer que todos los individuos de una celda tienen idéntica renta y, por tanto, la desigualdad en el interior de la celda es nula, $T(\mathbf{y}^{t,h}) = 0$, $\forall t,h$. Obviamente, esta aproximación será menos restrictiva cuanto más fina sea la partición en celdas que efectuemos. En este caso las ecuaciones anteriores pasan a ser,

$$\hat{V}^T(\mathbf{y}) \approx Y - D(\mathbf{y}) \tag{14.2*}$$

y

$$z_{\hat{V}^T}(\mathbf{y}) \approx \frac{D(\mathbf{y})}{Y - D(\mathbf{y})} \times 100 \tag{14.5*}$$

La gran ventaja de estas formulaciones aproximadas es que no necesitamos conocer la distribución completa de la renta, sino que resultan calculables con los datos usuales que ofrecen las estadísticas convencionales. Desde luego si el tamaño de las celdas es muy grande, de modo que la desigualdad dentro de las mismas no sea irrelevante, la aproximación puede resultar muy burda. Por esta razón la aplicación que efectuamos en este capítulo utiliza datos individuales procedentes de una encuesta de salarios.

Dedicamos el resto del capítulo a una aplicación de este modelo al caso del mercado laboral español, a principios del siglo XXI. Para ello utilizamos la Encuesta de Estructura Salarial de 2002 del INE (EES 2002) que, junto con las opciones metodológicas utilizadas, será descrita en el epígrafe siguiente. Además de un análisis a nivel nacional pondremos énfasis en los aspectos regionales. Los epígrafes 14.3 y 14.4 ofrecen un breve panorama de las desigualdades salariales en razón de género atendiendo a diversos criterios de clasificación, así como de la distribución de salarios dentro de cada género. Aunque se trata de resultados, en gran medida conocidos, sirven para enmarcar el análisis relativo a la evaluación del bienestar que sigue a continuación. Finalmente el apéndice A.8 recoge resultados adicionales que pueden resultar de interés.

14.2. Fuentes de información y decisiones metodológicas: la Encuesta de Estructura Salarial de 2002

La fuente de información exclusiva en este capítulo es la EES 2002. La realización de estadísticas sobre estructura y distribución salarial fue una tarea abordada por el INE con la realización de una primera Encuesta de Estructura Salarial en 1995 (EES 1995). La calidad y riqueza informativa derivada de dicha encuesta fue tal que se decidió su continuidad en el marco de la Unión Europea, siendo la de 2002 la segunda disponible. Lamentablemente, ha habido cambios metodológicos sustanciales entre ambas encuestas, no solo en cuanto a determinados criterios de clasificación y ámbito investigado, sino especialmente en lo referente al cálculo de las diferentes ganancias salariales y horas de trabajo, lo que provoca que las comparaciones entre ambas encuestas no sean directas, y que alcanzar un grado aceptable de comparabilidad no esté al alcance de un investigador individual (INE 2004a). Por esta razón hemos decidido utilizar solo la última encuesta disponible, la de 2002, la cual nos hace perder la perspectiva temporal a cambio de utilizar una muestra totalmente homogénea.

Los objetivos fundamentales de las Encuestas de Estructura Salarial se resumen básicamente en dos. Por una parte, se pretende conocer no solo los niveles medios salariales, según diversas variables de clasificación, sino también la distribución de los salarios dentro de determinados grupos. Por otra parte, se pretende conocer la estructura del salario, tanto desde el punto de vista de la composición como de las variables que influyen sobre él, y la cuantía en que lo hacen. Así pues, la EES 2002 constituye un marco ideal para el análisis de la distribución de las ganancias salariales dentro del ámbito poblacional considerado y es muy adecuada para nuestros propósitos, si bien con las limitaciones que mencionaremos más adelante.

Para la consecución de estos objetivos, la EES 2002 dispone de abundante información, tanto de las características individuales del trabajador, como de otras variables que también afectan a su salario y que tienen más relación con la empresa o centro de trabajo en el que se desempeñan sus actividades. En lo que a nosotros concierne destacamos los siguientes aspectos.[250]

El *ámbito geográfico* de la encuesta abarca todo el territorio nacional, dividido en comunidades autónomas y las ciudades autónomas de Ceuta y Melilla consideradas de forma conjunta. Así pues, al igual que en el capítulo anterior, mantendremos el énfasis en los aspectos regionales.

El *ámbito poblacional*, u objeto de la encuesta, está formado por todos los trabajadores por cuenta ajena que presten sus servicios en centros de diez o más trabajadores y que estén empleados en el periodo de referencia de la encuesta.[251] Debe tenerse en cuenta que esta definición excluye, además de trabajadores por cuenta ajena en centros de producción pequeños (menos de 10 trabajadores), a los presidentes, miembros de consejos de administración y, en general, a todo aquel personal cuya remuneración no sea principalmente en forma de salario, sino mediante comisiones o beneficios. Además los trabajadores con contrato de aprendizaje fueron encuestados separadamente y no serán objeto de atención por nuestra parte.

En lo referente a la *cobertura sectorial* se investigan aquellos centros de trabajo cuya actividad económica esté encuadrada en los tres grandes sectores: la *industria*, la *construcción* y los *servicios*. El detalle de las veintiséis actividades económicas disponibles se

---

[250] Al igual que en el caso de las EPF el muestreo es de tipo bietápico estratificado, siendo ahora las unidades de primera etapa las cuentas de cotización a la Seguridad Social y las de segunda etapa, los trabajadores.

[251] Concretamente deben haber estado de alta en la Seguridad Social durante todo el mes de octubre de 2002, que constituye el mes de referencia de la EES 2002. La encuesta distingue dos periodos de referencia, mensual y anual. Parte de la información recogida hace referencia solo al mes de octubre, considerado como un mes *normal*, en el sentido de estar poco afectado por variaciones estacionales y pagos de vencimiento superior al mes, como las pagas extraordinarias de verano o Navidad. Otros datos se refieren al año 2002 en su conjunto.

muestra en el cuadro A.8.1. Observamos cómo quedan excluidas las actividades ligadas al sector primario (agrícolas, ganaderas y pesqueras), la Administración Pública, defensa y seguridad social obligatoria, Personal doméstico y Organismos extraterritoriales.

En consonancia con la información proporcionada por la EES 2002 nuestro perceptor de renta en este caso será un *trabajador asalariado,* por cuenta ajena, que preste sus servicios en un centro de 10 o más trabajadores y que realice una actividad económica en la industria, la construcción o los servicios.[252]

Observación (14.1): La naturaleza de estos datos determina el tipo de análisis que podemos hacer. Aunque desde el punto de vista geográfico cubrimos todo el territorio nacional, deberemos tener en cuenta en nuestras conclusiones que la capacidad para medir la discriminación en el mercado laboral en razón de género es limitada por la información disponible. En concreto, no podemos perder de vista dos aspectos importantes. Por una parte, la información no recogida en la propia encuesta (trabajadores por cuenta propia, funcionarios, trabajadores del sector primario y de empresas de menos de diez trabajadores). Por otra parte, el objeto de atención de la encuesta se centra en las remuneraciones salariales de individuos empleados, no podemos pues medir, a partir de la EES 2002, la discriminación referente al acceso a un puesto de trabajo (empleados *versus* desempleados), o la discriminación referente a la decisión de participar o no en el mercado de trabajo (activos *versus* inactivos). Nuestra aplicación solo mide, pues, una fuente de discriminación, la discriminación salarial de trabajadores empleados y, en este sentido, representa una cota inferior de discriminación.

Como ya mencionamos en el capítulo 12, además del perceptor de renta deberemos decidir sobre la noción de renta cuya dispersión queremos medir. La EES se refiere al salario o ganancia como al:

[252] En base a la Encuesta de Población Activa (EPA) estimamos que la cobertura de la EES 2002 representa alrededor del 66% del total de asalariados del sector privado.

> […] total de las percepciones salariales en dinero efectivo. Se computan los devengos brutos, es decir, antes de haber practicado las deducciones de las aportaciones a la Seguridad Social por cuenta del trabajador o las retenciones a cuenta del Impuesto sobre la Renta de las Personas Físicas (IRPF). En cambio, no se incluye la remuneración en especie, ni los atrasos que correspondan a años anteriores. Tampoco se incluyen otras percepciones que no son salariales, como las dietas, indemnizaciones o gastos de viaje.
>
> (INE 2004a)

Este concepto genérico de percepción salarial en efectivo debe ser perfilado en dos direcciones antes de poder ser utilizado como noción de renta. Por una parte, deberemos tener en cuenta qué conceptos retributivos incluye el salario y por otra, el periodo de referencia.

Dentro de los *conceptos* del salario la EES 2002 distingue entre los siguientes:

1) *Salario base:* parte fundamental y fija del salario. Ligado al mínimo de retribución acordado en los convenios colectivos, a acuerdos entre empleador y empleado o al salario mínimo interprofesional, en ausencia de dichos acuerdos.
2) *Pagos por horas extraordinarias:* remuneraciones por horas extras, tanto estructurales como no estructurales. Su remuneración debe ser al menos la de una hora ordinaria de trabajo, si bien suele establecerse una cantidad superior a la de la hora normal. En general, estos pagos remuneran el mayor esfuerzo que representa el trabajo adicional realizado fuera de la jornada ordinaria.[253]
3) *Complementos salariales:* conjunto de retribuciones pagadas por encima de las retribuciones básicas (salario base y pagas extraordinarias). Estos complementos suelen ser de varios tipos y pueden ser de tipo personal (antigüedad, cualifica-

[253] No obstante, es posible también que las horas extraordinarias se compensen con remuneraciones en especie, como mayor tiempo de descanso.

ción…), ligados al puesto de trabajo (nocturnidad, peligrosidad, toxicidad…) o ligados a la productividad (puntualidad, cumplimiento de objetivos…).

4) *Pagos extraordinarios:* recogen todos los pagos de vencimiento superior al periodo de referencia (mes), sean de carácter regular o irregular. Se distinguen aquí dos categorías fundamentales: los pagos extraordinarios *fijos,* básicamente las pagas extraordinarias de verano y Navidad y las gratificaciones por beneficios; y los pagos extraordinarios *variables,* ligados a resultados individuales o de la empresa, y cuya cuantía no es conocida de antemano sino que depende del rendimiento obtenido.

En relación al periodo de referencia la EES 2002 distingue entre tres tipos de ganancias salariales:

1) La *ganancia por hora:* necesaria para poder estudiar en condiciones de igualdad a los trabajadores con distintas jornadas, especialmente en lo que hace referencia a los trabajadores a tiempo parcial. Esta es también la variable clave, si los trabajadores difieren mucho en la realización de horas extraordinarias, que, como ya hemos señalado, remuneran un mayor esfuerzo por parte de los trabajadores.
2) La *ganancia mensual:* variable de referencia en las retribuciones, puesto que el periodo de devengo habitual en España es el mes. Dentro del salario mensual se distingue entre el salario base, los pagos por horas extraordinarias, las pagas extraordinarias del mes de referencia y el total de complementos salariales, ya sean fijos o variables.
3) La *ganancia anual:* recoge la ganancia total bruta, distinguiendo los pagos extraordinarios fijos y variables.

Así pues, la diferencia entre la ganancia mensual y la ganancia anual no es solo una cuestión de periodo de devengo del salario, sino de conceptos incluidos. La ganancia anual incluye todos los conceptos incluidos en la ganancia mensual más los pagos extraordinarios; esta es la razón por la que dicho concepto es el utilizado básicamente por el INE (2004b) en la comparación salarial según las diferentes características de los trabajadores.[254] Por su parte, la ganancia por hora en la EES 2002 se ha estimado a partir de la ganancia mensual dividida entre las horas trabajadas, normales y extraordinarias, del mes de referencia, octubre de 2002.

Desde el punto de vista de nuestro interés en el estudio de la discriminación salarial en el mercado de trabajo, el concepto relevante es la ganancia hora, ya que esta es la variable que pone en condiciones de igualdad a trabajadores con distinto tipo de jornada (completa o parcial). Además, consideramos que el concepto de salario debe incluir todo tipo de pagos, no solo los correspondientes a la realización de horas extraordinarias, sino también cualquier tipo de pagos extraordinarios, ya sean fijos o variables, y que no han sido incluidos en la definición de ganancia por hora construida en la EES 2002. Por ello utilizaremos como noción de renta la ganancia por hora, construida por nosotros a partir de la ganancia anual de la EES 2002 (que recoge la ganancia total bruta) dividida entre las horas anuales trabajadas, tanto normales como extraordinarias. Por esta razón nuestro concepto de ganancia hora no se corresponde exactamente con el utilizado en la encuesta. Además efectuaremos todos los cálculos en términos nominales ya que, al no considerar los aspectos dinámicos, la deflación mediante el IPC, a nivel de comunidades autónomas, carece de efectos significativos.[255]

Dos comentarios finales respecto a la interpretación de los datos son de interés. En primer lugar, para una interpretación adecuada de las ganancias procedentes de la EES 2002 hay que tener en cuenta que no se recogen como ganancias las provenientes de segundos o terceros trabajos del mismo trabajador, sino que solamente se recoge lo que dicho asalariado ha ganado en la empresa en la que ha resultado seleccionado.[256]

[254] Por otra parte, debe observarse que la ganancia anual no tiene por qué coincidir con la ganancia mensual multiplicada por 12 más las pagas extra, ya que el salario mensual puede haber variado a lo largo del año y la ganancia mensual de la EES 2002 va referida al mes de referencia, octubre de 2002.

[255] El IPC en el momento de la elaboración de este trabajo era base 2001, por lo que en el año 2002 los diferenciales entre precios en las diferentes comunidades autónomas son mínimos.

[256] Además, para poder realizar comparaciones entre trabajadores, la ganancia mensual de aquellos que no han obtenido un salario mensual completo, debido a ausencias no remuneradas, se ha ajustado al tiempo teniendo en cuenta los días de

En segundo lugar, el énfasis en la consideración de aspectos distributivos permite un elevado nivel de desagregación en la EES 2002, ya que la muestra (teórica) es extraordinariamente alta, 229.866 trabajadores. Ello nos permite una cierta fineza en la partición en celdas de tipos y categorías de trabajadores. Dado este enorme tamaño muestral, y por cuestiones de secreto estadístico, el INE, al contrario de lo que sucede con las EPF, no ofrece el fichero de datos individuales, sino que proporciona una anonimización a medida, a partir de la petición del usuario. En nuestro caso disponemos de un fichero de datos individuales con 202.212 registros de trabajadores, lo que representa al 90,76% de empresas y al 87,97% de trabajadores. Por este motivo las cifras que se derivan de dicho fichero no cuadran exactamente con las proporcionadas por el propio INE y difundidas a través de su web. Nuestros cálculos proceden en su totalidad de este fichero.

Una vez definida la noción de renta y el perceptor de dicha renta deberemos decidir qué circunstancias determinan los tipos y qué características observables determinan las categorías de trabajadores.

Dado nuestro interés en la discriminación en razón de género, tomamos como circunstancia determinante del *tipo* el sexo del trabajador, hombre o mujer. Claramente el sexo de un individuo no refleja en ningún grado una decisión libre del mismo. Nuestra muestra incluye un 64,3% de observaciones de hombres y un 35,7% de observaciones de mujeres, lo que consideramos una representatividad más que aceptable.[257]

En relación a las características que identifican el esfuerzo de los individuos, consideraremos variables relacionadas con el *nivel de estudios,* el *tipo de ocupación* (muy relacionado con el nivel de forma-

salario completo. Igualmente, para obtener ganancias anuales comparables, se ha ajustado al tiempo el salario de aquellos trabajadores que no permanecieron todo el año en el centro de trabajo. Para ello se les ha asignado un salario anual equivalente al que hubieran percibido de haber estado trabajando durante todo el año en las mismas condiciones. Este tipo de ajustes temporales es una de las diferencias metodológicas importantes en la EES 2002 respecto a la EES 1995, y es lo que nos ha permitido estimar la ganancia hora como hemos indicado en el texto.

[257] En términos poblacionales estos porcentajes son respectivamente un 62,9% de hombres y un 37,1% de mujeres.

ción) y la *rama de actividad económica* en la que presta sus servicios el trabajador. Todas estas variables representan, en alguna medida, el esfuerzo de los individuos por alcanzar mayores ganancias, aunque sean el fruto de decisiones pasadas y no puedan ser modificadas a corto plazo. En cierta medida, los trabajadores buscarán mayores remuneraciones no solo vía un mayor nivel de formación, sino también vía promoción en la empresa y mediante la búsqueda de aquellos sectores donde los salarios pagados sean más elevados. Si los salarios están vinculados a la productividad, en alguna medida, estas variables deben reflejar un cierto grado de esfuerzo, aunque sea de forma imprecisa. El *tipo de jornada,* tiempo completo *versus* tiempo parcial, ha sido incorporado al análisis a través de la correcta definición de la noción de renta, al utilizar como tal la ganancia por hora, en lugar de la remuneración mensual o anual. A continuación describimos el detalle con el que hemos considerado estas variables definitorias del grado de esfuerzo.

En relación al nivel de estudios consideramos ocho categorías de acuerdo con la Clasificación Nacional de Educación 2000 (CNED 2000) y que son:

1) Sin estudios o primarios incompletos.
2) Educación primaria completa.
3) Educación secundaria I (1.^{er} ciclo).
4) Educación secundaria II (2.^{o} ciclo).
5) Formación profesional de grado medio (FP I).
6) Formación profesional de grado superior (FP II).
7) Diplomados universitarios y equivalentes.
8) Licenciados, ingenieros superiores y doctores (titulados superiores).

El apartado A.8.1 del apéndice A.8 describe con algo más de detalles estas ocho categorías.

En lo referente al tipo de ocupación consideramos dieciséis grandes grupos ocupacionales de acuerdo con la Clasificación Nacional de Ocupaciones 1994 (CNO 1994)[258] y que son:

[258] Esta clasificación es una adaptación española de la comunitaria ISCO-88 COM.

A. Dirección de las Administraciones Públicas y de empresas de 10 o más asalariados.
D. Profesiones asociadas a titulaciones de 2.º y 3.er ciclo universitario y afines.
E. Profesiones asociadas a una titulación de 1.er ciclo universitario y afines.
F. Técnicos y profesionales de apoyo.
G. Empleados de tipo administrativo.
H. Trabajadores de los servicios de restauración y de servicios personales.
J. Trabajadores de los servicios de protección y seguridad.
K. Dependientes de comercio y asimilados.
L. Trabajadores cualificados en la agricultura y en la pesca.
M. Trabajadores cualificados de la construcción, excepto los operadores de maquinaria.
N. Trabajadores cualificados de las industrias extractivas, de la metalurgia, la construcción de maquinaria y asimilados.
P. Trabajadores cualificados de industrias de artes gráficas, textil y de la confección, de la elaboración de alimentos, ebanistas, artesanos y otros asimilados.
Q. Operadores de instalaciones industriales, de maquinaria fija; montadores y ensambladores.
R. Conductores y operadores de maquinaria móvil.
S. Trabajadores no cualificados en servicios (salvo transportes).
T. Peones de la agricultura, pesca, construcción, industrias manufactureras y transportes.

El listado completo de las cincuenta y nueve ocupaciones a nivel de dos dígitos recogidas por la EES 2002 se ofrece en el cuadro A.8.2.

Finalmente, en lo referente a la rama de actividad económica en la que presta sus servicios el trabajador consideramos doce sectores, correspondientes a nivel de un dígito de las veintiséis ramas de actividad consideradas y que se muestran en el cuadro A.8.1. En concreto los doce sectores considerados son los siguientes:

C. Industrias extractivas.
D. Industria manufacturera.

E. Producción y distribución de energía eléctrica, gas y agua.
F. Construcción.
G. Comercio; reparación de vehículos de motor, motocicletas y ciclomotores y artículos personales y de uso doméstico.
H. Hostelería.
I. Transporte, almacenamiento y comunicaciones.
J. Intermediación financiera.
K. Actividades inmobiliarias y de alquiler; servicios empresariales.
M. Educación.
N. Actividades sanitarias y veterinarias, servicio social.
O. Otras actividades sociales y de servicios prestados a la comunidad; servicios personales.

En definitiva el cruce de todas estas variables nos proporciona 1.536 categorías de trabajadores que comparten las mismas características y, dado que consideramos dos tipos, hombres y mujeres, tenemos en nuestro análisis 3.072 celdas para analizar.[259] Sin embargo, tan elevado número de celdas hace que muchas de ellas estén vacías o tengan un número de observaciones mínimo, lo que no permite mantener unos criterios mínimos de fiabilidad estadística. Por ello efectuaremos dos cruces independientes, por una parte el nivel educativo con los tipos de ocupación, lo que proporciona 128 categorías de trabajadores y 256 celdas para analizar y, por otra, el nivel educativo con las ramas de actividad, lo que proporciona 96 categorías de trabajadores y 192 celdas para analizar.

Adicionalmente a la identificación de las categorías de trabajadores, mediante algunas de sus características observables, podríamos suponer que el grado de esfuerzo es en realidad in-

[259] Además de la consideración del sexo del trabajador como circunstancia definitoria del tipo, podríamos pensar en añadir también la nacionalidad, lo que nos permitiría estudiar la discriminación en las remuneraciones salariales debidas no solo al género sino adicionalmente al diferente origen de los trabajadores. La EES 2002 distingue entre siete nacionalidades, además de la española, sin embargo el porcentaje de observaciones de dichas nacionalidades en la muestra es tan solo del 3,0%, por lo que consideramos que no existe representatividad suficiente para analizar esta cuestión a partir de la EES 2002.

observable, aunque está relacionado de forma monótona con la renta dentro de cada tipo, y podríamos asociar los grados de esfuerzo de hombres y mujeres a los percentiles de la distribución de la renta dentro de cada uno de los sexos. Nos decantamos, no obstante, por la identificación de las categorías a partir de variables observables.

14.3. Discriminación salarial en razón de género en el mercado laboral español

Comenzamos nuestro análisis de la evaluación de la discriminación salarial en razón de género e igualdad de oportunidades con un breve análisis descriptivo de dicha discriminación, utilizando como variables de clasificación las características observables que definen las diferentes categorías de trabajadores.

Dado que nuestra definición de la ganancia hora incluye todos los pagos extraordinarios, nuestro nivel salarial por hora es ligeramente mayor que el ofrecido por el INE (2004b) que, además, centra sus resultados en la ganancia anual; sin embargo, al margen de este efecto de nivel, los resultados cualitativos, en cuanto a discriminación salarial de la mujer, son muy similares.

Inicialmente, el cuadro 14.1 muestra la ganancia hora, distinguiendo entre hombres y mujeres, para las diferentes comunidades autónomas. Los hechos más llamativos son probablemente dos. En primer lugar, las diferencias salariales entre las diferentes comunidades autónomas no son despreciables, oscilando entre un 20% por debajo de la media nacional, con la Región de Murcia, Castilla-La Mancha y Extremadura en la cola de las ganancias por hora trabajada, y un 20% por encima de la media nacional. Solo cuatro regiones superan el promedio, todas ellas en el grupo de las regiones más desarrolladas, en orden creciente, Cataluña, la Comunidad Foral de Navarra, País Vasco y la Comunidad de Madrid. El gráfico 14.1 ilustra estas diferencias. Con pequeñas matizaciones este esquema se reproduce también por sexos.

En segundo lugar, la discriminación salarial de la mujer no es un fenómeno singular desde el punto de vista territorial. En todas las comunidades autónomas las mujeres ganan, en promedio, una

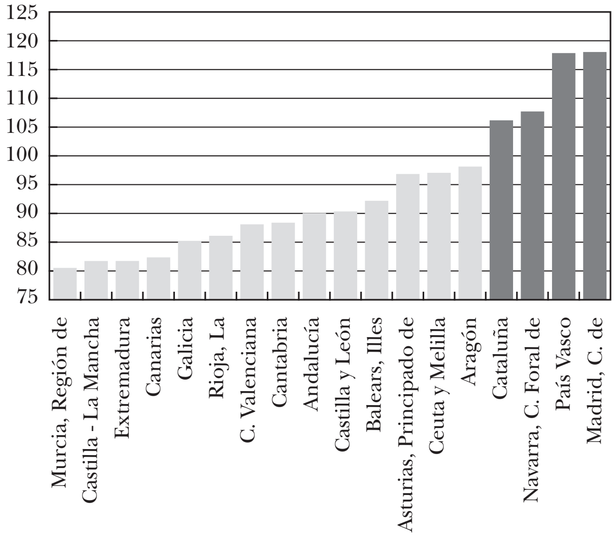
CUADRO 14.1: **Ganancia hora por sexos y comunidades autónomas**

Comunidades autónomas	**Total**		**Hombres**		**Mujeres**		**Ganancia relativa**
	(euros/hora)	**(España = 100)**	**(euros/hora)**	**(España = 100)**	**(euros/hora)**	**(España = 100)**	**(100 * mujeres/hombres)**
Andalucía	10,01	90,06	10,59	86,90	8,81	94,82	83,25
Aragón	10,90	98,13	12,20	100,16	8,58	92,35	70,35
Asturias, P. de	10,76	96,85	11,73	96,24	8,94	96,15	76,23
Balears, Illes	10,24	92,19	11,23	92,16	8,86	95,37	78,95
Canarias	9,15	82,36	9,81	80,51	8,11	87,23	82,67
Cantabria	9,82	88,39	10,57	86,73	8,45	90,86	79,94
Castilla y León	10,04	90,34	11,09	91,05	7,71	83,00	69,55
Castilla-La Mancha	9,08	81,73	9,71	79,71	7,90	85,01	81,37
Cataluña	11,80	106,18	13,34	109,46	9,58	103,01	71,80
Ceuta y Melilla	10,78	97,05	11,32	92,92	9,93	106,80	87,69
C. Valenciana	9,79	88,10	10,69	87,75	7,93	85,34	74,21
Extremadura	9,08	81,74	9,33	76,58	8,65	93,02	92,68
Galicia	9,47	85,23	10,24	84,02	8,06	86,73	78,76
Madrid, C. de	13,12	118,05	14,83	121,74	10,66	114,67	71,87
Murcia, Región de	8,95	80,53	9,66	79,26	7,73	83,20	80,09
Navarra, C. Foral de	11,97	107,72	12,97	106,47	10,17	109,44	78,43
País Vasco	13,10	117,86	14,11	115,79	11,14	119,79	78,94
Rioja, La	9,57	86,11	10,31	84,61	8,21	88,34	79,67
España	**11,11**	**100,00**	**12,18**	**100,00**	**9,30**	**100,00**	**76,30**

Fuente: Elaboración propia a partir de INE (2004b).

GRÁFICO 14.1: Diferencias salariales por comunidades autónomas

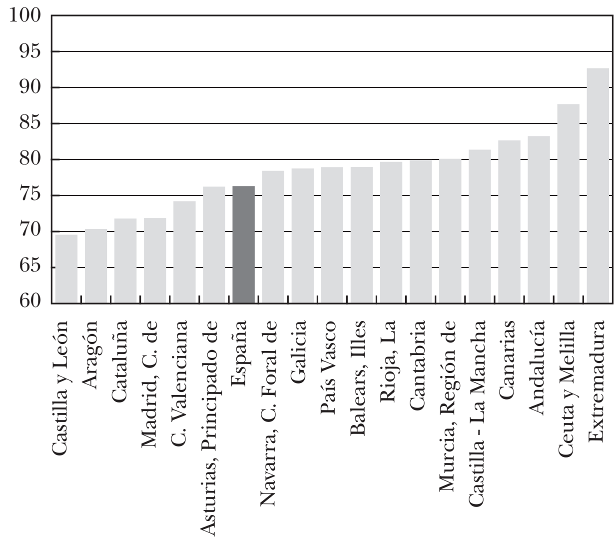
(España = 100)



Fuente: Elaboración propia a partir de INE (2004b).

GRÁFICO 14.2: Diferencias salariales relativas por comunidades autónomas

(mujer/hombre)



Fuente: Elaboración propia a partir de INE (2004b).

cifra inferior a la de los hombres. A nivel nacional las mujeres ganan, por hora trabajada, solo un 76,3% de lo que ganan los hombres. Además las diferencias entre sexos no son iguales en todas las regiones, tal y como muestra la última columna del cuadro 14.1 y el gráfico 14.2, que ilustra estas cifras en un orden decreciente de discriminación. En este caso, Castilla y León aparece como la comunidad donde mayor discriminación se observa, ya que las mujeres ganan solo un 69,6% de lo que ganan los hombres en dicha comunidad y Extremadura aparece como la comunidad con menor discriminación, siendo en este caso la ganancia hora de las mujeres el 92,7% de la de los hombres. No parece existir ahora un patrón claro entre los niveles de renta per cápita y las diferencias salariales relativas, ya que por ejemplo comunidades como la Comunidad de Madrid o Cataluña presentan salarios relativos de la mujer notablemente inferiores al promedio nacional, y otras comunidades con niveles de desarrollo comparable, como la Comunidad Foral de Navarra, País Vasco o Illes Balears, presentan salarios relativos de la mujer sensiblemente superiores al promedio nacional. Hasta qué punto este patrón observado se debe a factores específicos de discriminación o a una composición diferente de la fuerza de trabajo es parte de lo que tratamos de dilucidar en este capítulo.

Atendiendo a las variables de clasificación consideradas, los cuadros 14.2, 14.3 y 14.4 muestran la ganancia hora, distinguiendo entre hombres y mujeres, para los diferentes niveles de estudio, tipos de ocupación y ramas de actividad consideradas, todo ello para el conjunto de España. Por su parte, los cuadros A.8.3, A.8.4 y A.8.5 ofrecen la misma información por comunidades autónomas.[260]

A la luz de esta información los siguientes comentarios son de interés:

[260] En este caso, por cuestiones de significatividad estadística, solo se ofrecen resultados si la celda correspondiente tiene más de veinte observaciones. De esta forma, podemos observar cómo para ciertas regiones, y notablemente las ciudades autónomas de Ceuta y Melilla, determinados tipos de ocupaciones, por ejemplo L, *Trabajadores cualificados en la agricultura y en la pesca*, y ciertas ramas de actividad, por ejemplo C, *Industrias extractivas*, es difícil extraer conclusiones a nivel de comunidad autónoma.

CUADRO 14.2: Ganancia hora por sexos y niveles educativos. España

Niveles educativos	Total (euros/hora)	Total (España = 100)	Hombres (euros/hora)	Hombres (España = 100)	Mujeres (euros/hora)	Mujeres (España = 100)	Ganancia relativa (100 * mujeres/hombres)
1	7,07	63,62	7,61	62,43	5,84	62,79	76,74
2	8,41	75,67	9,19	75,44	6,53	70,28	71,08
3	8,44	75,92	9,32	76,48	6,62	71,18	71,01
4	12,12	109,08	14,12	115,89	9,33	100,39	66,09
5	9,95	89,55	11,62	95,38	8,18	88,04	70,43
6	11,71	105,36	13,06	107,20	9,16	98,59	70,17
7	15,41	138,74	17,89	146,85	13,18	141,74	73,64
8	19,80	178,19	23,04	189,14	15,60	167,84	67,71
Todos	**11,11**	**100,00**	**12,18**	**100,00**	**9,30**	**100,00**	**76,30**

Nota: 1: Sin estudios o primarios incompletos; 2: Educación primaria completa; 3: Educación secundaria I (1.er ciclo); 4: Educación secundaria II (2.º ciclo); 5: Formación profesional de grado medio (FP I); 6: Formación profesional de grado superior (FP II); 7: Diplomados universitarios y equivalentes; 8: Licenciados, ingenieros superiores y doctores (titulados superiores).
Fuente: Elaboración propia a partir de los datos de INE (2004b).

CUADRO 14.3: **Ganancia hora por sexos y tipos de ocupación. España**

Ocupación	Total		Hombres		Mujeres		Ganancia relativa
	(euros/hora)	(España = 100)	(euros/hora)	(España = 100)	(euros/hora)	(España = 100)	(100 * mujeres/hombres)
A	31,50	283,47	33,23	272,72	23,79	255,89	71,59
D	20,93	188,39	23,33	191,49	17,59	189,26	75,41
E	16,36	147,25	18,23	149,64	14,82	159,41	81,28
F	14,83	133,44	16,64	136,59	11,93	128,30	71,66
G	9,50	85,47	11,58	95,08	8,01	86,22	69,19
H	7,46	67,12	8,06	66,18	7,10	76,33	87,99
J	8,55	76,92	8,70	71,45	6,95	74,73	79,81
K	7,91	71,16	9,73	79,90	6,76	72,75	69,47
L	7,82	70,36	7,96	65,37	6,18	66,53	77,66
M	7,84	70,58	7,85	64,45	7,00	75,25	89,08
N	10,80	97,22	10,84	88,98	9,55	102,73	88,09
P	7,53	67,73	8,31	68,17	6,12	65,84	73,69
Q	9,76	87,80	10,80	88,62	6,64	71,41	61,48
R	9,03	81,28	9,07	74,46	6,58	70,79	72,54
S	6,37	57,33	7,39	60,67	6,00	64,53	81,15
T	5,80	52,23	6,03	49,46	4,91	52,85	81,53
Todos	**11,11**	**100,00**	**12,18**	**100,00**	**9,30**	**100,00**	**76,30**

Nota: A: Dirección de las Administraciones Públicas y de empresas de 10 o más asalariados; D: Profesiones asociadas a titulaciones de 2.º y 3.er ciclo universitario y afines; E: Profesiones asociadas a una titulación de 1.er ciclo universitario y afines; F: Técnicos y profesionales de apoyo; G: Empleados de tipo administrativo; H: Trabajadores de los servicios de restauración y de servicios personales; J: Trabajadores de los servicios de protección y seguridad; K: Dependientes de comercio y asimilados; L: Trabajadores cualificados en la agricultura y en la pesca; M: Trabajadores cualificados de la construcción, excepto los operadores de maquinaria; N: Trabajadores cualificados de las industrias extractivas, de la metalurgia, la construcción de maquinaria y asimilados; P: Trabajadores cualificados de industrias de artes gráficas, textil y de la confección, de la elaboración de alimentos, ebanistas, artesanos y otros asimilados; Q: Operadores de instalaciones industriales, de maquinaria fija; montadores y ensambladores.; R: Conductores y operadores de maquinaria móvil; S: Trabajadores no cualificados en servicios (excepto transportes); T: Peones de la agricultura, pesca, construcción, industrias manufactureras y transportes.

Fuente: Elaboración propia a partir de los datos de INE (2004b).

CUADRO 14.4: **Ganancia hora por sexos y ramas de actividad. España**

Actividad económica	Total		Hombres		Mujeres		Ganancia relativas
	(euros/hora)	(España = 100)	(euros/hora)	(España = 100)	(euros/hora)	(España = 100)	(100 * mujeres/hombres)
C	11,42	102,81	11,57	94,98	9,23	99,30	79,77
D	11,44	102,98	12,38	101,64	8,57	92,21	69,22
E	19,65	176,87	20,37	167,21	15,84	170,40	77,75
F	8,55	76,93	8,57	70,35	8,22	88,48	95,96
G	9,62	86,61	11,19	91,83	7,57	81,41	67,64
H	7,07	63,63	8,00	65,65	6,20	66,74	77,56
I	13,21	118,86	13,74	112,74	11,54	124,19	84,04
J	21,86	196,78	24,79	203,46	16,70	179,69	67,38
K	9,17	82,51	11,24	92,26	7,28	78,37	64,81
M	14,93	134,34	16,25	133,38	14,11	151,78	86,82
N	12,90	116,08	16,07	131,88	11,45	123,18	71,26
O	10,41	93,72	12,06	98,99	8,39	90,25	69,57
Todos	**11,11**	**100,00**	**12,18**	**100,00**	**9,30**	**100,00**	**76,30**

Nota: C: Industrias extractivas; D: Industria manufacturera, E: Producción y distribución de energía eléctrica, gas y agua; F: Construcción; G: Comercio; reparación de vehículos de motor, motocicletas y ciclomotores y artículos personales y de uso doméstico; H: Hostelería; I: Transporte, almacenamiento y comunicaciones; J: Intermediación financiera; K: Actividades inmobiliarias y de alquiler; servicios empresariales; M: Educación; N: Actividades sanitarias y veterinarias, servicio social; O: Otras actividades sociales y de servicios prestados a la comunidad; servicios personales.
Fuente: Elaboración propia a partir de los datos de INE (2004b).

— Como es de esperar las diferencias salariales por niveles de estudios son muy notables, sobre todo en los niveles extremos de la formación. En particular, esta diferencia es más acusada que el diferencial observado por sexos, si bien la diferencia entre hombres y mujeres queda de nuevo patente al comparar trabajadores con el mismo nivel educativo. En conjunto, las mujeres reciben una remuneración por hora trabajada entre un 25% y un 35% menos que los hombres, lo que no parece que tienda a disminuir con el nivel de formación.

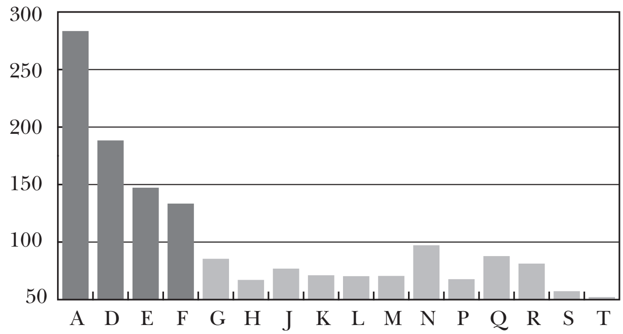
— La diferencia salarial por sexos es mayor en los diferentes niveles educativos, a excepción del grupo 1, *Sin estudios o primarios incompletos*, que en el agregado. Ello es debido a un efecto composición de la población femenina respecto a la masculina en los diferentes niveles de estudios; la proporción de mujeres con niveles de estudios elevados y, en consecuencia, salarios más altos, es mayor que la proporción de hombres. Por ejemplo, en la muestra existe un 24,8% de mujeres con estudios universitarios, grupos 7 y 8, frente a solo un 15,9% de hombres con idéntica titulación.[261]

— En relación a la ocupación, observamos cómo esta variable es, lógicamente, una de las que más influye en los niveles salariales. El gráfico 14.3 ilustra estas diferencias de forma clara. Destaca la gran diferencia del grupo A, *Dirección de las Administraciones Públicas y de empresas de 10 o más asalariados*, con una ganancia casi tres veces el promedio. Solo cuatro tipos de ocupación, de los dieciséis considerados, presentan ganancias superiores al promedio, y dos de estos tipos (los grupos D y E) están vinculados necesariamente a la educación universitaria. Por su parte, los tipos de ocupación más baja (los grupos S y T) apenas reciben una remuneración algo superior a la mitad del promedio: se trata de ocupaciones vinculadas a escasos niveles de cualificación. Así pues,

[261] En términos poblacionales estos porcentajes son 25,9% de mujeres frente a un 17,0% de hombres.

GRÁFICO 14.3: Diferencias salariales por tipos de ocupación

(todos los tipos = 100)



Nota:
A: Dirección de las Administraciones Públicas y de empresas de 10 o más asalariados; D: Profesiones asociadas a titulaciones de 2.º y 3.er ciclo universitario y afines; E: Profesiones asociadas a una titulación de 1.er ciclo universitario y afines; F: Técnicos y profesionales de apoyo; G: Empleados de tipo administrativo; H: Trabajadores de los servicios de restauración y de servicios personales; J: Trabajadores de los servicios de protección y seguridad; K: Dependientes de comercio y asimilados; L: Trabajadores cualificados en la agricultura y en la pesca; M: Trabajadores cualificados de la construcción, excepto los operadores de maquinaria; N: Trabajadores cualificados de las industrias extractivas, de la metalurgia, la construcción de maquinaria y asimilados; P: Trabajadores cualificados de industrias de artes gráficas, textil y de la confección, de la elaboración de alimentos, ebanistas, artesanos y otros asimilados; Q: Operadores de instalaciones industriales, de maquinaria fija; montadores y ensambladores; R: Conductores y operadores de maquinaria móvil; S: Trabajadores no cualificados en servicios (excepto transportes); T: Peones de la agricultura, pesca, construcción, industrias manufactureras y transportes.
Fuente: Elaboración propia a partir de INE (2004b).

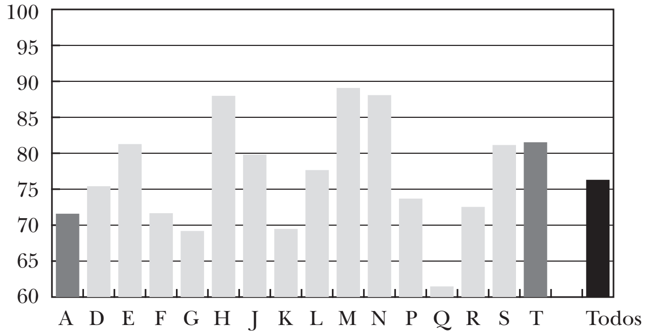
tipos de ocupación y niveles educativos están altamente relacionados, siendo difícil la separación de sus efectos sobre los diferenciales salariales.

— Por sexos, el patrón anterior vuelve a reproducirse: las mujeres ganan menos en todos los tipos de ocupación. Aunque de nuevo no parece existir un patrón definido de discriminación, llama la atención, si observamos los extremos, que las diferencias relativas de salario son mayores en el grupo A que en el grupo T, aunque el gráfico 14.4 deja claro que no existe una relación clara entre niveles de ganancia hora por tipo de ocupación y diferencias relativas por sexo.

— Finalmente, el cuadro 14.4 muestra las también importantes diferencias salariales entre ramas de actividad económica. Dos ramas destacan ampliamente por encima del resto, E, *Producción y distribución de energía eléctrica, gas y agua*, y sobre

GRÁFICO 14.4: Diferencias salariales relativas por tipos de ocupación

(mujer/hombre)



Nota:
A: Dirección de las Administraciones Públicas y de empresas de 10 o más asalariados; D: Profesiones asociadas a titulaciones de 2.º y 3.er ciclo universitario y afines; E: Profesiones asociadas a una titulación de 1.er ciclo universitario y afines; F: Técnicos y profesionales de apoyo; G: Empleados de tipo administrativo; H: Trabajadores de los servicios de restauración y de servicios personales; J: Trabajadores de los servicios de protección y seguridad; K: Dependientes de comercio y asimilados; L: Trabajadores cualificados en la agricultura y en la pesca; M: Trabajadores cualificados de la construcción, excepto los operadores de maquinaria; N: Trabajadores cualificados de las industrias extractivas, de la metalurgia, la construcción de maquinaria y asimilados; P: Trabajadores cualificados de industrias de artes gráficas, textil y de la confección, de la elaboración de alimentos, ebanistas, artesanos y otros asimilados; Q: Operadores de instalaciones industriales, de maquinaria fija; montadores y ensambladores; R: Conductores y operadores de maquinaria móvil; S: Trabajadores no cualificados en servicios (excepto transportes); T: Peones de la agricultura, pesca, construcción, industrias manufactureras y transportes.
Fuente: Elaboración propia a partir de INE (2004b).

todo J, *Intermediación financiera*, con ganancias por hora trabajada, que prácticamente doblan a las del conjunto de actividades consideradas.

— Por sexos observamos un patrón ya familiar: las mujeres ganan menos que los hombres que trabajan en la misma rama de actividad económica. Las diferencias relativas son del orden de magnitud ya observado en los tipos de ocupación. La práctica ausencia de discriminación en la rama K, *Construcción*, no es significativa ya que solo un 6,6% de la muestra en esta rama lo es de mujeres, que se encuentran en su mayoría ocupadas en los grupos de cualificación intermedia alta (los grupos E, F y G totalizan el 74,3% de observaciones del 6,6% mencionado).

En resumen, la discriminación salarial en razón de género entre la población de trabajadores empleados es evidente, tanto a nivel nacional como de comunidades autónomas. Las mujeres siempre ganan menos por hora de trabajo a igual nivel educativo, tipo de trabajo o rama de actividad donde desempeñen sus funciones. Esta primera panorámica indica también que el patrón de discriminación no es uniforme en ninguna de las variables consideradas y, en consecuencia, deslindar qué parte de esta discriminación se debe puramente a razones de género y qué parte a otros factores relacionados con el esfuerzo, medido a través de variables observables indicativas de las características de los individuos, no será tarea fácil.

14.4. Desigualdad en la distribución de la ganancia por hora trabajada

Antes de proceder a la valoración social de la distribución de rentas laborales de acuerdo con el marco teórico esbozado en el epígrafe 14.1, conviene repasar, brevemente, algunos resultados sobre la desigualdad en la distribución de la ganancia por hora trabajada. Al fin y al cabo, nuestro esquema de identificación se basa en la generación de celdas de tipos y categorías de trabajadores suficientemente homogéneas.

El cuadro 14.5 ofrece el índice de Theil, T, de la distribución de la ganancia hora distinguiendo por sexos y comunidades autónomas. Claramente el criterio territorial no genera una partición de los trabajadores en grupos homogéneos (en el sentido de una distribución salarial más igualitaria). Existen comunidades autónomas con una distribución más igualitaria y otras con una distribución menos igualitaria que el agregado nacional. Tampoco por sexos existe un patrón definido, aunque las mujeres tienden a presentar menos dispersión en la mayor parte de comunidades autónomas, existen notables excepciones, como La Rioja, País Vasco o la Comunidad Foral de Navarra.

CUADRO 14.5: **Distribución de la ganancia hora por sexos y comunidades autónomas**

Comunidades autónomas	**Total** (índice de Theil)	**Total** (España = 100)	**Hombres** (índice de Theil)	**Hombres** (España = 100)	**Mujeres** (índice de Theil)	**Mujeres** (España = 100)	**Desigualdad relativa** (100 * mujeres/ hombres)
Andalucía	0,215	92,73	0,219	93,70	0,193	95,64	87,99
Aragón	0,221	95,23	0,216	92,24	0,187	92,94	86,86
Asturias, Principado de	0,187	80,47	0,177	75,80	0,183	90,57	103,01
Balears, Illes	0,250	107,90	0,270	115,69	0,196	97,24	72,46
Canarias	0,262	113,12	0,270	115,41	0,236	116,93	87,35
Cantabria	0,161	69,53	0,152	65,07	0,164	81,46	107,91
Castilla y León	0,196	84,55	0,189	80,84	0,165	81,94	87,39
Castilla-La Mancha	0,206	88,97	0,203	86,82	0,199	98,58	97,88
Cataluña	0,209	90,11	0,204	87,42	0,180	89,42	88,18
Ceuta y Melilla	0,308	132,85	0,330	141,00	0,263	130,60	79,86
C. Valenciana	0,205	88,25	0,201	85,84	0,181	89,95	90,33
Extremadura	0,208	89,77	0,224	95,91	0,176	87,16	78,34
Galicia	0,211	91,11	0,210	89,95	0,193	95,72	91,74
Madrid, C. de	0,283	122,26	0,294	125,60	0,226	111,96	76,85
Murcia, Región de	0,206	88,79	0,213	91,08	0,174	86,09	81,48
Navarra, C. Foral de	0,150	64,84	0,139	59,33	0,156	77,27	112,27
País Vasco	0,154	66,44	0,141	60,37	0,165	81,97	117,05
Rioja, La	0,173	74,70	0,155	66,21	0,197	97,73	127,25
España	**0,232**	**100,00**	**0,234**	**100,00**	**0,202**	**100,00**	**86,21**

Fuente: Elaboración propia a partir de INE (2004b).

Los cuadros 14.6, 14,7 y 14.8 ofrecen la misma información atendiendo a las variables de clasificación consideradas.[262] Dos comentarios son de interés ahora:

— Con solo dos excepciones en las ramas de actividad K, *Actividades inmobiliarias y de alquiler; servicios empresariales,* y O, *Otras actividades sociales y de servicios prestados a la comunidad; servicios personales,* (caracterizadas por una gran heterogeneidad), las variables de clasificación consideradas reducen notablemente la dispersión en la distribución salarial. Esto es especialmente cierto en lo referente al nivel de estudios y los tipos de ocupación, tanto para el conjunto de la población como para la distinción por sexos. En este sentido la partición, según nuestras variables de clasificación, tiende a crear grupos relativamente homogéneos. Homogeneidad que esperamos tienda a incrementarse con el cruce de estas variables.

— Salvo en el caso del nivel educativo, no existe un patrón definido entre sexo y dispersión salarial. Así pues, niveles y dispersión no parecen guardar una relación sencilla, ni por tipos de ocupación, ni por ramas de actividad. Solo en el caso de la clasificación por niveles de estudios observamos claramente cómo una menor retribución salarial por parte de las mujeres lleva asociada una menor dispersión en dichas retribuciones. De esta forma, las mujeres no solo ganan menos por hora trabajada, sino que tienden a ser más similares en cuanto a lo que perciben, para un nivel de formación dado.

14.4.1. Algunos resultados sobre descomponibilidad

Las variables de clasificación por tipos y categorías de trabajadores pueden servir para descomponer el índice de Theil, T, que acabamos de examinar. Al fin y al cabo la valoración social del bienestar, que efectuaremos a continuación, se basa en dicha pro-

---

[262] Al igual que para el caso de la ganancia media, los cuadros A.8.6, A.8.7 y A.8.8 del apéndice A.8 ofrecen los mismos resultados a nivel de comunidad autónoma, si bien, al igual que antes, solo se ofrecen dichos resultados si el número de observaciones en la celda correspondiente supera las veinte.

CUADRO 14.6: **Distribución de la ganancia hora por sexos y niveles de estudios. España**

Niveles educativos	**Total**		**Hombres**		**Mujeres**		**Desigualdad relativa**
	(euros/hora)	**(España = 100)**	**(euros/hora)**	**(España = 100)**	**(euros/hora)**	**(España = 100)**	**(100 * mujeres/hombres)**
1	0,142	61,05	0,144	61,48	0,108	53,43	74,93
2	0,154	66,49	0,149	63,81	0,123	61,20	82,68
3	0,168	72,56	0,165	70,56	0,132	65,44	79,96
4	0,219	94,56	0,210	89,78	0,178	88,43	84,92
5	0,149	64,09	0,150	64,24	0,109	53,94	72,39
6	0,151	64,93	0,140	59,86	0,131	64,91	93,48
7	0,159	68,68	0,166	70,83	0,125	62,25	75,77
8	0,224	96,56	0,220	94,14	0,179	89,01	81,52
Todos	**0,232**	**100,00**	**0,234**	**100,00**	**0,202**	**100,00**	**86,21**

Nota: 1: Sin estudios o primarios incompletos; 2: Educación primaria completa; 3: Educación secundaria I (1.er ciclo); 4: Educación secundaria II (2.º ciclo); 5: Formación profesional de grado medio (FP I); 6: Formación profesional de grado superior (FP II); 7: Diplomados universitarios y equivalentes; 8: Licenciados, ingenieros superiores y doctores (titulados superiores).

Fuente: Elaboración propia a partir de INE (2004b).

CUADRO 14.7: **Distribución de la ganancia hora por sexos y tipos de ocupación. España**

Ocupación	**Total**		**Hombres**		**Mujeres**		**Desigualdad relativa**
	(euros/hora)	**(España = 100)**	**(euros/hora)**	**(España = 100)**	**(euros/hora)**	**(España = 100)**	**(100 * mujeres/hombres)**
A	0,176	75,81	0,167	71,54	0,177	87,70	105,68
D	0,169	73,05	0,174	74,27	0,135	67,00	77,77
E	0,107	46,12	0,126	54,04	0,076	37,93	60,51
F	0,176	75,88	0,175	74,99	0,138	68,23	78,44
G	0,175	75,36	0,159	68,18	0,156	77,52	98,02
H	0,119	51,31	0,108	46,03	0,123	61,22	114,65
J	0,077	33,38	0,076	32,45	0,072	35,61	94,58
K	0,147	63,56	0,149	63,82	0,115	56,90	76,86
L	0,100	43,04	0,102	43,43	0,043	21,20	42,09
M	0,120	51,67	0,120	51,25	0,111	54,92	92,37
N	0,102	43,97	0,102	43,72	0,084	41,80	82,42
P	0,106	45,60	0,093	39,69	0,103	51,05	110,87
Q	0,119	51,16	0,097	41,59	0,114	56,45	117,00
R	0,110	47,34	0,109	46,46	0,148	73,41	136,22
S	0,100	43,02	0,134	57,15	0,078	38,69	58,37
T	0,112	48,40	0,108	46,27	0,114	56,53	105,32
Todas	**0,232**	**100,00**	**0,234**	**100,00**	**0,202**	**100,00**	**86,21**

Nota: A: Dirección de las Administraciones Públicas y de empresas de 10 o más asalariados; D: Profesiones asociadas a titulaciones de 2.º y 3.er ciclo universitario y afines; E: Profesiones asociadas a una titulación de 1.er ciclo universitario y afines; F: Técnicos y profesionales de apoyo; G: Empleados de tipo administrativo; H: Trabajadores de los servicios de restauración y de servicios personales; J: Trabajadores de los servicios de protección y seguridad; K: Dependientes de comercio y asimilados; L: Trabajadores cualificados en la agricultura y en la pesca; M: Trabajadores cualificados de la construcción, excepto los operadores de maquinaria; N: Trabajadores cualificados de las industrias extractivas, de la metalurgia, la construcción de maquinaria y asimilados; P: Trabajadores cualificados de industrias de artes gráficas, textil y de la confección, de la elaboración de alimentos, ebanistas, artesanos y otros asimilados; Q: Operadores de instalaciones industriales, de maquinaria fija; montadores y ensambladores.; R: Conductores y operadores de maquinaria móvil; S: Trabajadores no cualificados en servicios (excepto transportes); T: Peones de la agricultura, pesca, construcción, industrias manufactureras y transportes.
Fuente: Elaboración propia a partir de INE (2004b).

CUADRO 14.8: **Distribución de la ganancia hora por sexos y ramas de actividad. España**

Actividad económica	**Total**		**Hombres**		**Mujeres**		**Desigualdad relativa**
	(euros/hora)	**(España = 100)**	**(euros/hora)**	**(España = 100)**	**(euros/hora)**	**(España = 100)**	**(100 * mujeres/hombres)**
C	0,170	73,41	0,168	71,80	0,188	93,15	111,84
D	0,183	78,82	0,170	72,76	0,179	88,76	105,16
E	0,173	74,48	0,164	70,08	0,204	101,00	124,24
F	0,186	80,22	0,191	81,53	0,119	58,84	62,21
G	0,227	97,83	0,234	100,15	0,160	79,56	68,49
H	0,153	66,09	0,167	71,40	0,119	59,06	71,30
I	0,217	93,51	0,213	91,05	0,219	108,77	102,99
J	0,154	66,32	0,146	62,55	0,114	56,52	77,89
K	0,288	124,28	0,310	132,40	0,202	100,40	65,37
M	0,142	61,28	0,136	58,17	0,142	70,60	104,63
N	0,165	71,06	0,172	73,64	0,138	68,59	80,30
O	0,258	111,46	0,254	108,69	0,223	110,56	87,70
Todas	**0,232**	**100,00**	**0,234**	**100,00**	**0,202**	**100,00**	**86,21**

Nota: C: Industrias extractivas; D: Industria manufacturera; E: Producción y distribución de energía eléctrica, gas y agua; F: Construcción; G: Comercio; reparación de vehículos de motor, motocicletas y ciclomotores y artículos personales y de uso doméstico; H: Hostelería; I: Transporte, almacenamiento y comunicaciones; J: Intermediación financiera; K: Actividades inmobiliarias y de alquiler; servicios empresariales; M: Educación; N: Actividades sanitarias y veterinarias, servicio social; O: Otras actividades sociales y de servicios prestados a la comunidad; servicios personales.
Fuente: Elaboración propia a partir de INE (2004b).

CUADRO 14.9: Descomposición del índice de Theil, *T*, según tipos y características

a) Total Población (índice global = 0,232)

Criterio	Sexos	Comunidades autónomas	Niveles educativos	Tipos de ocupación	Ramas de actividad
Componente intergrupos	0,008	0,009	0,053	0,088	0,033
Porcentaje	(3,49)	(3,74)	(22,91)	(38,16)	(14,37)
Componente intragrupos	0,224	0,223	0,179	0,143	0,199
Porcentaje	(96,51)	(96,26)	(77,09)	(61,84)	(85,63)

b) Hombres (índice global = 0,234)

Criterio		Comunidades autónomas	Niveles educativos	Tipos de ocupación	Ramas de actividad
Componente intergrupos	–	0,011	0,060	0,094	0,036
Porcentaje	–	(4,85)	(25,48)	(40,42)	(15,47)
Componente intragrupos	–	0,222	0,174	0,139	0,198
Porcentaje	–	(95,15)	(74,52)	(59,58)	(84,53)

c) Mujeres (índice = 0,202)

Criterio		Comunidades autónomas	Niveles educativos	Tipos de ocupación	Ramas de actividad
Componente intergrupos	–	0,007	0,058	0,079	0,039
Porcentaje	–	(3,41)	(28,69)	(38,98)	(19,28)
Componente intragrupos	–	0,195	0,144	0,123	0,163
Porcentaje	–	(96,59)	(71,31)	(61,02)	(80,72)

Fuente: Elaboración propia a partir de datos de INE (2004b).

piedad de descomponibilidad. El cuadro 14.9 presenta los resultados de dicha descomposición para el conjunto de la población y para cada sexo, de acuerdo con todas las particiones posibles.

Los resultados confirman algunas de las tendencias que ya hemos señalado y permiten, en cierta forma, anticipar el tipo de resultados que obtendremos de forma más precisa en el epígrafe siguiente. A pesar de la evidente discriminación salarial de la mujer, una descomposición del índice de desigualdad global para una partición de la población, según el género del trabajador, indica, claramente, que el grueso de las desigualdades no está en el género, sino dentro de las distribuciones de cada uno de los sexos. Idéntico resultado lo obtenemos a nivel de comunidad autónoma. Así pues, al igual que sucede con la distribución de la renta examinada en el capítulo anterior, las desigualdades no están en los territorios, sino en las personas que los habitan.

Los resultados son significativamente diferentes para las variables que identifican las categorías de trabajadores, niveles educativos, tipos de ocupación y ramas de actividad. En este caso, una gran proporción de la desigualdad observada, medida mediante el índice T, se debe a las desigualdades intergrupos. Esto es especialmente evidente en el caso de los tipos de ocupación, donde entre un 38,2% y un 40,4% de la desigualdad observada es atribuible a las diferencias entre los diferentes grupos. Obviamente esto está relacionado con los niveles educativos, que llegan a explicar alrededor de un cuarto del total de la desigualdad observada. Una menor proporción es explicada por las ramas de actividad, si bien los porcentajes se sitúan muy por encima de los que obtenemos cuando utilizamos el sexo o el lugar de residencia como variables de clasificación de la población.

Estos resultados nos permiten anticipar que, si identificamos el esfuerzo con variables tales como el nivel educativo, los tipos de ocupación o las ramas de actividad, que es donde se encuentran las grandes desigualdades salariales, entonces nuestra valoración de la pérdida de bienestar debida a la discriminación salarial en razón de género tenderá a ser pequeña. La razón es que el término de descuento,

$$V_B^T(\boldsymbol{\mu}) = \sum_{h=1}^{k} n_h \mu_h \log \frac{\mu_h}{\mu}$$

(11.14) en la descomposición (11.8), que no consideramos en la valoración social del bienestar (14.1), tenderá a ser relativamente elevado, al concentrar la mayor parte de las desigualdades observadas. El epígrafe siguiente confirma esta intuición.

14.5. Valoración social de la discriminación salarial en razón de género en el mercado laboral español

A partir de los datos anteriores, realizamos una estimación de la discriminación salarial en razón de género, entendida como la pérdida de bienestar asociada a la desigualdad entre hombres y mujeres por grupos de esfuerzo. Utilizamos para ello la fórmula (14.5), construida a partir de (14.2) y (14.3), y las variables de clasificación que definen las categorías de trabajadores que hemos mencionado anteriormente.

Los resultados, utilizando los diversos criterios de categorías, son ofrecidos en el cuadro 14.10. En él ofrecemos tres tipos de resultados. La primera columna muestra la pérdida porcentual de bienestar debida a la desigualdad de oportunidades, es decir,

$$z_{\hat{V}^T}(\mathbf{y}) = \frac{D(\mathbf{y})}{\hat{V}^T(\mathbf{y})} \times 100$$

para cada comunidad autónoma y el agregado nacional, donde dicho agregado ha sido obtenido como media ponderada por la estructura poblacional de cada comunidad.[263]

La segunda columna ofrece la valoración monetaria de nuestra medida de discriminación expresada en euros por año per cápita, en lugar de en términos relativos. Esta cifra la obtenemos como

$$\frac{1}{n} D(\mathbf{y})$$

[263] Ello equivale a considerar, a nivel nacional, la pertenencia a una comunidad autónoma como otra variable definitoria de las diferentes categorías de trabajadores, de forma que para obtener los resultados agregados calculamos las celdas a nivel de comunidad autónoma y luego sumamos por comunidades.

CUADRO 14.10: Discriminación de género en la población asalariada por comunidades autónomas y grupos isoesfuerzo

Comunidades autónomas	Niveles educativos y tipos de ocupación		
	Valoración		Subvención
	(porcentaje)	(euros/año)	(euros/año)
Andalucía	1,00	143,26	436,92
Aragón	1,66	255,16	709,99
Asturias, P. de	0,92	144,51	417,45
Balears, Illes	1,43	209,89	503,76
Canarias	1,29	168,09	434,73
Cantabria	0,96	142,98	406,34
Castilla y León	1,08	154,82	495,52
C.-La Mancha	1,32	174,56	501,08
Cataluña	1,29	219,14	535,70
Ceuta y Melilla	2,18	318,93	826,31
C. Valenciana	1,28	182,91	559,26
Extremadura	0,75	97,87	270,08
Galicia	1,15	159,78	452,83
Madrid, C. de	1,51	273,49	665,26
Murcia, R. de	1,33	171,65	465,46
Navarra, C. F. de	0,80	140,71	392,52
País Vasco	0,71	135,37	397,68
Rioja, La	1,08	152,27	431,10
España	**1,24**	**196,85**	**530,03**

CUADRO 14.10 *(cont.)*: **Discriminación de género en la población asalariada por comunidades autónomas y grupos isoesfuerzo**

Comunidades autónomas	Niveles educativos y ramas de actividad		
	Valoración		Subvención
	(porcentaje)	(euros/año)	(euros/año)
Andalucía	1,37	193,75	590,91
Aragón	2,17	329,00	915,47
Asturias, P. de	1,19	185,08	534,64
Balears, Illes	1,73	252,86	606,90
Canarias	1,45	189,47	490,03
Cantabria	1,23	180,08	511,78
Castilla y León	1,12	160,81	514,68
C.-La Mancha	1,49	197,78	567,71
Cataluña	1,83	305,63	747,15
Ceuta y Melilla	1,91	286,90	743,35
C. Valenciana	1,66	234,00	715,48
Extremadura	0,86	113,30	312,68
Galicia	1,40	193,25	547,69
Madrid, C. de	1,98	346,22	842,18
Murcia, R. de	1,73	221,70	601,21
Navarra, C. F. de	1,14	198,59	553,96
País Vasco	1,14	214,74	630,85
Rioja, La	1,22	170,94	483,96
España	**1,64**	**256,05**	**689,42**

CUADRO 14.10 *(cont.)*: **Discriminación de género en la población asalariada por comunidades autónomas y grupos isoesfuerzo**

Comunidades autónomas	Niveles educativos		
	Valoración		Subvención
	(porcentaje)	(euros/año)	(euros/año)
Andalucía	1,12	153,66	468,64
Aragón	2,57	373,26	1.038,61
Asturias, P. de	1,74	259,84	750,61
Balears, Illes	1,61	224,47	538,76
Canarias	1,38	172,82	446,96
Cantabria	1,38	198,42	563,91
Castilla y León	2,30	311,06	995,60
C.-La Mancha	1,38	175,93	505,01
Cataluña	2,14	346,91	848,06
Ceuta y Melilla	1,36	190,48	493,51
C. Valenciana	1,70	233,60	714,26
Extremadura	0,59	73,88	203,90
Galicia	1,43	191,12	541,64
Madrid, C. de	2,23	379,64	923,48
Murcia, R. de	1,53	191,13	518,30
Navarra, C. F. de	1,38	235,37	656,57
País Vasco	1,20	221,81	651,63
Rioja, La	1,34	182,51	516,72
España	**1,81**	**273,58**	**736,62**

Fuente: Elaboración propia a partir de INE (2004b).

por el número medio de horas trabajadas por la sociedad a lo largo de todo el año. En cierta forma, esta cuantía puede interpretarse como la subvención que deberíamos dar a la sociedad (en términos per cápita) como consecuencia de la discriminación.

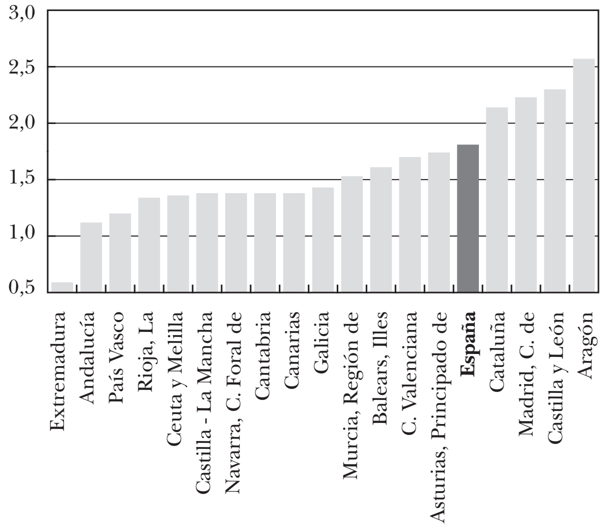
Una cuestión diferente es cómo distribuir esta hipotética subvención en el caso de que estuviera disponible. Aunque no existe una solución única a este problema de reparto, la tercera columna trata de responder a esta cuestión, a partir de un criterio razonable en este contexto. Puesto que las mujeres perciben un salario menor que el de los hombres en todos los casos, parece lógico distribuir la hipotética subvención solamente entre ellas. La cifra que aparece en esta columna indica el importe que debería recibir cada mujer si el monto total fuera distribuido de forma uniforme. En conjunto, este mecanismo empuja a las mujeres hacia la ganancia promedio de la sociedad antes de la subvención.

El primer resultado que llama fuertemente la atención es que, frente al hecho de que las mujeres obtienen una ganancia por hora trabajada sustancialmente menor que los hombres de acuerdo con todas nuestras variables de clasificación, la pérdida porcentual de bienestar debida a la desigualdad de oportunidades resulta tremendamente baja. A nivel nacional podemos situarla entre el 1,24% del bienestar total, (14.1), cuando definimos las categorías de trabajadores en función de los niveles educativos y tipos de ocupación, y el 1,81% cuando utilizamos solo los niveles educativos.[264]

Centrándonos en el caso de la definición de categorías de trabajadores solo en función de los niveles educativos, observamos además una gran dispersión por comunidades autónomas. El gráfico 14.5 permite apreciar esta afirmación. Destaca el escaso porcentaje de pérdida de bienestar obtenido para Extremadura. Ya observamos que, a nivel agregado, esta comunidad era la que aparecía con un menor nivel de discriminación salarial de la mujer (cuadro 14.1 y gráfico 14.2), y esto acaba traduciéndose en pér-

[264] Nuestros resultados son, sin embargo, compatibles con los obtenidos por García Pérez y Villar (2006) a partir del Panel de Hogares de la Unión Europea (PHOGUE) para España, Francia, Alemania e Italia y un periodo más dilatado de tiempo, 1994-2001.

GRÁFICO 14.5: Pérdida de bienestar debida a la desigualdad de oportunidades. Grupos isoesfuerzo: niveles educativos
(porcentaje)



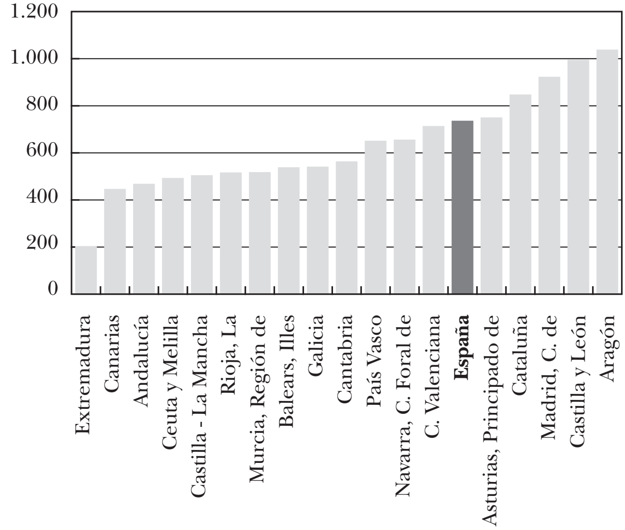
Fuente: Elaboración propia a partir de INE (2004b).

didas porcentuales de bienestar extremadamente bajas. Por otra parte, las comunidades que mayor discriminación registraban, Cataluña, la Comunidad de Madrid, Castilla y León y Aragón, son, en este orden, las que mayores pérdidas de bienestar registran.

Una valoración monetaria en euros por año de esta pérdida de bienestar la obtenemos a partir de nuestra medida de discriminación, $D(\mathbf{y})$, en términos per cápita y el número medio de horas trabajadas por el conjunto de la sociedad. Esta valoración también se ofrece, para cada criterio de categorías de trabajadores, en el cuadro 14.10. Considerando la definición de categorías de trabajadores solo en función de los niveles educativos, obtenemos, a nivel nacional, una cuantía de alrededor de 275 euros, con importantes discrepancias a nivel regional, que van desde los menos de 100 euros para Extremadura, fruto no solo de su menor pérdida relativa de bienestar, sino también de un número de horas trabajadas inferior al promedio nacional, a los más de 370 euros que obtenemos para Aragón o la Comunidad de Madrid, consecuencia fundamentalmente de su mayor valoración de la pérdida rela-

GRÁFICO 14.6: Subvención a las mujeres por la discriminación salarial. Grupos isoesfuerzo: niveles educativos

(euros por año)



Fuente: Elaboración propia a partir de INE (2004b).

tiva de bienestar, ya que ambas comunidades presenta un número medio de horas trabajadas en el entorno del promedio nacional.

Finalmente, ofrecemos una estimación de la subvención que deberían recibir las mujeres como consecuencia de su discriminación salarial en razón de género, si la valoración monetaria anterior estuviera disponible en forma de subvención y esta fuera destinada íntegramente al sexo con menor remuneración. El gráfico 14.6 ofrece una impresión visual de estas subvenciones por comunidades autónomas cuando las categorías de trabajadores están definidas solo en función de los niveles educativos. Aunque se observa un perfil similar al del gráfico 14.5, son de destacar algunas alteraciones importantes, como consecuencia tanto del esfuerzo diferencial en las horas trabajadas, como de la composición por sexos de la fuerza de trabajo en las diferentes comunidades.

El carácter aditivo de nuestra medida de discriminación permite que podamos descomponerla para cada categoría de trabajadores. A efectos ilustrativos el cuadro 14.11 ofrece la pérdida porcentual de bienestar a nivel nacional por niveles educativos.

CUADRO 14.11: **Discriminación de género en la población asalariada por nivel de estudios. España**
(porcentaje)

1. Sin estudios	0,93
2. Educación primaria	1,41
3. Educación secundaria I	1,50
4. Educación secundaria II	2,68
5. Formación profesional grado medio	1,79
6. Formación profesional grado superior	1,58
7. Diplomados	1,50
8. Licenciados y doctores	2,39
Todos	**1,81**

Fuente: Elaboración propia a partir de INE (2004b).

Observamos que los mayores porcentajes de pérdida de bienestar se dan en aquellos grupos educativos donde la ganancia relativa de las mujeres es menor, 4, *Educación secundaria II (2.º ciclo),* y 8, *Licenciados, ingenieros superiores y doctores,* es decir donde mayor discriminación salarial observamos (cuadro 14.2). Aun así, la pérdida relativa de bienestar es pequeña, porque las discrepancias entre hombres y mujeres son más pequeñas que las que existen entre los propios niveles educativos (cuadro 14.2). En principio, sería perfectamente posible diseñar un mecanismo de subvenciones en el que la cantidad recibida por mujer dependiera de la categoría a la que pertenece y de la discriminación específica dentro de dicha categoría.

En resumen, en líneas generales, nuestra valoración de la pérdida porcentual del bienestar debida a la desigualdad de oportunidades es bastante reducida, algo inferior al 2% a nivel nacional y, en consecuencia, la subvención que deberíamos dar a las mujeres por su discriminación salarial no es muy elevada. Estos resultados deben ser cualificados en, al menos, dos direcciones.

En primer lugar, limitándonos a nuestra medida de discriminación (solo parte de los trabajadores asalariados), debemos tener en cuenta que hemos identificado esfuerzo con niveles educativos, tipos de ocupación y/o ramas de actividad donde el trabajador presta sus servicios, y ya hemos observado en el epígrafe anterior cómo la mayor parte de las desigualdades están en este tipo de variables de clasificación, no en el sexo per se de los trabajadores. Identificar estas variables con el grado de esfuerzo significa que estas desigualdades no son consideradas en la valoración social de la distribución de rentas laborales calculada mediante (14.1) y, en consecuencia, las desigualdades que quedan sin considerar resultan ser las de mayor entidad.

La conclusión es, por tanto, que las principales diferencias salariales observadas no se deben estrictamente al género, sino a las variables que, en nuestra terminología, identifican el grado de esfuerzo.

Como ya indicamos al principio de este capítulo la elección de las variables que asociamos al tipo y aquellas que asociamos a la categoría de trabajadores afecta sustancialmente a nuestra medición de la discriminación. Si entendemos que las características mencionadas entran (al menos parcialmente) dentro de la esfera de la autonomía individual (son modificables por los individuos, al contrario que el sexo) entonces la discriminación salarial observada se debe, en gran medida, a factores que los propios individuos pueden, con el paso del tiempo, alterar modificando sus comportamientos. Obviamente no en un momento dado, pero sí a lo largo del tiempo, quizá incluso de una generación a otra. El mensaje es, pues, que la discriminación está, más que en los salarios, en otros ámbitos, en concreto en la educación, el tipo de ocupación y la rama de actividad donde las mujeres prestan sus servicios laborales; alterando estas características de la población femenina resolveremos gran parte de la discriminación.[265]

En segundo lugar, nuestra medida de discriminación ignora, como también mencionamos al principio del capítulo, los problemas de acceso a un puesto de trabajo (una vez el individuo ha decidido participar en el mercado laboral), es decir, las mayores o menores dificultades de las mujeres, frente a los hombres, de conseguir una remuneración salarial y, además, y quizá más importan-

[265] Esta evidencia es complementaria de la ofrecida en Simón (2006), quien muestra la importancia de los factores asociados al establecimiento donde prestan sus servicios las mujeres.

te, la cuestión de la participación en dicho mercado, es decir, la discriminación existente detrás de la clasificación de la población en edad de trabajar en activos e inactivos. Cálculos adicionales por parte de García Pérez y Villar (2006) a partir de otra fuente de información (PHOGUE), relativa a más países y diferentes años, tratando de incorporar estos factores al análisis, muestran que la discriminación derivada de estas cuestiones es mayor que la de origen puramente salarial.

APÉNDICES

A.1. Notas técnicas

A.1.1. Medias generalizadas

En esta nota técnica presentamos algunas propiedades útiles de lo que podemos denominar *medias generalizadas*, o medias de orden α, que aparecen con frecuencia en las discusiones relativas a la desigualdad.

Dado un vector de n elementos *no negativos,*[266] $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, de forma que $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n_+$, definimos su media generalizada, o media de orden α, a la función[267]

$$\mu_\alpha = \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i^\alpha \right]^{\frac{1}{\alpha}} \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R} \tag{A.1.1}$$

El parámetro α puede tomar cualquier valor real, positivo o negativo, incluidos los extremos, $-\infty$ y $+\infty$, que más adelante consideraremos, o el valor $\alpha = 0$, en todos estos casos la fórmula anterior requiere una reinterpretación.

Para el caso $\alpha = 0$, tomando logaritmos en (A.1.1) y utilizando la regla de L'Hôpital, obtenemos la media geométrica como un caso límite (Kendall y Stuart 1977),

---

[266] La literatura considera normalmente el caso en que los elementos de $\mathbf{x}$ son no-negativos, de forma que $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n_+$ (Steele 2004, cap. 8), sin embargo las situaciones en las que algún elemento de $\mathbf{x}$ es cero carecen de interés, ya que entonces el valor de la función (A.1.1) es siempre nulo, $\mu_\alpha = 0$ para $\alpha \leq 0$ (Magnus y Neudecker 1988). Por ello podríamos restringirnos, sin pérdida de generalidad, a situaciones en las que los elementos de $\mathbf{x}$ son estrictamente positivos, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n_{++}$.

Por otra parte, en nuestro contexto, ya restringimos en la introducción el dominio de definición de la renta a valores estrictamente positivos.

[267] Esta no es la única generalización posible de la media aritmética. En el contexto de la medición de la desigualdad en términos absolutos, podemos encontrar la familia de medias propuesta por Kolm (1976a, 1976b). Más generalmente podemos consultar la completa obra de Bullen (2003).

$$\lim_{\alpha\to 0}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^{\alpha}\right]^{\frac{1}{\alpha}}=\prod_{i=1}^{n}x_i^{1/n} \qquad \text{(A.1.2)}$$

Este tipo de funciones juega un papel muy importante en economía[268] y, en particular, en el análisis de la desigualdad. Obsérvese, por ejemplo, que la renta igualitaria equivalente para la función de aversión a la desigualdad constante, utilizada en la derivación de la familia de índices de Atkinson (1970), es una media de orden $1-\varepsilon$ de la distribución de la renta y, en consecuencia, A_ε no es más que la diferencia respecto a la unidad de la media de orden $1-\varepsilon$ de la distribución de la renta relativa. Podemos pensar pues, en nuestro contexto, que x_i representa la renta relativa, y_i/μ, en cuyo caso x_i es estrictamente positiva bajo nuestros supuestos.[269]

Con esta notación es útil escribir la familia de índices de Atkinson (1970) como,

$$A_\varepsilon = 1-\frac{\mu_{1-\varepsilon}}{\mu} \qquad \varepsilon>0 \qquad \text{(A.1.3)}$$

donde para $\varepsilon = 1$ obtenemos $A_1 = 1-\left(\tilde{\mu}/\mu\right)$, puesto que $\mu_0=\tilde{\mu}$.

De igual forma podemos escribir la familia de índices de entropía generalizada para $\theta \neq 0{,}1$ como,

$$I_\theta = \frac{1}{\theta(\theta-1)}\left[\left(\frac{\mu_\theta}{\mu}\right)^{\theta}-1\right] \qquad \text{(A.1.4)}$$

con los valores límite correspondientes para $\theta = 0$ y $\theta = 1$.

Las medias generalizadas poseen muchas propiedades interesantes en nuestro contexto. Las más útiles que debemos conocer son las siguientes:

— La función μ_α es homogénea de grado uno, $\forall\lambda>0$, se verifica que $\mu_\alpha(\lambda\mathbf{x})=\lambda.\mu_\alpha(\mathbf{x})$

---

[268] Si multiplicamos μ_α por una constante entonces obtenemos las funciones CES, es decir, las que presentan *elasticidad de sustitución constante*.

[269] También podríamos pensar en x_i como en desviaciones de la renta respecto a la media, $y_i-\mu$, como cuando definimos la desviación media relativa generalizada en el capítulo 2. En este caso, no se verifica el requisito de no-negatividad, lo que no constituye un problema acotando en rango de valores posibles para α.

— La función μ_α es no decreciente como función de $\alpha \in \mathbb{R}$. Esto es, para todo par de valores $-\infty < \beta < \alpha < +\infty$ se verifica

$$\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^{\beta}\right]^{\frac{1}{\beta}} \leq \left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^{\alpha}\right]^{\frac{1}{\alpha}} \qquad \text{(A.1.5)}$$

Con igualdad, si y solo si $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

Esta importante propiedad puede ser verificada mediante cálculo.[270]

A partir de la definición (A.1.1), elevando a α a ambos lados de la igualdad y tomando logaritmos podemos escribir

$$\alpha \log \mu_\alpha = \log\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^{\alpha}\right]$$

Diferenciando esta expresión con respecto a α obtenemos

$$\log \mu_\alpha + \frac{\alpha}{\mu_\alpha}\frac{\partial \mu_\alpha}{\partial \alpha} = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^{\alpha} \log x_i}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^{\alpha}}$$

Definiendo $z_i = x_i^{\alpha}$ y considerando el caso de valores estrictamente positivos, $x_i \in \mathbb{R}_{++}$, observamos que $x_i > 0$ implica $z_i > 0$, y que, $\log z_i = \alpha.\log x_i$,

$$\bar{z} = \frac{\Sigma_{i=1}^{n} z_i}{n} = \frac{\Sigma_{i=1}^{n} x_i^{\alpha}}{n} = \mu_\alpha^{\alpha}$$

y $\log \bar{z} = \alpha \log \mu_\alpha$.

A partir de estas expresiones podemos escribir,

$$\frac{1}{\alpha}\log \bar{z} + \frac{\alpha}{\mu_\alpha}\frac{\partial \mu_\alpha}{\partial \alpha} = \frac{1}{\alpha}\frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} z_i \log z_i}{\bar{z}}$$

[270] Demostraciones alternativas de este resultado pueden encontrase en Kendall y Stuart (1977) o en Steele (2004, cap. 8). La demostración que se ofrece a continuación es paralela a la demostración de que la familia de índices de Atkinson (1970), A_ε, siempre crece conforme $\varepsilon > 0$ aumenta (Cowell 1995).

Lo que nos permite derivar el siguiente resultado,

$$\frac{\partial \mu_\alpha}{\partial \alpha} = \left[\frac{\mu_\alpha}{\bar{z}\alpha^2}\right]\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} z_i \log z_i - \bar{z}\log \bar{z}\right]$$

Puesto que el primer término a la derecha de esta igualdad es estrictamente positivo[271] el signo de esta derivada depende del segundo término. Es fácil comprobar que la función $z.\log z$ es estrictamente convexa, su segunda derivada es $(1/z) > 0$, $\forall z > 0$, por lo que la desigualdad de Jensen garantiza que el segundo término también es estrictamente positivo y, en consecuencia

$$\frac{\partial \mu_\alpha}{\partial \alpha} > 0$$

Por tanto μ_α nunca decrece con α para ningún vector **x**. Además si **x** es estrictamente positivo y no todos sus elementos son iguales, entonces la media generalizada de orden α es una función estrictamente creciente de α.

— La función μ_α es monótona en cada uno de los elementos de **x**. De nuevo mediante cálculo podemos observar que

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mu_\alpha}{\partial x_i} &= \frac{1}{\alpha}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^\alpha\right]^{\frac{1}{\alpha}-1}\left[\frac{1}{n}\alpha x_i^{\alpha-1}\right] \\ &= \frac{1}{n}\mu_\alpha^{1-\alpha} x_i^{\alpha-1} > 0 \quad \forall x_i > 0\end{aligned} \tag{A.1.6}$$

— La función μ_α es cóncava como función de **x** para $\alpha \leq 1$ y convexa como función de **x** para $\alpha \geq 1$ (Magnus y Neudecker 1988, cap. 11, teorema 33).[272]

[271] La derivación excluye el caso $\alpha=0$, que se sigue posteriormente de la continuidad de μ_α como función de α establecida en (A.1.2).

[272] En concreto:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \mu_\alpha}{\partial x_i^2} &= \frac{1}{n}\left[(1-\alpha)\mu_\alpha^{-\alpha}\frac{\partial \mu_\alpha}{\partial x_i} x_i^{\alpha-1} + (\alpha-1)\mu_\alpha^{1-\alpha} x_i^{\alpha-2}\right] = \frac{1}{n}(1-\alpha)\frac{1}{\mu_\alpha^\alpha} x_i^{\alpha-1}\left[\frac{1}{n}\mu_\alpha^{1-\alpha} x_i^{\alpha-1} - \mu_\alpha x_i^{-1}\right] \\ &= \frac{1}{n^2}(1-\alpha)\frac{\mu_\alpha^{1-\alpha}}{\mu_\alpha^\alpha} x_i^{\alpha-2}\left[x_i^\alpha - n\mu_\alpha^\alpha\right] = \frac{1}{n^2}(1-\alpha)\frac{\mu_\alpha^{1-\alpha}}{\mu_\alpha^\alpha} x_i^{\alpha-2}\left[x_i^\alpha - \sum_{j=1}^{n} x_j^\alpha\right]\end{aligned}$$

— Casos especiales:

a) Para $\alpha = 2$,

$$\mu_2 = \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

Claramente relacionada con la norma euclídea o el segundo momento de **x**.

b) Para $\alpha = 1$,

$$\mu_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i = \mu \text{, la media aritmética.}$$

c) Para $\alpha = 0$,

$$\mu_0 = \prod_{i=1}^{n} x_i^{1/n} = \tilde{\mu} \text{, la media geométrica.}$$

d) Para $\alpha = -1$,

$$\mu_{-1} = \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i^{-1} \right]^{-1} = \frac{1}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{x_i} \right)} \text{, la media armónica.}$$

Dado el comportamiento de μ_α, observamos la conocida desigualdad entre estas tres medias (Kendall y Stuart 1977), $\mu_{-1} \leq \tilde{\mu} \leq \mu$,

$$\frac{1}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{x_i} \right)} \leq \prod_{i=1}^{n} x_i^{1/n} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$$

---

por tanto,

$$\frac{\partial^2 \mu_\alpha}{\partial x_i^2} = \frac{1}{n^2} (\alpha - 1) \frac{\mu_\alpha^{1-\alpha}}{\mu_\alpha^\alpha} x_i^{\alpha-2} \sum_{j \neq i} x_j^\alpha \quad \begin{cases} \geq 0 & \text{si} \quad \alpha \geq 1 \\ \leq 0 & \text{si} \quad \alpha \leq 1 \end{cases}$$

Y

$$\frac{\partial^2 \mu_\alpha}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{1}{n} (1 - \alpha) \mu_\alpha^{-\alpha} \frac{\partial \mu_\alpha}{\partial x_j} x_i^{\alpha-1} = \frac{1}{n^2} (1 - \alpha) \frac{\mu_\alpha^{1-\alpha}}{\mu_\alpha^\alpha} x_j^{\alpha-1} x_i^{\alpha-1} \quad \begin{cases} \geq 0 & \text{si} \quad \alpha \leq 1 \\ \leq 0 & \text{si} \quad \alpha \geq 1 \end{cases}$$

que tomando inversas nos proporciona una cota inferior a la media de los recíprocos de x,

$$\frac{1}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i} \leq \frac{1}{\prod_{i=1}^{n} x_i^{1/n}} \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{x_i}\right)$$

— Comportamiento de μ_α en los extremos.

Es posible demostrar que (Steel 2004, cap. 8), Magnus y Neudecker (1988, cap. 11, teorema 31),

$$\text{a)}\quad \lim_{\alpha\to+\infty}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^{\alpha}\right]^{\frac{1}{\alpha}} = max\{x_i\}_{i=1}^{n} = \mu_{\infty}$$

$$\text{b)}\quad \lim_{\alpha\to-\infty}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^{\alpha}\right]^{\frac{1}{\alpha}} = min\{x_i\}_{i=1}^{n} = \mu_{-\infty}$$

Por lo tanto tenemos la siguiente desigualdad, tan obvia como útil,

$$min\{x_i\}_{i=1}^{n} \leq \left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^{\alpha}\right]^{\frac{1}{\alpha}} \leq max\{x_i\}_{i=1}^{n} \qquad \forall\alpha\in\mathbb{R} \qquad \text{(A.1.7)}$$

— Si $\mathbf{x}^{-1}$ indica el vector de recíprocos,

$$\mathbf{x}^{-1} = \left(\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \ldots, \frac{1}{x_n}\right)$$

es fácil verificar la identidad $\mu_{-\alpha}(\mathbf{x}) = \mu_\alpha^{-1}(\mathbf{x}^{-1})$. A partir de la definición (A.1.1),

$$\mu_{-\alpha}(\mathbf{x}) = \left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha}\right]^{-\frac{1}{\alpha}} = \frac{1}{\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{x_i}\right)^{\alpha}\right]^{\frac{1}{\alpha}}} = \frac{1}{\mu_\alpha(\mathbf{x}^{-1})} = \mu_\alpha^{-1}(\mathbf{x}^{-1})$$

A.1.2. Propiedades de la función $P_\alpha(n, \mathbf{y})$

Las siguientes propiedades de la función

$$P_\alpha(n,\mathbf{y}) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} VL(\mathbf{y}) & \alpha = 0 \\ \dfrac{1}{\alpha} \log \dfrac{\mu_\alpha}{\tilde{\mu}} & \alpha \neq 0 \end{cases}$$

son interesantes en nuestro contexto:

— Cada miembro de la familia $P_\alpha(n, \mathbf{y})$, para $\alpha \neq 0$, se basa en la comparación de μ_α frente a la *media geométrica,* $\tilde{\mu}$. Por su parte vale la pena observar que tanto la *familia de entropía generalizada,*

$$I_\theta = \frac{1}{\theta(\theta-1)}\left[\left(\frac{\mu_\theta}{\mu}\right)^\theta - 1\right]$$

para $\theta \neq 0{,}1$, como la familia de Atkinson (1970),

$$A_\varepsilon = 1 - \frac{\mu_{1-\varepsilon}}{\mu} \quad \varepsilon > 0$$

se basan en la comparación de μ_θ y $\mu_{1-\varepsilon}$, respectivamente, frente a la media aritmética, μ.[273]

— La familia $P_\alpha(n, \mathbf{y})$ es continua en α para cada $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n_{++}$. Esto es inmediato para $\alpha \neq 0$, pero requiere un comentario para el caso $\alpha = 0$. Considérese la distribución que transforma cada renta, y_i, en la potencia de orden α, es decir $z_i = y_i^\alpha \; \forall i$, de forma que $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \ldots, z_n) = (y_1^\alpha, y_2^\alpha, \ldots, y_n^\alpha)$. Puesto que

$$\mu_\alpha(\mathbf{y}) = \left[\mu(\mathbf{z})\right]^{\frac{1}{\alpha}} \quad \text{y} \quad \tilde{\mu}(\mathbf{y}) = \left[\tilde{\mu}(\mathbf{z})\right]^{\frac{1}{\alpha}}$$

podemos escribir,

$$T^*(\mathbf{z}) = \log \frac{\mu(\mathbf{z})}{\tilde{\mu}(\mathbf{z})} = \log\left(\frac{\mu_\alpha(\mathbf{y})}{\tilde{\mu}(\mathbf{y})}\right)^\alpha = \alpha \log \frac{\mu_\alpha(\mathbf{y})}{\tilde{\mu}(\mathbf{y})} = \alpha^2 P_\alpha(\mathbf{y})$$

[273] Para una interpretación de P_α en términos de las medidas de desigualdad absolutas de Kolm (1976a, 1976b) puede verse Foster y Shneyerov (2000).

o alternativamente,

$$P_\alpha(\mathbf{y}) = \frac{1}{\alpha^2} T^*(\mathbf{z})$$

de forma que $P_\alpha(\mathbf{y})$ es proporcional al segundo índice de Theil aplicado a la distribución que transforma cada renta, y_i, en la potencia de orden α, $z_i = y_i^\alpha \ \forall i$.

A partir de esta identidad, y mediante el recurso a la regla de L'Hôpital aplicada dos veces,[274] podemos encontrar la forma funcional correspondiente al valor $\alpha = 0$,

$$P_0(\mathbf{y}) = \frac{1}{2} VL(\mathbf{y})$$

lo que muestra la relación entre el segundo índice de Theil, T^*, y VL.

— La identidad

$$P_\alpha(\mathbf{y}) = \frac{1}{\alpha^2} T^*(\mathbf{z})$$

proporciona también intuición adicional acerca del parámetro α. La función y^α es estrictamente convexa para $\alpha > 1$ y $\alpha < 0$ y estrictamente cóncava para $0 < \alpha < 1$. El gráfico A.1.1, en sus paneles *a* y *b*, ilustra todas las situaciones posibles.[275] Podemos observar como el comportamiento de la función y^α, cuando y aumenta, es muy diferente según los distintos valores que tome α. En concreto, para $\alpha < 1$ el valor absoluto de la pendiente de la función disminuye conforme aumenta y. De esta forma observamos cómo la función es más sensible a variaciones en los tramos inferiores de la distribución cuanto menor es α.[276] Lo contrario

[274] Obsérvese que

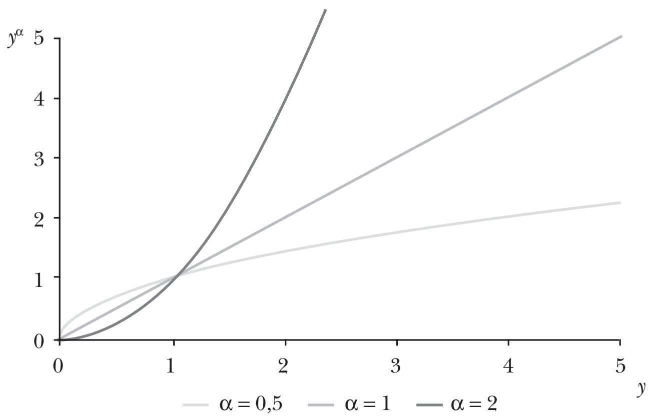
$$T^*(\mathbf{z}) = \log \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} y_i^\alpha - \alpha \log \tilde{\mu}(\mathbf{y})$$

[275] Obsérvese que el panel *b* del gráfico A.1.1 es idéntico al gráfico 4.2 que ilustra la utilidad marginal de una función de utilidad con aversión a la desigualdad constante.

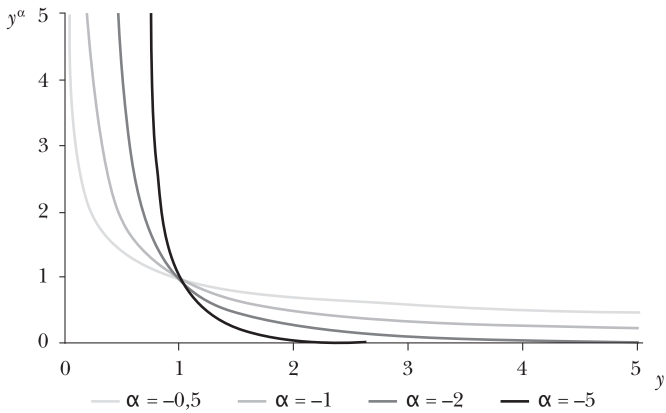
[276] De forma simétrica la función es menos sensible a variaciones en los tramos superiores de la distribución cuanto menor es α.

GRÁFICO A.1.1: Transformación potencial, y^α

a) $\alpha > 0$



b) $\alpha < 0$



Fuente: Elaboración propia.

es cierto para valores de $\alpha > 1$. En este sentido la familia $P_\alpha(n, \mathbf{y})$ es similar a la familia $I_\theta(n, \mathbf{y})$, ya que sus respectivos parámetros reflejan la sensibilidad del índice a transferencias en diferentes partes de la distribución, pero recuérdese que $P_\alpha(n, \mathbf{y})$ solo verifica el principio de las transferencias de Pigou-Dalton para $\alpha \geq 1$.

— Desde el punto de vista del cálculo es útil disponer de una fórmula para la descomposición de $P_\alpha(n, \mathbf{y})$ similar a la que tenemos para el resto de índices, en lugar de hacer descasar el cómputo sobre la generación de las *distribuciones suavizadas* y *estandarizadas*. Procediendo como en casos anteriores,

$$\begin{aligned}
P_\alpha(n,\mathbf{y}) &= \frac{1}{\alpha}\frac{1}{n}\sum_{g=1}^{G}\sum_{i=1}^{n_g}\log\frac{\mu_\alpha}{y_i^g} \\
&= \frac{1}{\alpha}\frac{1}{n}\sum_{g=1}^{G}\sum_{i=1}^{n_g}\log\frac{\mu_{\alpha,g}}{y_i^g}\frac{\mu_\alpha}{\mu_{\alpha,g}} \\
&= \frac{1}{\alpha}\sum_{g=1}^{G}\sum_{i=1}^{n_g}\frac{1}{n}\left(\log\frac{\mu_{\alpha,g}}{y_i^g}+\log\frac{\mu_\alpha}{\mu_{\alpha,g}}\right) \\
&= \frac{1}{\alpha}\sum_{g=1}^{G}\frac{n_g}{n}\left[\frac{1}{n_g}\sum_{i=1}^{n_g}\log\frac{\mu_{\alpha,g}}{y_i^g}+\log\frac{\mu_\alpha}{\mu_{\alpha,g}}\right] \\
&= \sum_{g=1}^{G}\frac{n_g}{n}\underbrace{\frac{1}{\alpha}\frac{1}{n_g}\sum_{i=1}^{n_g}\log\frac{\mu_{\alpha,g}}{y_i^g}}_{P_\alpha^g}+\frac{1}{\alpha}\sum_{g=1}^{G}\frac{n_g}{n}\log\frac{\mu_\alpha}{\mu_{\alpha,g}}
\end{aligned}$$

Al igual que anteriormente el primer término de la expresión final de este desarrollo nos da la suma ponderada de los índices P_α *dentro de* los grupos, y dónde las ponderaciones reflejan la importancia demográfica de cada grupo.

Obsérvese que $P_\alpha^g(n_g,\mathbf{y}^g)$ puede ser escrito como

$$\begin{aligned}
P_\alpha^g(n_g,\mathbf{y}^g) &= \frac{1}{\alpha}\frac{1}{n_g}\sum_{i=1}^{n_g}\log\frac{\mu_{\alpha,g}}{y_i^g} \\
&= \frac{1}{\alpha}\left(\log\mu_{\alpha,g}-\frac{1}{n_g}\sum_{i=1}^{n_g}\log y_i^g\right) \\
&= \frac{1}{\alpha}\left(\log\mu_{\alpha,g}-\log\tilde{\mu}_g\right) \\
&= \frac{1}{\alpha}\log\frac{\mu_{\alpha,g}}{\tilde{\mu}_g}
\end{aligned}$$

El segundo término de la expresión anterior no es más que el índice de desigualdad P_α aplicado a la distribución suavizada, en la que a cada individuo se le asigna la renta representativa del grupo al que pertenece, que viene dada por $\mu_{\alpha,g}$. Obsérvese que este segundo término puede ser escrito como

$$\begin{aligned}
P_{\alpha,B} &= \frac{1}{\alpha}\sum_{g=1}^{G}\frac{n_g}{n}\log\frac{\mu_\alpha}{\mu_{\alpha,g}} \\
&= \frac{1}{\alpha}\left[\log\mu_\alpha - \sum_{g=1}^{G}\frac{n_g}{n}\log\mu_{\alpha,g}\right] \\
&= \frac{1}{\alpha}\left[\log\mu_\alpha - \log\prod_{g=1}^{G}\mu_{\alpha,g}^{n_g/n}\right] \\
&= \frac{1}{\alpha}\left[\log\frac{\mu_\alpha}{\Pi_{g=1}^{G}\mu_{\alpha,g}^{n_g/n}}\right] \\
&= \frac{1}{\alpha}\log\frac{\mu_\alpha}{\tilde{\mu}_B}
\end{aligned}$$

De aquí,

$$P_\alpha(n,\mathbf{y}) = \underbrace{\sum_{g=1}^{G}\frac{n_g}{n}P_\alpha^g(n_g,\mathbf{y}^g)}_{P_{\alpha,W}} + \underbrace{\frac{1}{\alpha}\log\frac{\mu_\alpha}{\tilde{\mu}_B}}_{P_{\alpha,B}}$$

A.1.3. Propiedades de la función $I_{\theta\alpha}^*(n,\mathbf{y})$

Las siguientes propiedades de la función

$$I_{\theta\alpha}^*(n,\mathbf{y}) = \begin{cases}
\dfrac{1}{\theta(\theta-\alpha)}\left[\left(\dfrac{\mu_\theta}{\mu_\alpha}\right)^{\theta} - 1\right] & \theta \neq 0, \quad \alpha \neq \theta \\
\dfrac{1}{\alpha}\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\dfrac{y_i}{\mu_\alpha}\right)^{\alpha}\log\dfrac{y_i}{\mu_\alpha} & \theta \neq 0, \quad \alpha = \theta \\
\dfrac{1}{\alpha}\log\dfrac{\mu_\alpha}{\tilde{\mu}} & \theta = 0, \quad \alpha \neq 0 \\
\dfrac{1}{2}VL(\mathbf{y}) & \theta = 0, \quad \alpha = 0
\end{cases}$$

son interesantes en nuestro contexto:

a) Ya hemos observado que $I^*_{\theta 1} = I_\theta$ y $I^*_{0\alpha} = P_\alpha$, pero hay otras familias que podemos derivar de $I^*_{\theta\alpha}(n, \mathbf{y})$ con propiedades interesantes.

— Para $\alpha = 0$ obtenemos,

$$I^*_{\theta 0}(n, \mathbf{y}) = \begin{cases} \dfrac{1}{\theta^2}\left[\left(\dfrac{\mu_\theta}{\tilde{\mu}}\right)^\theta - 1\right] & \theta \neq 0 \\ \dfrac{1}{2} VL(\mathbf{y}) & \theta = 0 \end{cases}$$

Este resultado generaliza la varianza de los logaritmos, *VL*, a toda una familia de índices que son aditivamente descomponibles con referencia a la media geométrica.

Obsérvese que el caso $\theta = 0$ se obtiene mediante el recurso a la regla de L'Hôpital aplicada dos veces.[277]

— Para $\theta = 1$ obtenemos,

$$I^*_{1\alpha}(n, \mathbf{y}) = \begin{cases} \dfrac{1}{(1-\alpha)}\left[\dfrac{\mu}{\mu_\alpha} - 1\right] & \alpha \neq 1 \\ T(\mathbf{y}) & \alpha = 1 \end{cases}$$

Este resultado tiene cierta semejanza con la familia de índices de Atkinson (1970), puesto que

$$A_\varepsilon = 1 - \frac{\mu_{1-\varepsilon}}{\mu}, \quad \varepsilon > 0$$

aunque carece de fundamentos en términos de bienestar y está definida para cualquier valor del parámetro, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Obsérvese que el caso $\alpha = 1$ se obtiene mediante el recurso a la regla de L'Hôpital.

[277] Obsérvese que para $\theta \neq 0$

$$I^*_{\theta 0}(n, \mathbf{y}) = \frac{1}{n}\frac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^{n}\left[\left(\frac{y_i}{\tilde{\mu}}\right)^\theta - 1\right]$$

— Para $\theta = \alpha$ obtenemos,

$$I^*_{\alpha\alpha}(n,\mathbf{y}) = \begin{cases} \dfrac{1}{n}\dfrac{1}{\alpha}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\left(\dfrac{y_i}{\mu_\alpha}\right)^{\alpha}\log\dfrac{y_i}{\mu_\alpha} & \alpha \neq 0 \\ \dfrac{1}{2}VL(\mathbf{y}) & \alpha = 0 \end{cases}$$

Lo que constituye una generalización del índice de Theil (1967), T.

Obsérvese que el caso $\alpha = 0$ se obtiene mediante el recurso a la regla de L'Hôpital.

b) La familia $I^*_{\theta\alpha}(n,\mathbf{y})$ es continua como función de los parámetros θ y α para cada $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n_{++}$. Esto es inmediato para el caso general, en el que $\theta \neq 0$ y $\alpha \neq \theta$, y para el resto de casos se sigue de la aplicación de la regla de L'Hôpital una o dos veces.

c) Aunque el teorema (7.2) no requiere ningún supuesto de continuidad resulta obvio que la familia $I^*_{\theta\alpha}(n,\mathbf{y})$ es continua en $y \in \mathbb{R}_{++}$.

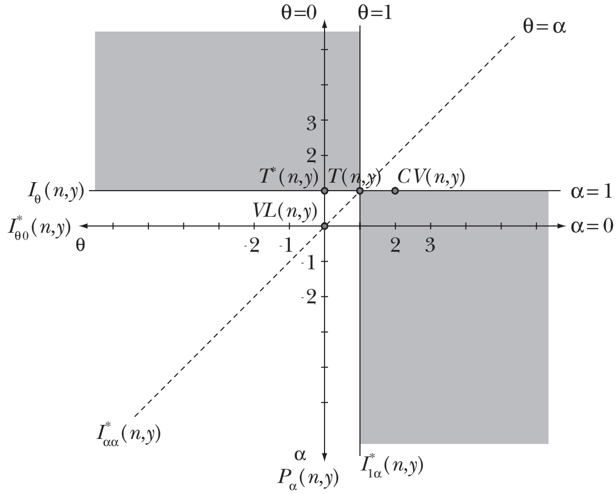
d) Ya hemos observado como $I^*_{\theta\alpha}(n,\mathbf{y})$ satisface el principio de las transferencias de Pigou-Dalton, si y solo si 1) $\theta \geq 1$ y $\alpha \leq 1$ o 2) $\theta \leq 1$ y $\alpha \geq 1$. El conjunto de índices de esta familia que satisfacen dicho principio se muestra en el gráfico A.1.2 con las regiones sombreadas y definidas por los ejes $\theta = 1$ y $\alpha = 1$. Obsérvese como los límites de estas regiones vienen definidos por la familia de índices de entropía generalizados, $I^*_{\theta 1} = I_\theta$, y por $I^*_{1\alpha}$. Estas son las dos únicas familias que satisfacen el principio de las transferencias de Pigou-Dalton para todos sus miembros.

e) A partir de la definición de $I^*_{\theta\alpha}(n,\mathbf{y})$ observamos que para $\theta \neq 0$ y $\alpha \neq \theta$,

$$I^*_{\alpha\theta} = \frac{1}{\alpha(\alpha-\theta)}\left[\left(1+\theta(\theta-\alpha)I^*_{\theta\alpha}\right)^{-\frac{\alpha}{\theta}} - 1\right]$$

Por lo tanto $I^*_{\alpha\theta}(n,\mathbf{y})$ es una transformación monótona positiva de $I^*_{\theta\alpha}(n,\mathbf{y})$, lo que tiene algunas consecuencias interesantes.

GRÁFICO A.1.2: Familia $I^*_{\theta\alpha}(n, \mathbf{y})$ y el principio de las transferencias



Fuente: Elaboración propia.

En primer lugar, mientras que $I^*_{\theta\alpha}(n, \mathbf{y})$ y $I^*_{\alpha\theta}(n, \mathbf{y})$ ordenan las distribuciones en la misma forma, sus respectivas descomposiciones son diferentes.

En segundo lugar, cada medida que satisface la propiedad (7.2) para μ_α dispone de una transformación monótona positiva que satisface la propiedad (7.2) para μ_θ. En concreto, si $I^*_{\theta\alpha}(n, \mathbf{y})$ satisface el principio de las transferencias de Pigou-Dalton, entonces también lo debe satisfacer su medida dual, $I^*_{\alpha\theta}(n, \mathbf{y})$. De esta forma, cada miembro de la familia $I^*_{1\alpha}(n, \mathbf{y})$ es una transformación monótona positiva de algún miembro de la familia de índices de entropía generalizados, $I^*_{\theta 1}(n, \mathbf{y}) = I_\theta(n, \mathbf{y})$, y viceversa. En este sentido $I^*_{1\alpha}(n, \mathbf{y})$ puede ser vista como la familia dual de índices de entropía generalizados, cuyos miembros son descomponibles con respecto a μ_α.

f) Finalmente, consideremos la distribución que transforma cada renta, y_i, en la potencia de orden α, es decir $z_i = y_i^\alpha \ \forall i$, de forma que $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \ldots, z_n) = (y_1^\alpha, y_2^\alpha, \ldots, y_n^\alpha)$. Sea $\theta' = (\theta/\alpha)$, puesto que

$\left[\mu(\mathbf{z})\right]^{\theta'}=\left[\mu_\alpha(\mathbf{y})\right]^{\theta}$ y $\left[\mu_{\theta'}(\mathbf{z})\right]^{\theta'}=\left[\mu_\theta(\mathbf{y})\right]^{\alpha}$ podemos escribir,

$$I_{\theta'}(\mathbf{z})=\frac{1}{\theta'(\theta'-1)}\left[\left(\frac{\mu_{\theta'}(\mathbf{z})}{\mu(\mathbf{z})}\right)^{\theta'}-1\right]$$
$$=\alpha^2.\frac{1}{\theta(\theta-\alpha)}\left[\left(\frac{\mu_\theta(\mathbf{y})}{\mu_\alpha(\mathbf{y})}\right)^{\theta}-1\right]=\alpha^2.I^*_{\theta\alpha}(\mathbf{y})$$

o alternativamente,

$$I^*_{\theta\alpha}(\mathbf{y})=\frac{1}{\alpha^2}I_{\theta'}(\mathbf{z})$$

de forma que $I^*_{\theta\alpha}(\mathbf{y})$ es proporcional a la familia de índices de entropía generalizados con parámetro $\theta'=(\theta/\alpha)$ y aplicado a la distribución que transforma cada renta, y_i, en la potencia de orden α, $z_i=y_i^\alpha\ \forall i$.

Visto de otra forma, para calcular $I^*_{\theta\alpha}(\mathbf{y})$ basta con transformar el vector de rentas y aplicar la familia de índices de entropía generalizados con parámetro $\theta'=(\theta/\alpha)$ al vector transformado de rentas. Obviamente, para $\alpha=1$ obtenemos $I_\theta(\mathbf{y})$, para $\theta=0$ debemos aplicar T^* al vector **z**,[278] para $\theta=\alpha$ debemos aplicar el índice de Theil (1967), T, al vector **z**,

$$I^*_{\alpha\alpha}(n,\mathbf{y})=\frac{1}{\alpha^2}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{y_i}{\mu_\alpha}\right)^{\alpha}\log\left(\frac{y_i}{\mu_\alpha}\right)^{\alpha}$$
$$=\frac{1}{\alpha^2}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{y_i^\alpha}{\mu_\alpha^\alpha}\log\frac{y_i^\alpha}{\mu_\alpha^\alpha}$$
$$=\frac{1}{\alpha^2}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{z_i}{\mu(\mathbf{z})}\log\frac{z_i}{\mu(\mathbf{z})}$$
$$=\frac{1}{\alpha^2}T(\mathbf{z})$$

278 Una relación que ya observamos en la nota técnica A.1.2,

$$P_\alpha(\mathbf{y})=\frac{1}{\alpha^2}T^*(\mathbf{z})$$

y finalmente, para $\theta = \alpha = 0$, $I^*_{\theta\alpha}(\mathbf{y})$ converge a $1/2\,VL(\mathbf{y})$.[279]

Si nos restringimos a los casos en que $0 < \alpha < 1$, entonces sería posible interpretar y_i^α como la función de utilidad, estrictamente cóncava, para el individuo i. En esta situación, $I^*_{\theta\alpha}(\mathbf{y})$ es la desigualdad en la distribución de utilidades, medida esta a través de la familia de índices de entropía generalizados, sin embargo fuera de este rango de valores, $I^*_{\theta\alpha}(\mathbf{y})$ no tiene una interpretación clara en términos de utilidad.

[279] Resultado que puede obtenerse mediante el recurso a la regla de L'Hôpital aplicada dos veces.

A.2. Demostración de la proposición (2.1)

Proposición (2.1)

1) $0 \leq F \leq 1,\ 0 \leq \Phi \leq 1,\ 0 \leq L \leq 1,$
   $F(0) = \Phi(0) = L(0) = 0\ ,\ F(+\infty) = \Phi(+\infty) = L(1) = 1\,.$
2) La curva de Lorenz es creciente en p.
3) La pendiente de la curva de Lorenz, $\dfrac{d\Phi(y)}{dF(y)}$, viene dada por y/μ, para $p \in (0, 1)$.[280]
4) La curva de Lorenz es convexa respecto al eje de abscisas, $p = F(y)$.
5) La pendiente de la curva de Lorenz es igual a la unidad en el cuantil $p^* = F(\mu)$.

Demostración

1) Estas propiedades se derivan directamente de la definición de la curva de Lorenz y nos dicen simplemente que dicha curva está dentro del cuadrado unitario, tiene como origen el punto (0, 0) y como final el punto (1, 1).
2) Esta propiedad también deriva directamente de la definición, ya que conforme incrementamos p añadimos más rentas en la obtención de $L(p)$. Adviértase además que ello implica que la curva de Lorenz es creciente en y. La demostración formal de esta propiedad puede verse en 3).
3) Suponiendo que F es continua y diferenciable,
   $dF(y) = f(y)dy\,.$

[280] Alternativamente podemos representar dicha pendiente como $\left[dL(p)\right]/dp$, que viene dada por $\left[Q(p)\right]/\mu$.

Utilizando la regla de la cadena y diferenciando (2.13) obtenemos[281]

$$\frac{d\Phi(y)}{dF(y)} = \frac{d\Phi(y)}{dy}\frac{dy}{dF(y)} = \frac{y\,f(y)}{\mu}\frac{1}{f(y)} = \frac{y}{\mu}$$

De esta forma, observando la pendiente de la curva de Lorenz en un determinado punto, podemos observar la renta relativa de un individuo que ocupa el cuantil p de la distribución.

La demostración supone que $f(y)$ es no nula en $\mathbb{R}_{++}$ y que no existe igualdad. Si la renta está igualitariamente distribuida entonces la función de distribución viene representada por H en el gráfico 1.2, todas las rentas se concentran en un único punto, μ, y la curva de Lorenz coincide con la línea de igualdad. En este caso

$$\frac{d\Phi(y)}{dF(y)} = 1$$

Puesto que $(y/\mu) > 0$ en todo el dominio de definición de las rentas, esto demuestra formalmente 2).

4) La curva de Lorenz es convexa en p, puesto que conforme aumentamos p, las nuevas rentas que se añaden a la obtención de los porcentajes acumulados de rentas son mayores que las rentas ya tenidas en cuenta anteriormente. Esto se observa claramente si escribimos la pendiente de la curva de Lorenz a partir de la función cuantil,

$$\frac{d\Phi(y)}{dF(y)} = \frac{dL(p)}{dp} = \frac{y}{\mu} = \frac{Q(p)}{\mu}$$

Claramente $Q(p)$ es creciente en p, tal y como muestra el gráfico 4 de la introducción, por lo tanto la pendiente de la curva de Lorenz crece de forma monótona[282] en p y dicha curva es en consecuencia convexa.

---

[281] Ello requiere la diferenciación bajo el signo integral. Sobre la diferenciación bajo el signo integral, fórmula de Leibniz y otras fórmulas útiles a lo largo del texto puede consultarse la excelente recopilación de Sydsæter, Strøm y Berck (2005).

[282] Suponiendo en este caso un mundo continuo.

Matemáticamente, una función es convexa si su segunda derivada es positiva, y cuanto mayor es esta segunda derivada más convexa es la función. Diferenciando de nuevo el resultado anterior,

$$\frac{d^2\Phi(y)}{dF(y)^2} = \frac{d}{dF(y)}\left(\frac{d\Phi(y)}{dF(y)}\right) = \frac{d}{dF(y)}\left(\frac{y}{\mu}\right) = \frac{1}{\mu}\frac{dy}{dF(y)} = \frac{1}{\mu f(y)} > 0$$

Al igual que en el caso anterior, suponemos que *f(y)* es no nula en $\mathbb{R}_{++}$ y que no existe igualdad. En el caso de igualdad

$$\frac{d^2\Phi(y)}{dF(y)^2} = 0$$

Esta propiedad también muestra como la curva de Lorenz más la media de una distribución poseen el mismo contenido informativo que la función de densidad de dicha distribución. En particular, a partir de la relación anterior es posible recuperar la función de densidad, *f(y)* de F(y), conociendo la media de la distribución, μ, y la curvatura de la curva de Lorenz.

5) Si la pendiente de la curva de Lorenz es igual a la unidad,

$$\frac{d\Phi(y)}{dF(y)} = 1$$

y no existe igualdad, ello implica, a partir de 3), que en dicho punto el nivel de renta es $y = \mu$. Por tanto, sobre el eje horizontal *(abscisas)* leemos el cuantil que corresponde a la media de la distribución, $p^* = F(\mu)$, es decir el porcentaje de población que recibe una renta igual o inferior a la media.

Una forma equivalente de ver esta propiedad es enunciarla como sigue. La distancia (perpendicular) entre la curva de Lorenz y la línea de igualdad es máxima en el nivel de renta $y = \mu$. Definiendo dicha distancia como $D(p) = p - L(p)$, obtenemos el máximo de esta función cuando

$$\frac{dD(p)}{dp} = 1 - \frac{dL(p)}{dp} = 0$$

puesto que

$$\frac{d^2D(p)}{dp^2} = -\frac{d^2L(p)}{dp^2} < 0 \text{ por 4)},$$

es decir, cuando

$$\frac{dL(p)}{dp} = 1\,,$$

lo que dado 3) implica que en dicho punto el nivel de renta es $y = \mu$.

q.e.d.

A.3. Demostración de las proposiciones (3.6) y (3.7)

Proposición (3.6)

El índice de Gini generalizado, G_v, puede escribirse (aproximadamente)[283] como

$$G_\nu \approx \frac{1}{\mu n}\sum_{i=1}^{n}\omega_i(\nu)\,(\mu - y_i)$$
$$= \frac{1}{\mu n}\sum_{i=1}^{n}\left[\nu\left(\frac{n+1-i}{n}\right)^{\nu-1}(\mu - y_i)\right] \qquad (3.20)$$

Lo que define la función de ponderación, $\omega_i(\nu)$, como

$$\omega_i(\nu) = \nu\left(\frac{n+1-i}{n}\right)^{\nu-1} \qquad (3.21)^{284}$$

Demostración

A partir de (3.19) podemos escribir

[283] La aproximación es exacta para distribuciones continuas (Yitzhaki 1983) y discreta solo cuando $\nu = 2$. El motivo es obvio a partir de la demostración de la proposición (3.6).

[284] El equivalente a (3.21) para una distribución continua es

$$\omega(\nu, p) = v(1-p)^{v-1} \qquad (3.21^*)$$

Y el índice de Gini generalizado para una distribución continua equivalente a (3.20) es

$$G_\nu = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_{++}}\omega\big(\nu, F(y)\big)(\mu - y)\,dF(y) = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}_{++}} v\big(1-F(y)\big)^{v-1}(\mu - y)\,dF(y) \qquad (3.20^*)$$

$$G_\nu = \frac{1}{n^{\nu-1}}\nu(\nu-1)\sum_{i=1}^{n}(n+1-i)^{\nu-2}\left(\frac{i}{n}-\frac{\Sigma_{j=1}^{i}y_j}{n\mu}\right)$$

$$= \frac{1}{\mu n^{\nu}}\nu(\nu-1)\sum_{i=1}^{n}(n+1-i)^{\nu-2}\left(i\mu-\Sigma_{j=1}^{i}y_j\right)$$

Expandiendo el sumatorio,

$$\begin{array}{ll}
i=1 & n^{\nu-2}\left(\mu-y_1\right)\\
i=2 & (n-1)^{\nu-2}\left(2\mu-(y_1+y_2)\right)\\
i=3 & (n-2)^{\nu-2}\left(3\mu-(y_1+y_2+y_3)\right)\\
\vdots & \vdots\\
i=k & (n+1-k)^{\nu-2}\left(k\mu-(y_1+y_2+\ldots+y_k)\right)\\
\vdots & \vdots\\
i=n-1 & 2^{\nu-2}\left((n-1)\mu-(y_1+y_2+\ldots+y_{n-1})\right)\\
i=n & 1^{\nu-2}\left(n\mu-(y_1+y_2+\ldots+y_{n-1}+y_n)\right)
\end{array}$$

Y agrupando términos en $(\mu - y_i)$,

$$\begin{array}{ll}
i=1 & \left(\mu-y_1\right)\left(n^{\nu-2}+(n-1)^{\nu-2}+(n-2)^{\nu-2}+\ldots+2^{\nu-2}+1^{\nu-2}\right)\\
i=2 & \left(\mu-y_2\right)\left((n-1)^{\nu-2}+(n-2)^{\nu-2}+\ldots+2^{\nu-2}+1^{\nu-2}\right)\\
i=3 & \left(\mu-y_3\right)\left((n-2)^{\nu-2}+\ldots+2^{\nu-2}+1^{\nu-2}\right)\\
\vdots & \vdots\\
i=k & \left(\mu-y_k\right)\left((n+1-k)^{\nu-2}+\ldots+2^{\nu-2}+1^{\nu-2}\right)\\
\vdots & \vdots\\
i=n-1 & \left(\mu-y_{n-1}\right)\left(2^{\nu-2}+1^{\nu-2}\right)\\
i=n & \left(\mu-y_n\right)\left(1^{\nu-2}\right)
\end{array}$$

De donde observamos que el elemento $(\mu - y_i)$ lleva asociado el peso

$$\sum_{j=1}^{n+1-i} j^{\nu-2}$$

en consecuencia, $G_\nu = \dfrac{1}{\mu n^{\nu}}\nu(\nu-1)\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\left[\left(\sum_{j=1}^{n+1-i} j^{\nu-2}\right)\left(\mu-y_i\right)\right].$

El término principal de $\sum_{j=1}^{n+1-i} j^{\nu-2}$ es $\dfrac{(n+1-i)^{\nu-1}}{\nu-1}$, lo que implica que[285]

$$\frac{1}{(n+1-i)^{\nu-1}} \sum_{j=1}^{n+1-i} j^{\nu-2} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{\nu-1}$$

Por lo tanto, supuesto un n suficientemente grande, podemos sustituir

$$\sum_{j=1}^{n+1-i} j^{\nu-2} \text{ por } \frac{(n+1-i)^{\nu-1}}{\nu-1}, \text{ y escribir,}$$

$$\begin{aligned} G_\nu &\approx \frac{1}{\mu n^\nu}\nu(\nu-1)\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{(n+1-i)^{\nu-1}}{\nu-1}(\mu-y_i)\right] \\ &= \frac{1}{\mu n}\sum_{i=1}^{n}\left[\nu\left(\frac{n+1-i}{n}\right)^{\nu-1}(\mu-y_i)\right] \end{aligned}$$

q.e.d.

Proposición (3.7)

El índice generalizado de Theil, T_θ, puede escribirse como

$$T_\theta = \frac{n^{1-\theta}}{\theta(\theta-1)}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[\left(\frac{y_i}{\mu}\right)^\theta - 1\right] \qquad \forall\theta \neq 0,1 \qquad (3.36)$$

con las expresiones límite adecuadas para $\theta = 0$ y $\theta = 1$.

---

[285] Para obtener este resultado (Hamilton 1994) podemos observar que

$$\frac{1}{T}\sum_{j=1}^{T}\left(\frac{j}{T}\right)^\rho$$

es una aproximación al área bajo la curva $f(r) = r^\rho$ para r entre 0 y 1, puesto que $(1/T)(j/T)^\rho$ es el área de un rectángulo de base $1/T$ y altura r^ρ evaluado en $r = j/T$. Conforme a $T\to\infty$ esta suma de áreas converge al área bajo la función $f(r) = r^\rho$ entre 0 y 1,

$$\frac{1}{T}\sum_{j=1}^{T}\left(\frac{j}{T}\right)^\rho \xrightarrow[T\to\infty]{} \int_0^1 r^\rho dr = \left.\frac{r^{\rho+1}}{\rho+1}\right|_0^1 = \frac{1}{\rho+1}$$

Tomando $\rho = \nu - 2$ y $T = n + 1 - i$, se obtiene el resultado del texto.

Demostración[286]

Para un conjunto arbitrario de transferencias en la distribución inicial de renta, **y**, la variación total del índice T debida a dichas transferencias, dT, viene dada por la ecuación diferencial total

$$dT = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial T}{\partial s_i} ds_i \tag{A.3.1}$$

donde $\partial T / \partial s_i$ representa la derivada parcial de T respecto a s_i y $\Sigma_{i=1}^{n} s_i = 1$. Son estas derivadas parciales, para dos individuos concretos, las que determinan el efecto sobre el índice de una transferencia de Pigou-Dalton.

La ecuación (A.3.1) nos indica que si conocemos, o imponemos, una forma funcional para $\partial T / \partial s_i$ entonces podemos determinar el índice de desigualdad, hasta una constante, mediante integración a ambos lados de la igualdad. En concreto,

$$T = \sum_{i=1}^{n} \int_{\mathbb{S}} \frac{\partial T}{\partial s_i} ds_i + c \tag{A.3.2}$$

donde $\mathbb{S}$ es el dominio de definición de la proporciones de renta y c es la constante de integración.

A partir de (3.26) la ecuación correspondiente a (A.3.1) viene dada por

$$\begin{aligned} dT &= \sum_{i=1}^{n} (\log s_i + 1) ds_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} \log s_i ds_i \\ &= -\sum_{i=1}^{n} \phi(s_i) ds_i \end{aligned} \tag{A.3.3}$$

puesto que $\Sigma_{i=1}^{n} s_i = 1$ implica $\Sigma_{i=1}^{n} ds_i = 0$.

La sustitución de $\log s = -\phi(s)$ en (A.3.3) por

$$-\phi(\theta - 1, s) = \begin{cases} \dfrac{s^{\theta-1} - 1}{\theta - 1} & \theta \neq 1 \\ \log(s) & \theta = 1 \end{cases} \tag{A.3.4}$$

[286] Por conveniencia analítica suponemos en la demostración un mundo continuo.

junto con (A.3.2) permite obtener una familia uniparamétrica de índices de desigualdad cuyos miembros son identificados por el valor del parámetro $\theta \in \mathbb{R}$.

Integrando (A.3.4) para $\theta \neq 1$ obtenemos[287], al margen de la constante de integración,

$$\int_{\mathbb{S}} \frac{s^{\theta-1}-1}{\theta-1} ds = \frac{1}{\theta(\theta-1)}\left[s^{\theta}-\theta s\right] \tag{A.3.5}$$

Por tanto,

$$T_{\theta} = \frac{1}{\theta(\theta-1)}\left[\sum_{i=1}^{n} s_i^{\theta}-\theta\right]+c \tag{A.3.6}$$

puesto que $\Sigma_{i=1}^{n} s_i = 1$. Dado que $s_i = \dfrac{y_i}{n\mu}$ escribimos

$$T_{\theta} = \frac{n^{1-\theta}}{\theta(\theta-1)} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{y_i}{\mu}\right)^{\theta} - \frac{1}{\theta-1}+c \tag{A.3.7}$$

La elección natural de la constante de integración viene dada, en este caso, por la restricción de normalización, propiedad (1.1), de que $T_{\theta}=0$ cuando $y_i=\mu, \forall i$.

En consecuencia,

$$c = \frac{1}{\theta-1} - \frac{n^{1-\theta}}{\theta(\theta-1)} \tag{A.3.8}$$

Sustituyendo este valor en (A.3.7) obtenemos (3.36).

q.e.d.

[287] El caso $\theta = 1$ nos conduciría de nuevo a T y por tanto no es relevante en la demostración.

A.4. Prueba del teorema (5.1)

Teorema (5.1) (Dasgupta, Sen y Starret 1973; Rothschild y Stiglitz 1973)

Sean $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ dos distribuciones de una cantidad dada de renta, relativas a una misma población. Entonces, las siguientes comparaciones resultan equivalentes,

1) $\mathbf{x} \succ_L \mathbf{y}$
2) $\mathbf{x} \succ_D \mathbf{y}$
3) $\mathbf{x} \succ_W \mathbf{y}$

Demostración[288]

Desarrollaremos la prueba de acuerdo con el siguiente esquema: 1) ⇒ 2) ⇒ 3) ⇒ 1).

1) $\mathbf{x} \succ_L \mathbf{y} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x} \succ_D \mathbf{y}$

El resultado es obvio a partir de la inspección del gráfico 2.5, que muestra cómo una transferencia de Pigou-Dalton mueve la curva de Lorenz de forma inequívoca hacia la línea de igualdad perfecta. Un argumento formal es el siguiente.

Puesto que $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ tienen la misma renta total, $\mathbf{x} \succ_L \mathbf{y}$ implica que $\Sigma_{i=1}^{k} x_i \geq \Sigma_{i=1}^{k} y_i, \quad \forall k = 1, 2, ..., n$, con desigualdad estricta para algún $k < n$. A continuación mostramos cómo es posible obtener $\mathbf{x}$ a partir de $\mathbf{y}$ mediante un conjunto de transferencias de Pigou-Dalton.

Sea k el primer entero para el cual $x_k > y_k$. Siempre podemos ahora obtener una nueva distribución, $\hat{\mathbf{y}}$, a partir de la distribu-

[288] La prueba que aquí presentamos sigue la línea de demostración desarrollada en Rothschild y Stiglitz (1973). Demostraciones similares pueden encontrarse en Dasgupta, Sen y Starret (1973) o Sen (1973).

ción inicial, **y**, mediante un conjunto finito de transferencias de Pigou-Dalton que transfiera renta de ricos a pobres de forma que $\hat{\mathbf{y}}$ tenga las siguientes propiedades,[289]

$$\begin{array}{ll} x_i = \hat{y}_i = y_i & i < k \\ x_i = \hat{y}_i & i = k \\ \sum_{i=1}^{j} x_i \geq \sum_{i=1}^{j} \hat{y}_i & j > k \end{array}$$

Estas transferencias pueden requerir permutaciones interpersonales, porque el individuo i en la distribución **y** no es necesariamente el mismo, ni en la distribución **x**, ni en la distribución $\hat{\mathbf{y}}$.[290]

Si la distribución $\hat{\mathbf{y}}$ coincide con **x**, la última desigualdad nunca se cumple de forma estricta y hemos concluido la prueba. En caso contrario $\mathbf{x} \succ_L \hat{\mathbf{y}}$, y aplicación reiterada de este procedimiento permitirá finalmente obtener la distribución **x** a partir de la distribución **y**, mediante una sucesión finita de transferencias de Pigou-Dalton. Por tanto, $\mathbf{x} \succ_D \mathbf{y}$.

Observación (A.4.1): El argumento de la prueba es tal que la implicación también funciona en la dirección opuesta, es decir, $\mathbf{x} \succ_L \mathbf{y} \;\; \Leftarrow \;\; \mathbf{x} \succ_D \mathbf{y}$.

2) $\mathbf{x} \succ_D \mathbf{y} \;\; \Rightarrow \;\; \mathbf{x} \succ_W \mathbf{y}$

Con una función de bienestar social estrictamente cuasi-cóncava y simétrica es natural que esta sucesión de transferencias de ricos a pobres implique que el bienestar social que obtenemos a partir de **x** sea superior al que obtenemos a partir de **y**.

Puesto que $\mathbf{x} \succ_D \mathbf{y}$ significa que **x** se puede obtener a partir de **y**, mediante un número finito de transferencias de Pigou-Dalton,

[289] Una prueba inductiva de que esto es siempre posible puede verse en Steele (2004, cap. 13).

[290] Recuérdese que, tal y como vimos en el capítulo 1, cualquier transferencia de Dalton es equivalente a una sucesión finita de transferencias elementales de Dalton y permutaciones entre individuos.

es suficiente comprobar que una sola de estas transferencias incrementa el bienestar.

Supongamos que **x** se obtiene a partir de **y**, mediante una cierta transferencia δ del individuo i al individuo j, con

$$0 < \delta \leq \frac{y_i - y_j}{2}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} x_j &= y_j + \delta \\ x_i &= y_i - \delta \\ x_k &= y_k \qquad\qquad \forall k \neq i, j \end{aligned}$$

Sea ahora,

$$R(\tau) = W(y_1, y_2, \ldots, y_j + \tau, \ldots, y_i - \tau, \ldots, y_n)$$

Puesto que W es estrictamente cuasi-cóncava, también lo será $R(\tau)$. Dado que W es simétrica, $R(\tau) = R(\tau^*)$ donde $\tau^* = y_i - y_j - \tau$. Consecuentemente, $R(\tau)$ alcanza su máximo cuando $\tau = \tau^*$, esto es para

$$\tau = \frac{y_i - y_j}{2}$$

Por tanto, conforme $0 < \delta \rightarrow \tau = \frac{y_i - y_j}{2}$, W crece,

$$W(\mathbf{x}) = R(\delta) > R(0) = W(\mathbf{y})$$

Observación (A.4.2): De nuevo la simetría del argumento hace que la implicación también funcione en la dirección opuesta, es decir, $\mathbf{x} \succ_D \mathbf{y} \quad \Leftarrow \quad \mathbf{x} \succ_W \mathbf{y}$.

3) $\mathbf{x} \succ_W \mathbf{y} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x} \succ_L \mathbf{y}$

Recordemos que la expresión $\mathbf{x} \succ_W \mathbf{y}$ significa que la distribución **x** domina en bienestar a la distribución **y**, para toda función de bienestar social igualitaria. Definimos ahora una familia de funciones de bienestar social $W^k(\mathbf{x})$, para $k = 1,2,\ldots,n$, como sigue,

$$W^k(\mathbf{x}) = \Sigma_{i=1}^k x_i$$

es decir, $W^k(\mathbf{x})$ nos indica la renta agregada correspondiente al total de individuos igual o más pobre que el individuo k. Es fácil comprobar que la función $W^k(\mathbf{x})$ es simétrica, dado que las distribuciones están ordenadas, monótona y estrictamente cuasicóncava, $\forall k = 1,2,\ldots,n$.

Por tanto, $W^k(\mathbf{x}) \geq W^k(\mathbf{y})$ $\forall k$, con desigualdad estricta para algún $k < n$, o, lo que es lo mismo,

$$\sum_{i=1}^{k} x_i \geq \sum_{i=1}^{k} y_i \qquad \forall k = 1,2,\ldots,n$$

con desigualdad estricta para algún $k < n$.

Por consiguiente, de la relación $\mathbf{x} \succ_W \mathbf{y}$ deducimos que $\mathbf{x} \succ_L \mathbf{y}$.

Con ello completamos la prueba.

q.e.d.

A.5. Demostración de la proposición (10.2)

Proposición (10.2)

Sea $V(\mathbf{y})$ una función de evaluación social homogénea de grado uno que cumple las propiedades de equidad mínima, independencia y escala unitaria. Entonces, se cumple que

$$\alpha_i(\mathbf{y}) = 1 - \beta \log \frac{y_i}{\mu}$$

donde β es un escalar positivo.

Demostración

A partir de la proposición (10.1) y teniendo en cuenta que las funciones $\alpha_i(\mathbf{y})$ son homogéneas de grado cero, podemos establecer:

$$\alpha_i(\mathbf{y}) - \alpha_j(\mathbf{y}) = \alpha_i\left(\frac{1}{k}\mathbf{y}\right) - \alpha_j\left(\frac{1}{k}\mathbf{y}\right) \quad \Rightarrow$$

$$f(y_i) - f(y_j) = f\left(\frac{y_i}{k}\right) - f\left(\frac{y_j}{k}\right)$$

$$\forall\, i, j \in N, \text{ y } \forall\, k > 0$$

Diferenciando esta expresión, con respecto a y_i, obtenemos

$$f'(y_i) = \frac{1}{k} f'\left(\frac{y_i}{k}\right)$$

donde $f'(y_i) = \dfrac{\partial f(y_i)}{\partial y_i}$. Alternativamente,

$$y_i f'(y_i) = \frac{y_i}{k} f'\left(\frac{y_i}{k}\right)$$

Haciendo $\psi(q) = q f'(q)$, $\forall q > 0$, podemos rescribir la expresión anterior como

$$\psi(y_i) = \psi\left(\frac{y_i}{k}\right) \qquad \forall y_i, k > 0$$

Es fácil comprobar que esta expresión es constante. Por tanto, podemos escribir

$$\psi(y_i) = y_i f'(y_i) = -\beta \qquad \Rightarrow \qquad f'(y_i) = \frac{-\beta}{y_i}$$

donde $\beta > 0$ de acuerdo con la propiedad de equidad mínima.

Resolviendo esta ecuación diferencial obtenemos,

$$f(y_i) = \gamma_0 - \beta \log y_i$$

donde γ_0 es una constante. Por tanto, tendremos:

$$\alpha_i(\mathbf{y}) = f(y_i) + K = \gamma_1 - \beta \log y_i$$

donde K es una constante, y $\gamma_1 = \gamma_0 + K$.

Si aplicamos ahora la normalización de coeficientes de la propiedad de escala unitaria obtenemos,

$$\alpha_i(\mu \iota_n) = f(\mu) + K = 1 = \gamma_1 - \beta \log \mu \quad \forall i$$

de donde se sigue que

$$\alpha_i(\mathbf{y}, \beta) = 1 - \beta \log \frac{y_i}{\mu}$$

q.e.d.

A.6. Dualidad

Repasamos en este apéndice algunos aspectos de la teoría del comportamiento del consumidor, que son relevantes para la discusión planteada en este capítulo. Nos referimos a la *función indirecta de utilidad,* la *función de demanda compensada* y la *función de gasto,* así como a la aplicación de estos conceptos en la definición de índices de precios.

Consideremos un individuo i que toma decisiones de consumo en un espacio de l mercancías. Supondremos que $\mathbb{R}_+^\ell$ es el conjunto de consumo de este individuo, que posee unas preferencias representables mediante una función de utilidad $u_i : \mathbb{R}_+^\ell \to \mathbb{R}$ continua, estrictamente cuasicóncava y monótona. Suponemos que tanto los precios, $\mathbf{p}$, como la renta, M_i, de este consumidor son positivos, $\mathbf{p} \in \mathbb{R}_{++}^\ell$ y $M_i \in \mathbb{R}_+$.

El problema de elección del individuo viene dado por el siguiente programa:

$$\left.\begin{array}{rl} \underbrace{Max}_{\mathbf{x}_i} & u_i(\mathbf{x}_i) \\ Sujeto\ a: & \mathbf{p}\mathbf{x}_i \leq M_i \\ & \mathbf{x}_i \geq 0 \end{array}\right\} \quad [P] \qquad \text{(A.6.1)}$$

La solución de este programa, si existe, define la demanda del consumidor (la mejor alternativa para cada vector de precios y nivel de renta). Bajo las condiciones establecidas, este problema posee una única solución $d_i(\mathbf{p}, M_i)$ para todo $(\mathbf{p}, M_i) \in \mathbb{R}_{++}^\ell \times \mathbb{R}_+$ (la demanda del consumidor), que varía continuamente en sus variables.

A.6.1. Función indirecta de utilidad, función de demanda compensada y función de gasto

Denominaremos función indirecta de utilidad a una función $\nu_i : \mathbb{R}^{\ell}_{++} \times \mathbb{R}_{+} \rightarrow \mathbb{R}$ que nos dice, para cada $(\mathbf{p}, M_i) \in \mathbb{R}^{\ell}_{++} \times \mathbb{R}_{+}$, cuál es la máxima utilidad que podemos alcanzar mediante un plan de consumo que respete la restricción presupuestaria. Así pues, dado $(\mathbf{p}, M_i) \in \mathbb{R}^{\ell}_{++} \times \mathbb{R}_{+}$ tendremos

$$v_i(\mathbf{p}, M_i) = \left\{ Max\ u_i(\mathbf{x}_i) / \mathbf{p}\mathbf{x}_i \leq M_i \right\}$$

La función indirecta de utilidad describe simplemente cuál es el nivel de utilidad asociado a la demanda, para cada par $(\mathbf{p}, M_i)$ (es pues la *función valor* del problema de optimización [P], [A.6.1]). Formalmente

$$v_i(\mathbf{p}, M_i) = u_i(\mathbf{x}_i^*) = u_i\left(d_i(\mathbf{p}, M_i)\right)$$

Puede comprobarse que la función indirecta de utilidad, ν_i, es una función continua y homogénea de grado cero en $(\mathbf{p}, M_i)$, no creciente en $\mathbf{p}$, estrictamente creciente en M_i y cuasiconvexa en $\mathbf{p}$.

Supongamos que el individuo se fija como referencia un cierto nivel de utilidad u_i^0, que podemos interpretar como el nivel de satisfacción que aspira a alcanzar, y busca la combinación de bienes que minimiza el coste de alcanzar dicho nivel de utilidad, a los precios de mercado. Tendremos así un problema de optimización dado por el siguiente programa:

$$\left.\begin{array}{ll} \underbrace{Min}_{\mathbf{x}_i} & \mathbf{p}\mathbf{x}_i \\ Sujeto\ a: & u_i(\mathbf{x}_i) \geq u_i^0 \\ & \mathbf{x}_i \geq 0 \end{array}\right\} \quad [D] \qquad (A.6.2)$$

Este problema no es más que el dual del programa [P], (A.6.1), y, bajo los supuestos habituales, posee también una *solución única,* $\mathbf{x}_i^*$ que depende de los parámetros $\mathbf{p}$ y u_i^0, puesto que la función objetivo es lineal y la restricción define un conjunto estrictamente convexo (por la estricta cuasiconcavidad de la función de utilidad), cerrado y acotado inferiormente.

Por tanto, podemos escribir en general,

$$\mathbf{x}_i = h_i(\mathbf{p}, u_i^0)$$

como la (función) solución al problema $[D]$, (A.6.2), que depende de los valores prefijados de $\mathbf{p}$ y u_i^0. Esta función se conoce como función de demanda compensada (o función de demanda hicksiana). Nos dice cómo varía el consumo óptimo al modificarse los precios y el nivel de utilidad tomado como referencia. La función de demanda compensada es homogénea de grado cero en precios.

Si mantenemos la utilidad constante, $u_i = u_i^0$, y consideramos únicamente cambios en los precios, la función $h_i(\mathbf{p}, u_i^0)$ refleja el cambio que se produciría en el consumo al modificarse los precios, *manteniéndonos sobre la misma curva de indiferencia*. Ello equivale a determinar cómo variaría el consumo de equilibrio si un cambio en los precios no afectara a la renta real. Por tanto, podemos pensar que esta función de demanda se obtiene cuando *compensamos* al consumidor del efecto que sobre la renta real se deriva de un cambio en los precios.

La función valor del problema anterior, que asocia a cada punto $(\mathbf{p}, u_i^0)$ el gasto mínimo de alcanzar la utilidad u_i^0 se denomina función de gasto y se denota habitualmente por e_i.[291] Más formalmente, la función de gasto $e_i : \mathbb{R}_{++}^{\ell} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ se define como sigue, para cada $(\mathbf{p}, u_i^0) \in \mathbb{R}_{++}^{\ell} \times \mathbb{R}$,

$$e_i(\mathbf{p}, u_i^0) = \left\{ Min\ \mathbf{p}\mathbf{x}_i \big/ u_i(\mathbf{x}_i) \geq u_i^0 \right\}$$

es decir, $e_i(\mathbf{p}, u_i^0)$ nos da el mínimo gasto requerido para alcanzar el nivel de utilidad u_i^0 cuando prevalecen los precios $\mathbf{p}$. Por construcción se verifica que

$$e_i(\mathbf{p}, u_i) = \mathbf{p} h_i(\mathbf{p}, u_i)$$

La función de gasto, e_i, es continua, homogénea de grado uno, no-decreciente y cóncava en $\mathbf{p}$, y estrictamente creciente en u_i.

[291] Esta es en realidad la función $c(u,\mathbf{p})$ de (12.1).

La relación de dualidad entre los problemas $[P]$, (A.6.1), y $[D]$, (A.6.2), puede resumirse en los siguientes términos:

1) Si $\mathbf{x}_i^*$ es la solución del problema $[P]$ para $(\mathbf{p}, M_i)$, entonces $\mathbf{x}_i^*$ es la solución del problema $[D]$ para $u_i^0 = u_i(\mathbf{x}_i^*)$.
2) Si $\mathbf{x}_i^0$ es la solución del problema $[D]$ para $(\mathbf{p}, u_i^0)$, entonces $\mathbf{x}_i^0$ es la solución del problema $[P]$ para $\mathbf{p}\mathbf{x}_i^0$.

A.6.2. Variaciones en los precios y variaciones en el bienestar

Nos ocuparemos aquí de presentar los elementos conceptuales básicos que permiten abordar la medición de cambios en los precios y de cambios en el bienestar, mediante el empleo de números índices y de *valoraciones monetarias* del bienestar. La idea común en estos tipos de medidas es la búsqueda de una estimación cuantitativa de estos cambios que posea una interpretación económica clara.

Índices de precios

Los índices de precios tratan de medir el impacto sobre el nivel de vida que se deriva de un cambio en el vector de precios. Sean $\mathbf{p}^0, \mathbf{p}^1 \in \mathbb{R}_{++}^{\ell}$ dos vectores de precios, donde tomamos $\mathbf{p}^0$ como el vector de precios inicial, y $\mathbf{p}^1$ como el nuevo vector de precios. Consideremos ahora el problema de medir el efecto sobre el coste de la vida que tiene para un individuo el cambio de $\mathbf{p}^0$ a $\mathbf{p}^1$. Para ello debemos seleccionar un vector de consumo que tomamos como referencia, $\mathbf{x}_i^R \in \mathbb{R}_{+}^{\ell}$, y calcular su coste para ambos sistemas de precios. Podemos determinar así un índice como sigue

$$IP(\mathbf{p}^0, \mathbf{p}^1, \mathbf{x}_i^R) = \frac{\mathbf{p}^1\mathbf{x}_i^R}{\mathbf{p}^0\mathbf{x}_i^R}$$

Esta expresión mide el coste de consumir $\mathbf{x}_i^R$ a los precios $\mathbf{p}^1$ en relación al coste de consumir esta misma cesta a los precios $\mathbf{p}^0$. Es obvio que la significación de esta medida depende de hasta qué punto el vector $\mathbf{x}_i^R$ representa adecuadamente el patrón de consumo del individuo i. Cuando consideramos únicamente dos situaciones alternativas (las asociadas a los precios $\mathbf{p}^0$ y $\mathbf{p}^1$), resulta natural tomar como vector de consumo de referencia la demanda asociada a uno de estos precios, es decir, tomar $\mathbf{x}_i^0$ o bien $\mathbf{x}_i^1$ (donde $\mathbf{x}_i^j = d_i(\mathbf{p}^j, M_i)$, $j = 0,1$). Tendremos así definidos los conocidos índices de precios de Laspeyres (que denotaremos por IP_L) y de Paasche (que denotaremos por IP_P), cuyas expresiones vienen dadas por

$$IP_L = IP(\mathbf{p}^0, \mathbf{p}^1, \mathbf{x}_i^0) = \frac{\mathbf{p}^1\mathbf{x}_i^0}{\mathbf{p}^0\mathbf{x}_i^0}$$

y

$$IP_P = IP(\mathbf{p}^0, \mathbf{p}^1, \mathbf{x}_i^1) = \frac{\mathbf{p}^1\mathbf{x}_i^1}{\mathbf{p}^0\mathbf{x}_i^1}$$

Estos índices de precios suponen una medición del cambio en el coste de la vida dada, por la variación en el coste de una cesta fija de bienes, que refleja el patrón de consumo (que es el elemento que se mantiene constante en el análisis). En el primer caso, tomamos como patrón de consumo el asociado a la situación inicial, mientras que, en el segundo, tomamos el asociado a la nueva situación.

Podemos pensar que una manera más precisa de estimar la variación en el coste de la vida consiste en comparar el coste de alcanzar un cierto nivel de utilidad, al cambiar los precios. De esta manera tomamos en cuenta el efecto sustitución que está asociado al cambio en los precios (y que es ignorado al tomar una cesta fija de bienes como patrón). Podemos usar para ello la función de gasto (que mide precisamente el coste mínimo de alcanzar un cierto nivel de utilidad a unos precios dados). Así pues, dado un nivel de utilidad, u_i^R, tomado como referencia, podemos definir[292]

$$ICV(\mathbf{p}^0, \mathbf{p}^1, u_i^R) = \frac{e(\mathbf{p}^1, u_i^R)}{e(\mathbf{p}^0, u_i^R)}$$

Estos índices se conocen como los *verdaderos índices de precios* o *verdaderos índices del coste de la vida*. También aquí es esencial esco-

[292] Esta ratio es esencialmente (12.1).

ger un valor u_i^R que sea representativo de las situaciones que queremos analizar. Cuando comparamos únicamente dos vectores de precios, la elección natural es la de $u_i^0 = u(\mathbf{x}_i^0)$ o bien $u_i^1 = u(\mathbf{x}_i^1)$. Tendríamos así dos verdaderos índices del coste de la vida, dados por

$$ICV_L = ICV(\mathbf{p}^0, \mathbf{p}^1, u_i^0) = \frac{e(\mathbf{p}^1, u_i^0)}{e(\mathbf{p}^0, u_i^0)}$$

y

$$ICV_P = ICV(\mathbf{p}^0, \mathbf{p}^1, u_i^1) = \frac{e(\mathbf{p}^1, u_i^1)}{e(\mathbf{p}^0, u_i^1)}$$

Es fácil comprobar que las relaciones entre estos índices y los anteriores es la siguiente: $ICV_L \leq IP_L$ y $ICV_P \geq IP_P$, es decir, el verdadero índice del coste de la vida de Laspeyres acota inferiormente al índice de precios de Laspeyres, mientras que el verdadero índice del coste de la vida de Paasche acota superiormente al índice de precios de Paasche. No hay pues una forma unívoca de determinar el índice de precios (incluso en el caso de un único individuo, que es el que estamos considerando). Puede comprobarse, sin embargo, que si las preferencias son *homotéticas* entonces podemos asegurar que

$$IP_L \geq ICV_L = ICV_P \geq IP_P$$

A.7. Apéndice estadístico del capítulo 13: resultados adicionales

CUADRO A.7.1: **IPC utilizados en la deflación de las EPF utilizadas**
(base 2001)

	1973-1974	1980-1981	1990-1991	2003
Andalucía	9,43	28,47	68,31	106,48
Aragón	9,56	28,78	67,32	106,69
Asturias, Principado de	9,00	28,27	65,75	106,75
Balears, Illes	9,16	27,69	64,35	106,90
Canarias	8,68	27,10	62,66	104,94
Cantabria	9,48	29,53	65,56	106,17
Castilla y León	9,45	28,59	66,50	106,18
Castilla-La Mancha	9,16	28,35	65,26	106,43
Cataluña	9,12	27,60	67,38	107,32
C. Valenciana	9,33	28,64	69,07	106,45
Extremadura	9,20	28,13	65,45	105,64
Galicia	9,36	28,14	67,64	107,01
Madrid, C. de	9,29	28,93	68,07	106,74
Murcia, Región de	9,11	27,66	66,34	107,36
Navarra, C. Foral de	9,01	27,48	63,96	106,98
País Vasco	9,13	27,17	67,11	106,60
Rioja, La	9,26	27,50	67,28	107,14

Fuente: Elaboración propia a partir de los datos del IPC proporcionados por el INE en su página web.

CUADRO A.7.2: **Curvas de Lorenz. Andalucía**
(porcentaje)

Porcentaje de población	Ordenadas de Lorenz				Dominancia 1973/74-2003
	1973-1974	1980-1981	1990-1991	2003	
5	1,13	0,96	0,99	1,41	0,28
10	2,79	2,55	2,71	3,59	0,80
15	4,79	4,55	4,84	6,09	1,30
20	7,06	6,89	7,30	8,86	1,80
25	9,59	9,56	10,06	11,90	2,31
30	12,41	12,51	13,11	15,18	2,76
35	15,49	15,74	16,44	18,65	3,17
40	18,83	19,23	20,06	22,41	3,58
45	22,44	22,97	23,96	26,39	3,95
50	**26,33**	**27,02**	**28,16**	**30,65**	**4,32**
55	30,52	31,35	32,64	35,17	4,65
60	35,00	35,99	37,42	39,94	4,94
65	39,82	41,02	42,57	45,01	5,19
70	45,03	46,44	48,09	50,41	5,38
75	50,74	52,35	53,98	56,23	5,49
80	57,01	58,83	60,37	62,56	5,55
85	64,13	66,01	67,45	69,57	5,44
90	72,29	74,08	75,48	77,58	5,29
95	82,36	83,92	85,11	86,72	4,37

Fuente: Elaboración propia a partir de EPF 1973/74, 1980/81, 1990/91 y ECPF (fichero longitudinal) 2003.

CUADRO A.7.3: **Curvas de Lorenz. Aragón**

(porcentaje)

Porcentaje de población	Ordenadas de Lorenz				Dominancia 1973/74-2003
	1973-1974	1980-1981	1990-1991	2003	
5	1,19	1,00	1,36	1,70	0,50
10	2,91	2,80	3,52	3,91	1,00
15	5,02	5,02	6,12	6,56	1,54
20	7,44	7,56	8,97	9,54	2,11
25	10,13	10,32	12,09	12,67	2,54
30	13,11	13,35	15,45	15,95	2,84
35	16,32	16,57	19,09	19,42	3,10
40	19,77	20,09	22,96	23,13	3,36
45	23,49	23,91	27,09	27,09	3,60
50	**27,43**	**28,00**	**31,44**	**31,21**	**3,78**
55	31,66	32,39	36,03	35,50	3,84
60	36,20	37,10	40,84	40,07	3,87
65	41,08	42,13	45,91	45,13	4,05
70	46,35	47,48	51,29	50,43	4,09
75	51,94	53,24	56,99	56,06	4,12
80	58,00	59,48	63,15	62,24	4,24
85	64,84	66,51	69,90	69,03	4,19
90	72,64	74,56	77,39	76,62	3,98
95	81,88	84,18	86,23	85,44	3,55

Fuente: Elaboración propia a partir de EPF 1973/74, 1980/81, 1990/91 y ECPF (fichero longitudinal) 2003.

CUADRO A.7.4: **Curvas de Lorenz. Principado de Asturias**
(porcentaje)

Porcentaje de población	**Ordenadas de Lorenz**				**Dominancia 1973/74-2003**
	1973-1974	**1980-1981**	**1990-1991**	**2003**	
5	0,89	0,77	1,66	2,10	1,20
10	2,38	2,28	4,05	4,64	2,26
15	4,45	4,34	6,77	7,47	3,01
20	6,98	6,78	9,71	10,56	3,58
25	9,78	9,58	12,81	13,90	4,12
30	12,83	12,70	16,15	17,47	4,64
35	16,19	16,13	19,89	21,21	5,02
40	19,85	19,84	23,92	25,08	5,22
45	23,78	23,82	28,19	29,15	5,37
50	**27,95**	**28,09**	**32,69**	**33,54**	**5,59**
55	32,38	32,62	37,45	38,38	6,01
60	37,11	37,43	42,45	43,44	6,32
65	42,14	42,56	47,71	48,66	6,52
70	47,51	48,14	53,23	54,14	6,63
75	53,30	54,13	59,08	59,97	6,67
80	59,61	60,55	65,35	66,16	6,55
85	66,59	67,70	72,14	72,76	6,17
90	74,73	75,87	79,67	80,18	5,45
95	84,32	85,53	88,12	88,38	4,06

Fuente: Elaboración propia a partir de EPF 1973/74, 1980/81, 1990/91 y ECPF (fichero longitudinal) 2003.

CUADRO A.7.5: **Curvas de Lorenz. Illes Balears**
(porcentaje)

Porcentaje de población	Ordenadas de Lorenz				Dominancia 1973/74-2003
	1973-1974	1980-1981	1990-1991	2003	
5	1,65	1,25	1,08	1,76	0,11
10	3,82	3,05	3,12	4,18	0,36
15	6,26	5,17	5,55	6,91	0,65
20	9,07	7,58	8,23	10,02	0,95
25	12,10	10,20	11,17	13,40	1,31
30	15,37	13,08	14,33	17,00	1,64
35	18,96	16,20	17,79	20,71	1,75
40	22,88	19,54	21,56	24,51	1,63
45	26,96	23,12	25,54	28,55	1,58
50	**31,27**	**26,98**	**29,76**	**32,96**	**1,69**
55	35,82	31,21	34,26	37,56	1,74
60	40,68	35,77	39,07	42,36	1,68
65	45,98	40,65	44,13	47,32	1,33
70	51,58	45,96	49,50	52,56	0,98
75	57,42	51,91	55,35	58,28	0,86
80	63,77	58,66	61,75	64,51	0,74
85	70,54	66,03	68,76	71,46	0,92
90	77,91	74,60	76,36	78,82	0,92
95	86,30	84,65	85,76	87,07	0,78

Fuente: Elaboración propia a partir de EPF 1973/74, 1980/81, 1990/91 y ECPF (fichero longitudinal) 2003.

CUADRO A.7.6: **Curvas de Lorenz. Canarias**

(porcentaje)

Porcentaje de población	**Ordenadas de Lorenz**				**Dominancia 1973/74-2003**
	1973-1974	**1980-1981**	**1990-1991**	**2003**	
5	1,04	1,02	0,85	1,47	0,42
10	2,71	2,82	2,46	3,41	0,69
15	4,72	4,95	4,61	5,78	1,07
20	7,02	7,37	7,08	8,48	1,46
25	9,60	9,99	9,84	11,36	1,76
30	12,52	12,86	12,86	14,52	2,00
35	15,65	15,98	16,13	17,90	2,25
40	18,98	19,36	19,65	21,54	2,56
45	22,58	22,95	23,44	25,42	2,84
50	**26,45**	**26,80**	**27,48**	**29,58**	**3,13**
55	30,65	30,97	31,89	34,02	3,37
60	35,13	35,47	36,64	38,72	3,59
65	40,04	40,33	41,80	43,67	3,62
70	45,37	45,56	47,35	48,88	3,50
75	51,27	51,33	53,38	54,42	3,16
80	57,66	57,67	59,93	60,76	3,10
85	64,76	64,78	67,15	67,76	3,00
90	73,01	72,84	75,31	75,54	2,53
95	82,97	82,68	85,20	84,62	1,65

Fuente: Elaboración propia a partir de EPF 1973/74, 1980/81, 1990/91 y ECPF (fichero longitudinal) 2003.

cuadro a.7.7: Curvas de Lorenz. Cantabria
(porcentaje)

Porcentaje de población	Ordenadas de Lorenz				Dominancia 1973/74-2003
	1973-1974	1980-1981	1990-1991	2003	
5	1,72	1,22	1,14	1,46	-0,26
10	3,92	3,15	3,05	3,65	-0,27
15	6,35	5,42	5,39	6,24	-0,11
20	9,04	7,98	8,04	9,09	0,05
25	11,94	10,91	10,99	12,19	0,26
30	15,11	14,07	14,20	15,45	0,34
35	18,53	17,44	17,64	18,97	0,44
40	22,17	21,10	21,31	22,72	0,54
45	26,08	24,97	25,19	26,79	0,71
50	**30,24**	**29,21**	**29,28**	**31,06**	**0,81**
55	34,71	33,74	33,73	35,55	0,84
60	39,41	38,61	38,45	40,21	0,80
65	44,36	43,78	43,56	45,06	0,70
70	49,72	49,19	49,00	50,28	0,56
75	55,55	55,03	54,81	56,07	0,52
80	61,68	61,35	61,18	62,51	0,83
85	68,40	68,29	68,26	69,64	1,24
90	75,95	76,22	76,35	77,68	1,73
95	84,72	86,00	85,69	87,28	2,56

Fuente: Elaboración propia a partir de EPF 1973/74, 1980/81, 1990/91 y ECPF (fichero longitudinal) 2003.

CUADRO A.7.8: **Curvas de Lorenz. Castilla y León**
(porcentaje)

Porcentaje de población	Ordenadas de Lorenz				Dominancia 1973/74-2003
	1973-1974	1980-1981	1990-1991	2003	
5	0,95	1,01	1,18	1,65	0,70
10	2,44	2,75	3,09	3,75	1,31
15	4,26	4,84	5,37	6,28	2,02
20	6,36	7,23	8,04	9,11	2,75
25	8,70	9,97	10,98	12,12	3,41
30	11,30	12,94	14,12	15,38	4,09
35	14,16	16,16	17,46	18,95	4,78
40	17,28	19,62	21,04	22,75	5,47
45	20,70	23,33	24,84	26,78	6,08
50	**24,38**	**27,35**	**28,92**	**30,99**	**6,62**
55	28,38	31,66	33,27	35,43	7,05
60	32,77	36,31	37,88	40,23	7,45
65	37,52	41,34	42,83	45,41	7,89
70	42,73	46,76	48,18	50,84	8,12
75	48,36	52,63	53,98	56,75	8,40
80	54,54	59,05	60,32	63,18	8,63
85	61,57	66,21	67,39	70,12	8,55
90	69,69	74,30	75,41	78,04	8,35
95	80,02	83,84	85,09	87,10	7,09

Fuente: Elaboración propia a partir de EPF 1973/74, 1980/81, 1990/91 y ECPF (fichero longitudinal) 2003.

CUADRO A.7.9: **Curvas de Lorenz. Castilla-La Mancha**
(porcentaje)

Porcentaje de población	Ordenadas de Lorenz				Dominancia 1973/74-2003
	1973-1974	1980-1981	1990-1991	2003	
5	1,24	1,16	1,40	1,97	0,72
10	3,01	3,02	3,44	4,46	1,45
15	5,10	5,25	5,81	7,25	2,14
20	7,44	7,84	8,49	10,19	2,75
25	9,99	10,70	11,48	13,32	3,33
30	12,81	13,80	14,67	16,66	3,85
35	15,89	17,17	18,11	20,22	4,33
40	19,21	20,80	21,77	23,99	4,77
45	22,80	24,60	25,69	27,99	5,20
50	**26,65**	**28,66**	**29,88**	**32,18**	**5,52**
55	30,81	32,99	34,30	36,54	5,73
60	35,31	37,62	39,01	41,12	5,81
65	40,24	42,60	44,08	46,07	5,83
70	45,60	48,00	49,53	51,63	6,03
75	51,48	53,78	55,42	57,60	6,12
80	57,85	60,04	61,80	63,87	6,02
85	64,92	66,98	68,79	70,58	5,66
90	72,90	74,83	76,59	78,5	5,64
95	82,66	84,42	85,67	87,73	5,07

Fuente: Elaboración propia a partir de EPF 1973/74, 1980/81, 1990/91 y ECPF (fichero longitudinal) 2003.

CUADRO A.7.10: **Curvas de Lorenz. Cataluña**

(porcentaje)

Porcentaje de población	Ordenadas de Lorenz				Dominancia 1973/74-2003
	1973-1974	1980-1981	1990-1991	2003	
5	1,27	1,24	1,41	1,53	0,26
10	3,31	3,18	3,49	3,82	0,51
15	5,74	5,54	5,83	6,41	0,67
20	8,51	8,18	8,44	9,30	0,79
25	11,52	11,08	11,29	12,47	0,95
30	14,75	14,24	14,46	15,82	1,07
35	18,21	17,59	17,87	19,35	1,13
40	21,92	21,16	21,53	23,04	1,12
45	25,85	24,95	25,49	26,99	1,14
50	**30,03**	**28,98**	**29,71**	**31,37**	**1,34**
55	34,51	33,28	34,20	36,02	1,52
60	39,29	37,84	38,99	40,85	1,56
65	44,39	42,73	44,03	45,87	1,49
70	49,89	48,00	49,44	51,20	1,32
75	55,74	53,69	55,34	56,93	1,19
80	62,01	59,86	61,74	63,28	1,27
85	68,90	66,64	68,86	70,46	1,57
90	76,59	74,30	76,83	78,16	1,57
95	85,66	83,31	86,03	87,32	1,67

Fuente: Elaboración propia a partir de EPF 1973/74, 1980/81, 1990/91 y ECPF (fichero longitudinal) 2003.

CUADRO A.7.11: **Curvas de Lorenz. Comunitat Valenciana**
(porcentaje)

Porcentaje de población	Ordenadas de Lorenz				Dominancia 1973/74-2003
	1973-1974	1980-1981	1990-1991	2003	
5	1,33	1,32	1,51	1,55	0,22
10	3,33	3,33	3,66	3,79	0,46
15	5,73	5,65	6,12	6,41	0,68
20	8,41	8,27	8,90	9,30	0,89
25	11,36	11,16	11,93	12,36	1,00
30	14,56	14,32	15,24	15,65	1,09
35	17,98	17,67	18,77	19,24	1,26
40	21,59	21,31	22,51	23,06	1,47
45	25,42	25,22	26,51	27,07	1,65
50	**29,50**	**29,38**	**30,79**	**31,26**	**1,76**
55	33,85	33,83	35,34	35,78	1,93
60	38,54	38,55	40,19	40,70	2,16
65	43,54	43,60	45,35	45,87	2,33
70	48,90	49,06	50,83	51,29	2,39
75	54,68	54,93	56,67	57,03	2,34
80	60,88	61,30	62,97	63,26	2,38
85	67,66	68,23	69,83	70,04	2,38
90	75,31	76,00	77,51	77,77	2,46
95	84,46	85,18	86,62	86,54	2,08

Fuente: Elaboración propia a partir de EPF 1973/74, 1980/81, 1990/91 y ECPF (fichero longitudinal) 2003.

CUADRO A.7.12: Curvas de Lorenz. Extremadura
(porcentaje)

Porcentaje de población	Ordenadas de Lorenz				Dominancia 1973/74-2003
	1973-1974	1980-1981	1990-1991	2003	
5	0,97	1,16	1,04	1,65	0,68
10	2,51	2,88	2,72	3,86	1,35
15	4,40	4,98	4,92	6,55	2,16
20	6,56	7,37	7,45	9,48	2,93
25	8,97	10,10	10,30	12,65	3,68
30	11,68	13,06	13,42	16,04	4,36
35	14,70	16,23	16,85	19,62	4,93
40	17,98	19,62	20,53	23,36	5,38
45	21,56	23,32	24,47	27,27	5,71
50	**25,45**	**27,33**	**28,63**	**31,42**	**5,98**
55	29,59	31,69	33,03	35,86	6,28
60	34,09	36,37	37,79	40,53	6,44
65	38,91	41,36	42,86	45,39	6,48
70	44,15	46,78	48,31	50,52	6,37
75	49,85	52,69	54,21	56,04	6,19
80	56,10	59,13	60,58	62,21	6,11
85	63,25	66,15	67,66	69,21	5,96
90	71,48	74,19	75,63	76,90	5,42
95	81,70	83,74	84,77	85,81	4,11

Fuente: Elaboración propia a partir de EPF 1973/74, 1980/81, 1990/91 y ECPF (fichero longitudinal) 2003.

CUADRO A.7.13: **Curvas de Lorenz. Galicia**
(porcentaje)

Porcentaje de población	Ordenadas de Lorenz				Dominancia 1973/74-2003
	1973-1974	1980-1981	1990-1991	2003	
5	0,80	0,74	1,22	1,70	0,91
10	2,15	2,24	3,16	3,96	1,81
15	3,90	4,09	5,51	6,71	2,81
20	5,98	6,29	8,17	9,69	3,70
25	8,39	8,81	11,06	12,89	4,50
30	11,08	11,69	14,17	16,29	5,21
35	14,00	14,81	17,54	19,88	5,88
40	17,24	18,23	21,12	23,63	6,38
45	20,80	21,94	24,97	27,64	6,84
50	**24,70**	**25,99**	**29,06**	**31,90**	**7,21**
55	29,00	30,31	33,49	36,35	7,35
60	33,59	34,95	38,27	40,97	7,38
65	38,60	39,94	43,39	45,80	7,19
70	44,07	45,31	48,85	50,97	6,90
75	50,03	51,11	54,72	56,79	6,76
80	56,64	57,48	61,15	62,91	6,27
85	63,95	64,60	68,19	69,37	5,41
90	72,30	72,74	76,07	76,84	4,54
95	82,51	82,90	85,32	85,68	3,17

Fuente: Elaboración propia a partir de EPF 1973/74, 1980/81, 1990/91 y ECPF (fichero longitudinal) 2003.

CUADRO A.7.14: **Curvas de Lorenz. Comunidad de Madrid**

(porcentaje)

Porcentaje de población	Ordenadas de Lorenz				Dominancia 1973/74-2003
	1973-1974	1980-1981	1990-1991	2003	
5	1,34	1,09	1,42	1,64	0,30
10	3,13	2,83	3,33	3,87	0,74
15	5,24	4,95	5,57	6,33	1,09
20	7,55	7,29	8,07	9,03	1,48
25	10,10	9,89	10,81	11,97	1,86
30	12,87	12,70	13,77	15,09	2,22
35	15,88	15,77	17,02	18,36	2,48
40	19,13	19,04	20,50	21,91	2,77
45	22,65	22,59	24,25	25,70	3,05
50	**26,39**	**26,44**	**28,31**	**29,64**	**3,25**
55	30,42	30,61	32,61	33,78	3,35
60	34,81	35,07	37,18	38,36	3,55
65	39,52	39,92	42,05	43,40	3,88
70	44,62	45,22	47,24	48,71	4,09
75	50,13	51,13	52,88	54,51	4,38
80	56,22	57,65	58,95	61,05	4,82
85	63,17	64,82	65,79	68,39	5,22
90	71,34	73,23	73,82	76,47	5,13
95	81,76	83,44	83,27	86,13	4,37

Fuente: Elaboración propia a partir de EPF 1973/74, 1980/81, 1990/91 y ECPF (fichero longitudinal) 2003.

CUADRO A.7.15: **Curvas de Lorenz. Región de Murcia**
(porcentaje)

Porcentaje de población	Ordenadas de Lorenz				Dominancia 1973/74-2003
	1973-1974	1980-1981	1990-1991	2003	
5	1,43	1,30	1,01	1,59	0,16
10	3,35	3,20	2,75	3,67	0,32
15	5,60	5,50	4,78	6,17	0,57
20	8,17	8,00	7,15	9,03	0,86
25	10,88	10,74	9,78	12,13	1,24
30	13,81	13,66	12,70	15,49	1,68
35	17,02	16,77	15,93	19,02	2,00
40	20,40	20,24	19,42	22,76	2,35
45	23,99	23,97	23,17	26,76	2,77
50	**27,92**	**28,04**	**27,21**	**30,98**	**3,06**
55	32,14	32,42	31,53	35,53	3,40
60	36,60	37,12	36,14	40,36	3,76
65	41,32	42,22	41,09	45,41	4,09
70	46,38	47,85	46,55	50,78	4,40
75	51,88	53,93	52,38	56,55	4,67
80	57,90	60,51	58,75	63,11	5,21
85	64,63	67,78	65,92	70,24	5,61
90	72,24	76,10	74,15	77,98	5,74
95	81,24	85,88	84,19	86,99	5,75

Fuente: Elaboración propia a partir de EPF 1973/74, 1980/81, 1990/91 y ECPF (fichero longitudinal) 2003.

CUADRO A.7.16: Curvas de Lorenz. Comunidad Foral de Navarra
(porcentaje)

Porcentaje de población	Ordenadas de Lorenz				Dominancia 1973/74-2003
	1973-1974	1980-1981	1990-1991	2003	
5	1,32	1,17	1,41	1,92	0,60
10	3,22	3,06	3,56	4,19	0,97
15	5,57	5,35	6,10	6,71	1,14
20	8,32	7,94	8,95	9,63	1,31
25	11,34	10,77	12,16	12,79	1,45
30	14,61	13,82	15,64	16,21	1,59
35	18,07	17,10	19,32	19,84	1,76
40	21,65	20,56	23,23	23,74	2,09
45	25,47	24,26	27,35	28,06	2,59
50	**29,49**	**28,27**	**31,67**	**32,56**	**3,07**
55	33,75	32,41	36,26	37,19	3,44
60	38,38	36,85	41,12	41,96	3,58
65	43,26	41,61	46,22	46,94	3,68
70	48,60	46,86	51,62	52,35	3,74
75	54,29	52,64	57,39	58,07	3,78
80	60,61	59,05	63,77	64,17	3,56
85	67,52	66,23	70,66	71,06	3,55
90	75,35	74,43	78,50	78,70	3,35
95	84,67	84,64	87,56	87,85	3,17

Fuente: Elaboración propia a partir de EPF 1973/74, 1980/81, 1990/91 y ECPF (fichero longitudinal) 2003.

CUADRO A.7.17: **Curvas de Lorenz. País Vasco**
(porcentaje)

Porcentaje de población	Ordenadas de Lorenz				Dominancia 1973/74-2003
	1973-1974	1980-1981	1990-1991	2003	
5	1,45	1,52	1,17	1,93	0,48
10	3,50	3,78	3,11	4,34	0,84
15	5,90	6,43	5,47	7,03	1,13
20	8,56	9,32	8,08	9,92	1,35
25	11,50	12,44	10,88	13,10	1,60
30	14,69	15,79	13,95	16,50	1,80
35	18,14	19,27	17,26	20,12	1,98
40	21,80	22,97	20,85	23,90	2,10
45	25,67	26,86	24,72	27,88	2,20
50	**29,72**	**31,05**	**28,86**	**32,18**	**2,46**
55	34,03	35,54	33,27	36,89	2,86
60	38,66	40,32	37,97	41,80	3,14
65	43,54	45,49	42,98	46,89	3,34
70	48,80	51,01	48,40	52,33	3,53
75	54,41	56,86	54,24	58,15	3,75
80	60,52	63,23	60,51	64,39	3,87
85	67,27	70,20	67,44	71,06	3,79
90	74,90	77,95	75,36	78,53	3,63
95	83,85	86,96	84,74	87,16	3,32

Fuente: Elaboración propia a partir de EPF 1973/74, 1980/81, 1990/91 y ECPF (fichero longitudinal) 2003.

CUADRO A.7.18: **Curvas de Lorenz. La Rioja**
(porcentaje)

Porcentajes de población	Ordenadas de Lorenz				Dominancia 1973/74-2003
	1973-1974	1980-1981	1990-1991	2003	
5	1,44	1,72	1,30	1,63	0,19
10	3,35	3,95	3,35	3,95	0,61
15	5,58	6,54	5,73	6,61	1,04
20	8,10	9,38	8,32	9,49	1,39
25	10,96	12,46	11,15	12,53	1,58
30	14,07	15,74	14,18	15,80	1,74
35	17,42	19,33	17,40	19,35	1,92
40	21,10	23,15	20,89	23,10	2,00
45	25,03	27,11	24,68	27,03	2,01
50	**29,19**	**31,30**	**28,74**	**31,15**	**1,96**
55	33,56	35,82	33,10	35,48	1,91
60	38,12	40,65	37,75	40,36	2,24
65	43,09	45,77	42,67	45,61	2,51
70	48,48	51,36	47,92	51,05	2,57
75	54,25	57,32	53,53	56,76	2,51
80	60,31	63,79	59,78	62,99	2,68
85	66,95	70,79	66,77	69,81	2,86
90	74,60	78,44	74,53	77,34	2,73
95	83,99	87,52	83,53	86,08	2,09

Fuente: Elaboración propia a partir de EPF 1973/74, 1980/81, 1990/91 y ECPF (fichero longitudinal) 2003.

CUADRO A.7.19: Curvas de Lorenz. Municipios de hasta 10.000 habitantes
(porcentaje)

Porcentaje de población	Ordenadas de Lorenz				Dominancia 1973/74-2003
	1973-1974	1980-1981	1990-1991	2003	
5	1,01	0,88	1,20	1,63	0,62
10	2,57	2,43	3,13	3,92	1,35
15	4,51	4,38	5,45	6,59	2,08
20	6,75	6,65	8,09	9,56	2,81
25	9,27	9,22	11,04	12,76	3,49
30	12,09	12,07	14,25	16,16	4,07
35	15,17	15,22	17,70	19,77	4,60
40	18,54	18,64	21,38	23,62	5,07
45	22,23	22,34	25,33	27,71	5,49
50	**26,20**	**26,32**	**29,54**	**32,04**	**5,84**
55	30,52	30,59	34,05	36,61	6,09
60	35,17	35,22	38,91	41,38	6,21
65	40,19	40,25	44,13	46,38	6,19
70	45,65	45,69	49,69	51,80	6,15
75	51,63	51,63	55,63	57,78	6,15
80	58,18	58,13	62,00	64,15	5,96
85	65,53	65,23	68,92	70,99	5,47
90	73,85	73,17	76,64	78,67	4,82
95	83,81	82,69	85,68	87,54	3,74

Fuente: Elaboración propia a partir de EPF 1973/74, 1980/81, 1990/91 y ECPF (fichero longitudinal) 2003.

CUADRO A.7.20: Curvas de Lorenz. Municipios de 10.001 hasta 50.000 habitantes (excepto capitales de provincia)

(porcentaje)

Porcentaje de población	Ordenadas de Lorenz				Dominancia 1973/74-2003
	1973-1974	1980-1981	1990-1991	2003	
5	1,16	1,09	1,13	1,71	0,55
10	2,93	2,87	3,01	3,93	1,01
15	5,07	5,07	5,29	6,57	1,50
20	7,52	7,60	7,91	9,47	1,95
25	10,24	10,39	10,80	12,60	2,36
30	13,26	13,46	13,94	15,94	2,68
35	16,52	16,78	17,34	19,50	2,98
40	20,06	20,41	20,95	23,39	3,33
45	23,86	24,27	24,84	27,52	3,66
50	**27,92**	**28,42**	**28,99**	**31,87**	**3,95**
55	32,28	32,90	33,45	36,39	4,11
60	36,97	37,64	38,23	41,14	4,16
65	42,03	42,73	43,35	46,19	4,17
70	47,47	48,19	48,84	51,75	4,28
75	53,38	54,14	54,75	57,64	4,26
80	59,81	60,64	61,15	63,88	4,08
85	66,89	67,89	68,22	70,77	3,88
90	74,92	76,10	76,20	78,51	3,59
95	84,41	85,65	85,69	87,45	3,04

Fuente: Elaboración propia a partir de EPF 1973/74, 1980/81, 1990/91 y ECPF (fichero longitudinal) 2003.

CUADRO A.7.21: **Curvas de Lorenz. Municipios de más de 50.000 habitantes**
(porcentaje)

Porcentaje de población	Ordenadas de Lorenz				Dominancia 1973/74-2003
	1973-1974	1980-1981	1990-1991	2003	
5	1,16	1,16	1,13	1,41	0,25
10	2,94	2,96	2,97	3,48	0,53
15	5,07	5,14	5,19	5,89	0,82
20	7,48	7,61	7,72	8,59	1,11
25	10,15	10,35	10,51	11,53	1,38
30	13,07	13,33	13,54	14,69	1,61
35	16,25	16,57	16,82	18,08	1,83
40	19,67	20,04	20,38	21,70	2,03
45	23,34	23,76	24,21	25,53	2,19
50	**27,26**	**27,75**	**28,30**	**29,59**	**2,33**
55	31,46	32,02	32,69	34,01	2,56
60	35,98	36,61	37,39	38,85	2,87
65	40,84	41,55	42,44	43,94	3,11
70	46,09	46,91	47,87	49,32	3,23
75	51,80	52,74	53,70	55,16	3,36
80	58,05	59,18	60,09	61,56	3,52
85	65,02	66,32	67,19	68,68	3,66
90	73,06	74,50	75,31	76,67	3,61
95	82,86	84,28	84,90	86,15	3,29

Fuente: Elaboración propia a partir de EPF 1973/74, 1980/81, 1990/91 y ECPF (fichero longitudinal) 2003.

CUADRO A.7.22: Percentiles de la distribución relativa. Andalucía

Percentil (porcentaje)	1973-1974	1980-1981	1990-1991	2003	Variación 1973/74-2003
5	29,4	27,4	29,1	38,9	-9,50
10	37,3	36,5	39,1	47,1	-9,81
15	43,1	43,8	46,0	52,8	-9,71
20	47,6	50,2	52,3	57,8	-10,15
25	53,7	56,2	58,1	63,2	-9,47
30	59,7	61,3	64,3	67,3	-7,56
35	64,0	67,1	69,7	72,2	-8,19
40	69,7	72,7	75,3	77,6	-7,97
45	74,6	77,8	81,0	82,0	-7,40
50	**80,8**	**83,5**	**87,1**	**88,5**	**-7,61**
55	87,1	89,1	92,4	92,5	-5,42
60	92,2	97,0	99,1	98,0	-5,87
65	99,8	104,2	106,8	104,6	-4,78
70	108,2	113,5	113,9	111,6	-3,42
75	119,4	122,6	121,9	121,0	-1,58
80	132,7	136,6	134,5	132,7	-0,03
85	149,6	151,7	149,9	149,0	0,56
90	177,9	174,1	173,6	170,2	7,70
95	230,4	224,7	216,4	202,7	27,71

Fuente: Elaboración propia a partir de EPF 1973/74, 1980/81, 1990/91 y ECPF (fichero longitudinal) 2003.

CUADRO A.7.23: **Percentiles de la distribución relativa. Aragón**

Percentil (porcentaje)	1973-1974	1980-1981	1990-1991	2003	Variación 1973/74-2003
5	30,5	31,8	38,8	41,2	-10,70
10	38,2	39,7	47,5	46,8	-8,67
15	45,5	47,6	55,3	57,3	-11,75
20	51,4	52,9	59,3	61,0	-9,57
25	56,9	58,0	65,0	63,8	-6,89
30	61,7	63,0	70,5	66,8	-5,14
35	66,8	66,6	75,5	71,9	-5,10
40	71,2	73,5	79,5	76,9	-5,61
45	77,1	79,4	84,6	80,2	-3,10
50	**82,2**	**84,7**	**89,3**	**84,2**	**-1,95**
55	87,3	90,6	93,9	87,2	0,11
60	94,2	96,6	98,8	95,6	-1,43
65	102,8	104,8	104,6	104,7	-1,95
70	108,2	111,1	110,9	108,7	-0,41
75	116,5	119,3	117,4	115,9	0,63
80	126,7	130,2	127,9	129,6	-2,81
85	144,8	151,5	141,2	142,2	2,52
90	171,3	175,3	161,1	164,3	6,98
95	214,1	213,0	200,1	207,2	6,88

Fuente: Elaboración propia a partir de EPF 1973/74, 1980/81, 1990/91 y ECPF (fichero longitudinal) 2003.

CUADRO A.7.24: Percentiles de la distribución relativa. Principado de Asturias

Percentil (porcentaje)	1973-1974	1980-1981	1990-1991	2003	Variación 1973/74-2003
5	23,8	24,5	43,1	46,4	-22,57
10	35,7	35,2	50,6	53,8	-18,19
15	46,9	45,3	56,8	59,2	-12,34
20	53,0	52,1	60,3	64,4	-11,36
25	58,5	60,0	64,7	69,0	-10,47
30	63,8	65,1	71,5	73,3	-9,56
35	70,3	71,7	77,6	76,0	-5,71
40	76,1	76,5	83,5	79,1	-3,08
45	81,3	82,9	87,4	83,7	-2,42
50	**86,0**	**87,5**	**92,0**	**94,0**	**-8,06**
55	91,0	92,2	97,2	99,5	-8,43
60	97,9	100,3	102,9	102,4	-4,44
65	103,3	106,4	107,1	106,0	-2,64
70	110,8	115,2	114,2	112,4	-1,55
75	120,1	123,9	120,1	119,1	0,93
80	132,5	134,0	130,9	127,2	5,26
85	148,5	152,6	143,1	137,0	11,51
90	171,9	176,2	158,6	157,1	14,80
95	219,2	211,2	185,9	171,1	48,10

Fuente: Elaboración propia a partir de EPF 1973/74, 1980/81, 1990/91 y ECPF (fichero longitudinal) 2003.

CUADRO A.7.25: **Percentiles de la distribución relativa. Illes Balears**

Percentil (porcentaje)	1973-1974	1980-1981	1990-1991	2003	Variación 1973/74-2003
5	38,7	31,1	36,3	44,3	-5,57
10	46,8	38,4	44,3	51,7	-4,83
15	52,4	44,7	51,5	59,1	-6,74
20	58,7	50,1	57,3	65,8	-7,07
25	61,9	55,7	60,4	70,8	-8,92
30	67,0	59,7	66,7	73,5	-6,47
35	76,2	65,3	72,1	75,1	1,09
40	79,4	68,6	77,9	77,7	1,70
45	83,4	74,6	81,5	84,2	-0,76
50	**88,9**	**80,8**	**87,1**	**90,7**	**-1,77**
55	94,5	88,3	93,4	93,5	0,92
60	103,2	94,9	99,8	97,8	5,40
65	111,1	100,9	103,8	101,2	9,93
70	113,8	111,9	111,6	108,2	5,59
75	121,7	125,9	122,3	119,7	1,98
80	133,4	140,9	131,7	131,7	1,68
85	139,5	154,8	146,0	144,0	-4,55
90	158,2	189,4	161,2	150,4	7,75
95	189,3	211,7	213,5	186,0	3,30

Fuente: Elaboración propia a partir de EPF 1973/74, 1980/81, 1990/91 y ECPF (fichero longitudinal) 2003.

CUADRO A.7.26: **Percentiles de la distribución relativa. Canarias**

Percentil (porcentaje)	1973-1974	1980-1981	1990-1991	2003	Variación 1973/74-2003
5	28,4	31,6	25,9	34,4	-5,96
10	37,3	39,8	38,9	42,3	-5,04
15	42,6	46,2	46,8	52,5	-9,89
20	49,7	51,0	51,5	55,7	-6,07
25	54,6	55,2	57,6	60,7	-6,10
30	61,8	59,7	63,1	65,8	-3,97
35	63,9	65,2	67,5	69,8	-5,90
40	69,5	70,1	73,9	75,7	-6,19
45	74,5	74,3	77,5	80,6	-6,07
50	**81,4**	**79,6**	**83,8**	**85,7**	**-4,29**
55	86,9	86,0	91,9	92,2	-5,31
60	94,2	93,8	98,4	96,1	-1,95
65	103,5	100,6	108,2	100,9	2,57
70	111,8	109,5	114,6	106,8	4,94
75	124,2	121,1	125,8	118,0	6,22
80	134,1	135,1	136,7	135,2	-1,10
85	152,9	149,3	153,3	146,7	6,27
90	179,4	175,2	176,1	165,5	13,92
95	221,5	224,2	229,9	207,2	14,29

Fuente: Elaboración propia a partir de EPF 1973/74, 1980/81, 1990/91 y ECPF (fichero longitudinal) 2003.

CUADRO A.7.27: Percentiles de la distribución relativa. Cantabria

Percentil (porcentaje)	1973-1974	1980-1981	1990-1991	2003	Variación 1973/74-2003
5	40,5	35,6	33,4	42,3	-1,82
10	46,6	42,2	43,0	47,4	-0,76
15	50,0	48,1	49,4	53,6	-3,64
20	56,2	55,4	56,4	60,5	-4,37
25	60,2	61,5	61,9	64,0	-3,82
30	66,0	64,6	65,8	67,9	-1,92
35	71,7	70,3	71,2	73,5	-1,80
40	75,0	74,7	75,2	77,9	-2,97
45	81,0	79,3	79,2	84,2	-3,25
50	**85,7**	**88,9**	**85,8**	**88,2**	**-2,49**
55	92,2	93,5	91,7	90,9	1,30
60	96,0	101,5	99,6	95,7	0,31
65	102,5	105,5	105,1	99,4	3,07
70	113,3	112,1	112,0	109,2	4,07
75	119,3	121,3	121,2	124,1	-4,80
80	128,0	131,9	133,3	134,4	-6,39
85	140,0	146,2	154,8	149,2	-9,22
90	161,3	173,8	169,3	174,5	-13,18
95	199,3	224,2	210,7	202,4	-3,07

Fuente: Elaboración propia a partir de EPF 1973/74, 1980/81, 1990/91 y ECPF (fichero longitudinal) 2003.

CUADRO A.7.28: **Percentiles de la distribución relativa. Castilla y León**

Percentil (porcentaje)	1973-1974	1980-1981	1990-1991	2003	Variación 1973/74-2003
5	25,3	29,7	33,4	37,9	-12,62
10	33,9	39,0	42,3	45,8	-11,93
15	39,3	44,6	49,2	54,0	-14,69
20	45,2	51,6	56,8	58,1	-12,87
25	48,8	57,1	60,8	62,9	-14,05
30	54,9	61,8	64,5	68,2	-13,37
35	60,1	66,7	69,3	74,0	-13,94
40	65,1	71,2	73,7	78,6	-13,58
45	70,6	77,4	78,6	82,6	-12,00
50	**76,1**	**83,0**	**84,0**	**86,2**	**-10,12**
55	84,2	89,0	89,6	93,0	-8,74
60	90,4	97,2	95,3	100,1	-9,77
65	99,4	103,8	102,2	105,8	-6,40
70	108,4	112,7	112,0	112,0	-3,53
75	117,5	122,6	120,6	124,3	-6,77
80	131,2	134,5	134,4	132,3	-1,15
85	150,6	152,3	148,4	145,3	5,30
90	180,7	174,2	172,9	167,2	13,57
95	246,3	218,3	219,3	203,9	42,38

Fuente: Elaboración propia a partir de EPF 1973/74, 1980/81, 1990/91 y ECPF (fichero longitudinal) 2003.

CUADRO A.7.29: **Percentiles de la distribución relativa. Castilla-La Mancha**

Percentil (porcentaje)	1973-1974	1980-1981	1990-1991	2003	Variación 1973/74-2003
5	29,8	31,7	36,2	45,1	-15,33
10	39,5	41,4	44,5	53,6	-14,17
15	43,7	48,0	50,8	57,3	-13,56
20	48,7	54,8	57,3	60,0	-11,27
25	53,5	59,7	61,7	64,9	-11,48
30	58,5	64,7	65,8	69,2	-10,77
35	64,2	69,3	71,2	73,0	-8,83
40	69,0	74,3	75,7	77,5	-8,46
45	73,1	78,2	81,3	81,8	-8,72
50	**80,2**	**84,6**	**86,0**	**85,3**	**-5,13**
55	86,3	89,7	91,1	89,5	-3,19
60	94,8	95,2	97,4	94,2	0,53
65	102,1	103,9	104,9	103,5	-1,46
70	113,0	113,3	112,8	117,6	-4,65
75	121,5	119,9	123,0	123,3	-1,77
80	133,6	131,2	133,5	128,9	4,72
85	148,2	147,3	146,2	141,8	6,40
90	175,0	169,1	167,5	171,0	4,00
95	222,7	217,8	204,7	197,8	24,91

Fuente: Elaboración propia a partir de EPF 1973/74, 1980/81, 1990/91 y ECPF (fichero longitudinal) 2003.

CUADRO A.7.30: **Percentiles de la distribución relativa. Cataluña**

Percentil (porcentaje)	1973-1974	1980-1981	1990-1991	2003	Variación 1973/74-2003
5	36,0	33,5	37,8	40,5	-4,53
10	44,6	43,0	44,2	49,4	-4,80
15	52,5	50,2	49,9	54,5	-1,95
20	58,2	55,3	55,1	61,3	-3,12
25	62,3	61,2	60,0	64,8	-2,49
30	67,0	65,1	66,2	68,9	-1,85
35	71,7	69,0	70,7	72,3	-0,62
40	76,3	73,3	75,7	76,3	-0,03
45	81,0	78,1	82,0	83,0	-1,93
50	**86,4**	**83,5**	**86,9**	**90,3**	**-3,98**
55	92,9	89,2	92,3	94,7	-1,78
60	98,0	94,1	98,6	98,4	-0,39
65	105,8	101,3	103,8	103,2	2,63
70	112,8	109,8	113,0	111,5	1,35
75	120,2	119,0	122,3	118,5	1,71
80	131,3	128,5	133,6	138,0	-6,70
85	146,3	142,4	151,3	149,1	-2,85
90	165,0	166,5	167,4	160,8	4,26
95	206,1	201,7	207,0	198,1	7,94

Fuente: Elaboración propia a partir de EPF 1973/74, 1980/81, 1990/91 y ECPF (fichero longitudinal) 2003.

CUADRO A.7.31: **Percentiles de la distribución relativa. Comunitat Valenciana**

Percentil (porcentaje)	1973-1974	1980-1981	1990-1991	2003	Variación 1973/74-2003
5	34,9	35,9	39,4	38,6	-3,73
10	45,0	44,2	45,7	49,3	-4,32
15	50,2	48,8	52,7	56,5	-6,35
20	56,4	55,5	57,9	59,7	-3,27
25	61,3	60,5	63,5	62,8	-1,49
30	66,4	65,6	68,8	68,9	-2,54
35	70,5	68,9	72,9	73,9	-3,37
40	74,4	75,3	77,5	78,4	-4,00
45	79,7	80,8	83,1	82,0	-2,35
50	**84,0**	**85,5**	**88,3**	**86,1**	**-2,12**
55	89,6	92,1	94,1	95,9	-6,26
60	97,1	97,6	100,2	100,7	-3,62
65	103,6	105,4	106,9	105,6	-2,03
70	111,5	112,1	112,8	110,8	0,76
75	119,5	122,1	121,4	118,7	0,80
80	129,4	133,9	130,9	130,0	-0,60
85	142,9	144,9	143,5	143,5	-0,64
90	165,2	165,7	165,8	164,4	0,84
95	207,1	215,5	202,7	197,9	9,23

Fuente: Elaboración propia a partir de EPF 1973/74, 1980/81, 1990/91 y ECPF (fichero longitudinal) 2003.

CUADRO A.7.32: **Percentiles de la distribución relativa. Extremadura**

Percentil (porcentaje)	1973-1974	1980-1981	1990-1991	2003	Variación 1973/74-2003
5	26,8	30,7	27,8	40,3	-13,55
10	34,3	38,7	40,2	49,5	-15,23
15	40,3	43,9	47,2	56,3	-16,08
20	45,7	52,6	54,3	61,5	-15,72
25	50,7	57,4	59,0	65,0	-14,37
30	57,1	61,4	65,4	69,6	-12,49
35	62,3	65,8	71,6	73,6	-11,28
40	68,6	71,6	76,4	76,4	-7,79
45	75,3	76,5	80,7	79,9	-4,57
50	**80,5**	**84,8**	**85,3**	**86,0**	**-5,49**
55	85,7	90,7	92,3	91,4	-5,73
60	93,5	96,1	97,9	94,6	-1,11
65	100,5	104,4	104,4	99,2	1,36
70	108,8	112,8	113,2	106,9	1,89
75	119,1	122,8	122,2	115,6	3,46
80	131,9	131,6	133,9	132,9	-1,06
85	154,6	151,3	150,1	144,8	9,73
90	179,9	171,1	168,7	160,3	19,57
95	233,8	215,1	203,9	206,6	27,22

Fuente: Elaboración propia a partir de EPF 1973/74, 1980/81, 1990/91 y ECPF (fichero longitudinal) 2003.

CUADRO A.7.33: **Percentiles de la distribución relativa. Galicia**

Percentil (porcentaje)	1973-1974	1980-1981	1990-1991	2003	Variación 1973/74-2003
5	22,6	24,5	33,1	40,3	-17,71
10	30,8	34,1	42,9	50,9	-20,08
15	38,8	40,8	50,3	57,8	-19,01
20	45,1	46,7	55,6	61,5	-16,40
25	50,9	54,5	60,1	66,6	-15,68
30	56,5	60,3	64,3	69,8	-13,27
35	60,6	65,2	69,3	73,8	-13,20
40	67,8	69,9	74,5	77,5	-9,60
45	73,3	77,9	79,0	82,8	-9,48
50	**82,1**	**83,9**	**85,4**	**87,6**	**-5,51**
55	88,7	89,8	92,1	90,4	-1,75
60	96,0	95,6	98,9	94,1	1,85
65	105,7	103,4	105,6	99,9	5,87
70	115,1	111,8	113,8	111,3	3,77
75	125,0	120,5	121,9	120,2	4,83
80	138,1	133,4	134,3	124,7	13,38
85	154,1	151,0	148,8	138,3	15,76
90	181,7	178,2	167,8	158,7	23,03
95	239,9	235,7	209,2	197,4	42,46

Fuente: Elaboración propia a partir de EPF 1973/74, 1980/81, 1990/91 y ECPF (fichero longitudinal) 2003.

CUADRO A.7.34: **Percentiles de la distribución relativa. Comunidad de Madrid**

Percentil (porcentaje)	1973-1974	1980-1981	1990-1991	2003	Variación 1973/74-2003
5	32,7	30,0	32,8	39,5	-6,83
10	39,2	39,4	41,5	47,7	-8,47
15	44,4	44,9	46,9	51,3	-6,90
20	49,1	49,4	52,5	56,4	-7,26
25	53,3	53,9	56,9	60,3	-6,97
30	57,5	59,3	61,9	63,9	-6,35
35	62,4	62,9	67,6	67,4	-5,06
40	67,7	67,4	71,8	74,1	-6,42
45	72,5	74,5	77,7	77,5	-4,96
50	**77,0**	**79,3**	**83,9**	**80,0**	**-3,06**
55	84,2	86,7	89,0	85,7	-1,48
60	90,9	92,3	94,8	98,9	-8,03
65	97,7	101,1	99,9	103,6	-5,97
70	106,6	110,8	107,2	110,5	-3,98
75	114,9	124,9	117,3	123,6	-8,64
80	128,8	135,9	128,7	137,5	-8,73
85	148,3	154,6	145,8	155,6	-7,30
90	185,0	182,4	178,0	167,2	17,79
95	248,6	234,8	210,8	216,0	32,61

Fuente: Elaboración propia a partir de EPF 1973/74, 1980/81, 1990/91 y ECPF (fichero longitudinal) 2003.

CUADRO A.7.35: **Percentiles de la distribución relativa. Región de Murcia**

Percentil (porcentaje)	1973-1974	1980-1981	1990-1991	2003	Variación 1973/74-2003
5	34,8	33,7	28,5	37,6	-2,89
10	40,8	43,8	38,4	45,7	-4,89
15	48,9	47,7	43,6	53,6	-4,73
20	53,4	53,2	50,8	60,0	-6,61
25	55,6	56,1	54,5	65,1	-9,45
30	62,0	60,8	61,7	69,3	-7,33
35	66,7	66,5	66,6	72,8	-6,04
40	69,4	71,6	73,2	76,8	-7,37
45	74,5	77,8	77,6	82,2	-7,71
50	80,1	84,3	84,3	87,7	-7,66
55	89,0	90,9	89,0	94,0	-5,02
60	91,2	96,3	94,5	98,6	-7,42
65	97,9	106,6	104,3	103,4	-5,54
70	106,8	118,6	113,1	111,6	-4,87
75	113,4	125,7	122,1	120,3	-6,88
80	128,1	138,2	136,0	138,2	-10,13
85	140,9	154,5	150,7	145,9	-5,09
90	161,2	179,5	178,9	171,6	-10,40
95	200,2	212,7	235,9	198,7	1,43

Fuente: Elaboración propia a partir de EPF 1973/74, 1980/81, 1990/91 y ECPF (fichero longitudinal) 2003.

CUADRO A.7.36: **Percentiles de la distribución relativa. Comunidad Foral de Navarra**

Percentil (porcentaje)	1973-1974	1980-1981	1990-1991	2003	Variación 1973/74-2003
5	33,3	31,9	38,2	41,5	-8,15
10	43,7	42,3	47,2	48,3	-4,52
15	53,1	47,0	54,2	52,7	0,37
20	57,3	55,0	60,8	61,5	-4,17
25	63,4	58,7	67,3	65,7	-2,26
30	68,4	62,7	71,7	71,0	-2,68
35	69,6	67,7	76,0	74,8	-5,17
40	73,9	70,5	80,8	82,9	-9,04
45	78,0	76,9	84,1	89,0	-11,00
50	**83,1**	**82,2**	**88,3**	**91,3**	**-8,13**
55	88,7	84,6	96,0	93,5	-4,85
60	94,6	92,0	99,9	97,4	-2,77
65	101,7	98,7	105,1	103,4	-1,75
70	110,7	110,5	111,0	111,6	-0,99
75	121,0	121,6	123,7	116,2	4,83
80	131,0	139,7	133,6	126,6	4,41
85	147,8	152,4	144,0	145,1	2,67
90	166,3	178,4	167,7	171,4	-5,16
95	220,1	235,2	193,2	197,0	23,09

Fuente: Elaboración propia a partir de EPF 1973/74, 1980/81, 1990/91 y ECPF (fichero longitudinal) 2003.

CUADRO A.7.37: **Percentiles de la distribución relativa. País Vasco**

Percentil (porcentaje)	1973-1974	1980-1981	1990-1991	2003	Variación 1973/74-2003
5	37,9	39,9	32,6	44,0	-6,05
10	44,9	50,9	44,0	51,9	-7,08
15	51,3	55,0	50,3	55,3	-3,96
20	55,3	60,0	54,1	60,4	-5,13
25	61,3	65,2	58,3	66,0	-4,71
30	66,3	67,9	63,8	70,1	-3,82
35	71,1	72,1	69,0	74,2	-3,13
40	75,8	76,4	75,0	77,7	-1,89
45	79,0	80,1	80,0	82,0	-3,04
50	**82,9**	**87,2**	**85,3**	**91,3**	**-8,38**
55	88,6	92,7	91,4	97,0	-8,43
60	94,8	99,8	97,1	99,8	-5,08
65	101,1	106,8	104,2	104,4	-3,35
70	108,3	113,5	112,5	113,1	-4,77
75	116,1	121,3	121,4	120,2	-4,11
80	127,9	133,3	131,7	129,6	-1,71
85	142,1	145,6	146,4	139,4	2,77
90	165,8	165,0	170,4	157,9	7,95
95	195,8	199,1	209,9	191,4	4,45

Fuente: Elaboración propia a partir de EPF 1973/74, 1980/81, 1990/91 y ECPF (fichero longitudinal) 2003.

CUADRO A.7.38: **Percentiles de la distribución relativa. La Rioja**

Percentil (porcentaje)	1973-1974	1980-1981	1990-1991	2003	Variación 1973/74-2003
5	32,0	40,8	37,3	40,5	-8,50
10	41,2	48,0	45,1	48,3	-7,07
15	47,0	54,3	50,2	56,1	-9,17
20	53,7	58,7	54,2	59,8	-6,08
25	59,8	63,7	58,5	62,8	-3,08
30	64,1	69,2	61,8	68,0	-3,89
35	71,6	74,4	66,7	73,4	-1,85
40	76,2	77,6	72,4	77,0	-0,83
45	80,5	82,0	78,0	80,4	0,15
50	**85,9**	**88,1**	**84,0**	**84,1**	**1,78**
55	89,5	94,2	89,5	91,2	-1,69
60	95,4	99,7	96,1	102,0	-6,54
65	102,9	106,4	102,0	107,4	-4,48
70	111,5	116,3	107,0	110,4	1,15
75	119,3	124,6	116,8	118,0	1,31
80	125,3	134,8	134,8	129,0	-3,77
85	138,9	146,2	143,7	140,5	-1,54
90	170,0	162,5	165,6	165,1	4,85
95	202,2	201,4	218,3	210,0	-7,84

Fuente: Elaboración propia a partir de EPF 1973/74, 1980/81, 1990/91 y ECPF (fichero longitudinal) 2003.

CUADRO A.7.39: **Percentiles de la distribución relativa. Municipios de hasta 10.000 habitantes**

Percentil (porcentaje)	1973-1974	1980-1981	1990-1991	2003	Variación 1973/74-2003
5	27,3	26,2	33,3	41,4	-14,11
10	35,4	35,1	42,5	50,6	-15,19
15	41,9	42,3	49,9	56,2	-14,29
20	47,7	48,4	55,9	62,0	-14,22
25	53,4	53,8	61,7	66,0	-12,61
30	59,2	60,3	66,5	70,1	-10,86
35	64,5	66,0	71,3	74,7	-10,24
40	70,7	70,7	76,1	79,3	-8,54
45	75,9	77,1	81,6	84,2	-8,27
50	**82,7**	**82,5**	**87,3**	**88,7**	**-5,99**
55	89,4	88,8	93,5	93,6	-4,18
60	97,1	96,3	101,2	97,7	-0,63
65	104,7	104,5	107,8	102,7	1,99
70	113,8	113,8	114,8	114,9	-1,07
75	125,0	124,1	123,1	123,7	1,36
80	138,2	135,7	132,5	131,9	6,23
85	153,9	149,0	145,0	145,4	8,45
90	180,4	171,2	165,1	161,2	19,15
95	224,8	212,9	200,3	193,1	31,69

Fuente: Elaboración propia a partir de EPF 1973/74, 1980/81, 1990/91 y ECPF (fichero longitudinal) 2003.

CUADRO A.7.40: **Percentiles de la distribución relativa. Municipios de 10.001 hasta 50.000 habitantes (excepto capitales de provincia)**

Percentil (porcentaje)	1973-1974	1980-1981	1990-1991	2003	Variación 1973/74-2003
5	30,9	30,4	32,8	40,0	-9,01
10	39,2	40,6	42,2	49,4	-10,19
15	46,1	47,5	49,2	55,7	-9,62
20	51,6	53,2	55,7	60,2	-8,59
25	57,7	58,8	60,0	64,7	-6,96
30	62,9	63,5	65,5	69,0	-6,09
35	67,9	69,7	69,8	74,4	-6,49
40	73,5	74,6	75,3	80,2	-6,77
45	78,6	79,9	80,1	84,9	-6,29
50	**84,0**	**86,1**	**86,1**	**88,8**	**-4,75**
55	90,2	92,1	92,3	92,6	-2,41
60	97,4	98,0	98,8	97,5	-0,07
65	104,9	104,9	105,9	105,9	-0,93
70	113,3	114,0	113,7	114,5	-1,18
75	123,9	124,4	122,6	120,4	3,53
80	134,9	135,7	134,1	131,7	3,18
85	150,3	154,2	149,6	144,7	5,53
90	173,1	175,1	171,0	165,1	8,02
95	212,2	213,3	216,7	189,8	22,35

Fuente: Elaboración propia a partir de EPF 1973/74, 1980/81, 1990/91 y ECPF (fichero longitudinal) 2003.

CUADRO A.7.41: Percentiles de la distribución relativa. Municipios de más de 50.000 habitantes

Percentil (porcentaje)	1973-1974	1980-1981	1990-1991	2003	Variación 1973/74-2003
5	31,2	31,6	32,0	36,1	-4,89
10	39,1	40,1	41,2	45,1	-6,01
15	45,5	46,8	47,6	50,9	-5,46
20	50,8	52,4	53,3	56,7	-5,93
25	56,0	57,1	58,1	61,1	-5,08
30	61,1	62,4	62,9	65,4	-4,29
35	65,8	67,0	68,4	70,3	-4,47
40	71,0	71,7	73,7	74,6	-3,64
45	76,0	77,1	79,2	78,5	-2,50
50	**80,8**	**82,2**	**84,9**	**84,3**	**-3,50**
55	87,4	88,7	90,8	93,7	-6,33
60	93,6	94,9	97,4	99,2	-5,62
65	100,9	102,9	104,8	104,5	-3,67
70	109,2	111,6	112,1	111,2	-1,94
75	119,3	121,8	121,8	122,4	-3,13
80	131,8	135,6	134,3	134,0	-2,17
85	149,5	151,1	150,7	153,3	-3,84
90	175,0	177,7	175,4	166,3	8,61
95	225,1	220,8	215,8	210,6	14,43

Fuente: Elaboración propia a partir de EPF 1973/74, 1980/81, 1990/91 y ECPF (fichero longitudinal) 2003.

CUADRO A.7.42: Índices de desigualdad de Gini, *G*

Comunidades autónomas	1973-1974	1980-1981 (índice)	1990-1991	2003	1973-1974	1980-1981 (España = 100)	1990-1991	2003	1973-1974	1980-1981 (España = 100 en 1973-1974)	1990-1991	2003
Andalucía	0,355	0,340	0,321	0,283	99,71	98,38	101,12	99,14	99,71	95,64	90,28	79,64
Aragón	0,342	0,327	0,276	0,280	96,07	94,49	86,87	98,07	96,07	91,85	77,56	78,78
Asturias, Principado de	0,329	0,323	0,250	0,234	92,53	93,40	78,82	81,93	92,53	90,79	70,38	65,82
Balears, illes	0,274	0,337	0,299	0,252	76,91	97,33	94,01	88,09	76,91	94,62	83,94	70,77
Canarias	0,350	0,347	0,329	0,304	98,47	100,28	103,44	106,44	98,47	97,48	92,36	85,51
Cantabria	0,292	0,304	0,305	0,280	82,16	87,86	95,89	97,83	82,16	85,40	85,62	78,59
Castilla y León	0,387	0,335	0,313	0,277	108,89	96,85	98,39	96,77	108,89	94,15	87,85	77,74
Castilla-La Mancha	0,347	0,318	0,296	0,259	97,47	91,90	93,17	90,73	97,47	89,34	83,19	72,89
Cataluña	0,294	0,317	0,297	0,271	82,59	91,72	93,40	94,90	82,59	89,16	83,39	76,24
C. Valenciana	0,305	0,304	0,280	0,274	85,77	87,78	88,28	95,83	85,77	85,33	78,82	76,98
Extremadura	0,369	0,334	0,317	0,277	103,73	96,65	99,72	96,95	103,73	93,95	89,04	77,88
Galicia	0,373	0,358	0,307	0,272	104,75	103,58	96,49	95,07	104,75	100,69	86,15	76,38
Madrid, C. de	0,356	0,349	0,326	0,297	100,18	100,79	102,70	104,01	100,18	97,97	91,70	83,56
Murcia, Región de	0,337	0,316	0,337	0,277	94,66	91,46	106,22	96,98	94,66	88,91	94,83	77,91
Navarra, C. Foral de	0,307	0,325	0,269	0,257	86,19	93,93	84,70	90,04	86,19	91,31	75,62	72,34
País Vasco	0,306	0,275	0,313	0,257	86,00	79,39	98,55	90,06	86,00	77,17	87,99	72,35
Rioja, La	0,313	0,269	0,317	0,276	88,03	77,88	99,90	96,42	88,03	75,70	89,19	77,46
España	**0,356**	**0,346**	**0,318**	**0,286**	**100,00**	**100,00**	**100,00**	**100,00**	**100,00**	**97,21**	**89,28**	**80,34**
Municipios[1]												
Pequeños	0,350	0,352	0,299	0,263	98,23	101,90	94,21	91,84	98,23	99,05	84,11	73,78
Medianos	0,326	0,316	0,308	0,265	91,49	91,24	96,90	92,78	91,49	88,69	86,51	74,53
Grandes	0,341	0,329	0,320	0,297	95,86	95,22	100,66	103,86	95,86	92,57	89,88	83,44

[1] Pequeños: municipios de hasta 10.000 habitantes; medianos: de 10.001 hasta 50.000 habitantes (excepto capitales de provincia); y grandes: de más de 50.000 habitantes.
Fuente: Elaboración propia a partir de EPF 1973/74, 1980/81, 1990/91 y ECPF (fichero longitudinal) 2003.

CUADRO A.7.43: Índices de desigualdad de Theil, T*

Comunidades autónomas	1973-1974	1980-1981	1990-1991	2003	1973-1974	1980-1981	1990-1991	2003	1973-1974	1980-1981	1990-1991	2003
	(índice)				(España = 100)				(España = 100 en 1973-1974)			
Andalucía	0,212	0,206	0,185	0,139	96,83	97,78	104,97	102,23	96,83	94,03	84,60	63,27
Aragón	0,201	0,191	0,134	0,130	91,77	90,57	75,87	95,62	91,77	87,10	61,15	59,18
Asturias, Principado de	0,195	0,196	0,106	0,089	89,00	92,90	59,95	65,49	89,00	89,34	48,31	40,53
Balears, illes	0,127	0,188	0,161	0,107	58,06	89,41	91,03	78,62	58,06	85,99	73,36	48,66
Canarias	0,210	0,206	0,198	0,154	95,85	97,89	112,08	113,46	95,85	94,14	90,33	70,22
Cantabria	0,139	0,163	0,164	0,132	63,56	77,31	93,18	97,03	63,56	74,35	75,09	60,06
Castilla y León	0,259	0,196	0,168	0,125	118,03	93,28	95,03	91,89	118,03	89,70	76,59	56,87
Castilla-La Mancha	0,201	0,177	0,148	0,106	91,61	83,91	84,08	78,44	91,61	80,69	67,76	48,55
Cataluña	0,150	0,177	0,149	0,122	68,47	83,93	84,40	90,33	68,47	80,71	68,02	55,91
C. Valenciana	0,159	0,157	0,134	0,125	72,66	74,67	75,73	92,42	72,66	71,81	61,03	57,20
Extremadura	0,235	0,191	0,181	0,126	107,26	90,61	102,36	93,01	107,26	87,14	82,50	57,56
Galicia	0,246	0,236	0,162	0,122	112,22	111,84	91,84	89,87	112,22	107,56	74,01	55,62
Madrid, C. de	0,209	0,205	0,180	0,141	95,46	97,30	102,22	104,36	95,46	93,57	82,38	64,59
Murcia, Región de	0,193	0,171	0,197	0,128	88,16	81,07	111,55	94,78	88,16	77,96	89,90	58,66
Navarra, C. Foral de	0,159	0,178	0,129	0,107	72,76	84,31	72,93	79,15	72,76	81,08	58,77	48,98
País Vasco	0,161	0,126	0,172	0,107	73,51	59,85	97,69	78,75	73,51	57,55	78,73	48,74
Rioja, La	0,166	0,118	0,177	0,125	75,73	56,02	100,29	92,11	75,73	53,87	80,83	57,01
España	**0,219**	**0,211**	**0,177**	**0,136**	**100,00**	**100,00**	**100,00**	**100,00**	**100,00**	**96,17**	**80,59**	**61,89**
Municipios[1]												
Pequeños	0,211	0,227	0,158	0,116	96,51	107,76	89,30	85,88	96,51	103,63	71,97	53,15
Medianos	0,182	0,174	0,167	0,115	82,98	82,39	94,65	84,67	82,98	79,24	76,28	52,40
Grandes	0,198	0,185	0,179	0,147	90,24	87,72	101,25	108,31	90,24	84,36	81,60	67,03

[1] Pequeños: municipios de hasta 10.000 habitantes; medianos: de 10.001 hasta 50.000 habitantes (excepto capitales de provincia); y grandes: de más de 50.000 habitantes.

Fuente: Elaboración propia a partir de EPF 1973/74, 1980/81, 1990/91 y ECPF (fichero longitudinal) 2003.

CUADRO A.7.44: Índices de desigualdad de Atkinson, $\varepsilon = 0,5$

Comunidades autónomas	1973-1974	1980-1981	1990-1991	2003	1973-1974	1980-1981	1990-1991	2003	1973-1974	1980-1981	1990-1991	2003
	(índice)				(España = 100)				(España = 100 en 1973-1974)			
Andalucía	0,103	0,096	0,086	0,066	98,29	96,25	101,80	99,73	98,29	91,58	81,65	62,67
Aragón	0,101	0,091	0,065	0,066	95,85	91,11	76,74	99,17	95,85	86,68	61,54	62,32
Asturias, Principado de	0,091	0,088	0,051	0,044	86,25	88,40	61,01	67,04	86,25	84,11	48,93	42,13
Balears, illes	0,063	0,092	0,075	0,053	59,65	91,47	88,65	80,55	59,65	87,03	71,10	50,62
Canarias	0,101	0,100	0,090	0,076	96,14	100,13	106,14	115,67	96,14	95,27	85,12	72,69
Cantabria	0,070	0,076	0,077	0,064	66,65	75,61	91,49	96,05	66,65	71,94	73,38	60,36
Castilla y León	0,127	0,093	0,080	0,061	120,91	93,27	95,38	92,04	120,91	88,74	76,49	57,85
Castilla-La Mancha	0,099	0,084	0,072	0,053	94,26	84,37	85,45	80,14	94,26	80,27	68,53	50,37
Cataluña	0,072	0,091	0,072	0,060	68,71	90,49	84,75	90,00	68,71	86,09	67,97	56,56
C. Valenciana	0,078	0,076	0,065	0,062	74,40	75,80	76,48	93,69	74,40	72,12	61,33	58,88
Extremadura	0,114	0,092	0,084	0,063	108,19	92,36	99,67	94,89	108,19	87,87	79,94	59,63
Galicia	0,114	0,108	0,078	0,061	108,62	108,10	92,14	92,70	108,62	102,85	73,90	58,25
Madrid, C. de	0,105	0,099	0,094	0,070	99,37	98,43	111,37	105,70	99,37	93,65	89,32	66,43
Murcia, Región de	0,101	0,080	0,093	0,063	96,13	79,94	110,43	95,18	96,13	76,06	88,57	59,81
Navarra, C. Foral de	0,079	0,087	0,060	0,053	74,90	86,45	71,44	79,96	74,90	82,25	57,29	50,25
País Vasco	0,082	0,061	0,083	0,053	78,35	61,21	98,47	80,57	78,35	58,24	78,98	50,63
Rioja, La	0,084	0,058	0,086	0,062	79,79	57,70	102,29	93,91	79,79	54,90	82,04	59,02
España	**0,105**	**0,100**	**0,084**	**0,066**	**100,00**	**100,00**	**100,00**	**100,00**	**100,00**	**95,14**	**80,20**	**62,85**
Municipios[1]												
Pequeños	0,101	0,110	0,075	0,057	95,58	109,96	89,44	85,45	95,58	104,62	71,73	53,70
Medianos	0,088	0,082	0,079	0,056	83,22	81,45	93,03	85,34	83,22	77,49	74,61	53,64
Grandes	0,097	0,089	0,086	0,071	92,26	88,73	101,64	107,46	92,26	84,42	81,51	67,53

[1] Pequeños: municipios de hasta 10.000 habitantes; medianos: de 10.001 hasta 50.000 habitantes (excepto capitales de provincia); y grandes: de más de 50.000 habitantes.
Fuente: Elaboración propia a partir de EPF 1973/74, 1980/81, 1990/91 y ECPF (fichero longitudinal) 2003.

CUADRO A.7.45: Índices de desigualdad de Atkinson, $\varepsilon = 1$

Comunidad autónomas	1973-1974 (índice)	1980-1981	1990-1991	2003	1973-1974 (España = 100)	1980-1981	1990-1991	2003	1973-1974 (España = 100 en 1973-1974)	1980-1981	1990-1991	2003
Andalucía	0,191	0,186	0,169	0,129	97,15	98,00	104,52	102,07	97,15	94,62	85,98	65,78
Aragón	0,182	0,174	0,125	0,122	92,56	91,45	77,46	95,90	92,56	88,30	63,72	61,80
Asturias, Principado de	0,177	0,178	0,100	0,085	90,04	93,57	62,05	67,01	90,04	90,35	51,04	43,19
Illes Balears, illes	0,119	0,172	0,148	0,101	60,70	90,39	91,74	79,75	60,70	87,27	75,47	51,40
Canarias	0,189	0,186	0,180	0,143	96,27	98,10	110,93	112,46	96,27	94,72	91,25	72,47
Cantabria	0,130	0,150	0,152	0,123	66,07	79,12	93,73	97,23	66,07	76,40	77,10	62,66
Castilla y León	0,228	0,178	0,154	0,117	115,81	93,92	95,43	92,40	115,81	90,69	78,51	59,54
Castilla-La Mancha	0,182	0,162	0,138	0,101	92,43	85,29	85,24	79,58	92,43	82,35	70,12	51,28
Cataluña	0,139	0,162	0,138	0,115	70,80	85,31	85,54	90,91	70,80	82,37	70,37	58,59
C. Valenciana	0,147	0,146	0,125	0,118	74,80	76,63	77,33	92,89	74,80	73,99	63,61	59,86
Extremadura	0,209	0,174	0,165	0,118	106,44	91,49	102,16	93,44	106,44	88,33	84,04	60,22
Galicia	0,218	0,210	0,150	0,115	110,78	110,51	92,49	90,48	110,78	106,70	76,08	58,31
Madrid, C. de	0,189	0,185	0,165	0,132	95,92	97,57	102,03	104,06	95,92	94,20	83,93	67,06
Murcia, Región de	0,176	0,157	0,179	0,121	89,27	82,65	110,44	95,11	89,27	79,80	90,85	61,29
Navarra, C. Foral de	0,147	0,163	0,121	0,102	74,89	85,67	74,64	80,26	74,89	82,72	61,40	51,72
País Vasco	0,149	0,118	0,158	0,101	75,60	62,36	97,88	79,87	75,60	60,21	80,52	51,47
Rioja, La	0,153	0,111	0,162	0,117	77,70	58,61	100,27	92,60	77,70	56,59	82,49	59,68
España	**0,197**	**0,190**	**0,162**	**0,127**	**100,00**	**100,00**	**100,00**	**100,00**	**100,00**	**96,55**	**82,26**	**64,45**
Municipios[1]												
Pequeños	0,191	0,203	0,146	0,110	96,86	106,92	90,12	86,69	96,86	103,23	74,14	55,87
Medianos	0,166	0,159	0,154	0,108	84,49	83,89	95,09	85,54	84,49	81,00	78,22	55,13
Grandes	0,179	0,169	0,164	0,137	91,17	88,83	101,14	107,71	91,17	85,77	83,20	69,42

[1] Pequeños: municipios de hasta 10.000 habitantes; medianos: de 10.001 hasta 50.000 habitantes (excepto capitales de provincia); y grandes: de más de 50.000 habitantes.

Fuente: Elaboración propia a partir de EPF 1973/74, 1980/81, 1990/91 y ECPF (fichero longitudinal) 2003.

CUADRO A.7.46: Índices de desigualdad de Atkinson, ε = 2

Comunidades autónomas	1973-1974	1980-1981 (índice)	1990-1991	2003	1973-1974	1980-1981 (España = 100)	1990-1991	2003	1973-1974	1980-1981 (España = 100 en 1973-1974)	1990-1991	2003
Andalucía	0,338	0,379	0,372	0,274	93,88	101,66	111,40	113,24	93,88	105,39	103,44	76,23
Aragón	0,318	0,346	0,251	0,216	88,35	92,72	75,06	89,12	88,35	96,12	69,70	59,99
Asturias, Principado de	0,348	0,375	0,196	0,158	96,70	100,55	58,51	65,04	96,70	104,23	54,33	43,78
Illes Balears, illes	0,236	0,307	0,322	0,188	65,44	82,29	96,25	77,57	65,44	85,31	89,37	52,22
Canarias	0,345	0,339	0,410	0,254	95,98	90,88	122,66	104,92	95,98	94,21	113,89	70,63
Cantabria	0,228	0,335	0,312	0,238	63,30	89,88	93,22	98,33	63,30	93,18	86,56	66,19
Castilla y León	0,394	0,354	0,300	0,217	109,35	94,90	89,67	89,64	109,35	98,37	83,26	60,34
Castilla-La Mancha	0,316	0,331	0,268	0,183	87,83	88,74	80,11	75,46	87,83	91,99	74,39	50,80
Cataluña	0,276	0,292	0,271	0,221	76,57	78,34	81,02	91,22	76,57	81,21	75,24	61,41
C. Valenciana	0,277	0,282	0,252	0,218	76,83	75,62	75,40	90,09	76,83	78,39	70,01	60,65
Extremadura	0,373	0,319	0,433	0,215	103,71	85,41	129,60	88,80	103,71	88,54	120,34	59,78
Galicia	0,405	0,432	0,297	0,206	112,60	115,79	88,95	84,99	112,60	120,03	82,59	57,21
Madrid, C. de	0,320	0,338	0,280	0,236	88,99	90,66	83,69	97,36	88,99	93,99	77,71	65,54
Murcia, Región de	0,290	0,379	0,339	0,227	80,68	101,64	101,58	93,78	80,68	105,37	94,33	63,13
Navarra, C. Foral de	0,269	0,296	0,266	0,189	74,78	79,46	79,59	77,88	74,78	82,37	73,91	52,42
País Vasco	0,268	0,229	0,341	0,184	74,37	61,28	101,97	76,07	74,37	63,52	94,68	51,21
Rioja, La	0,266	0,207	0,381	0,214	73,79	55,61	114,06	88,19	73,79	57,65	105,91	59,37
España	**0,360**	**0,373**	**0,334**	**0,242**	**100,00**	**100,00**	**100,00**	**100,00**	**100,00**	**103,67**	**92,86**	**67,32**
Municipios[1]												
Pequeños	0,353	0,402	0,294	0,221	97,97	107,63	88,00	91,37	97,97	111,58	81,71	61,51
Medianos	0,312	0,325	0,357	0,202	86,60	87,09	106,90	83,21	86,60	90,28	99,27	56,01
Grandes	0,324	0,320	0,328	0,262	90,04	85,77	98,03	108,17	90,04	88,92	91,03	72,82

[1] Pequeños: municipios de hasta 10.000 habitantes; medianos: de 10.001 hasta 50.000 habitantes (excepto capitales de provincia); y grandes: de más de 50.000 habitantes.
Fuente: Elaboración propia a partir de EPF 1973/74, 1980/81, 1990/91 y ECPF (fichero longitudinal) 2003.

A.8. Apéndice estadístico del capítulo 14: resultados adicionales

A.8.1. Características de los niveles educativos utilizados

Aunque la EES 2002 recoge veintidós categorías de niveles educativos a un nivel de dos dígitos de la CNED 2000, hemos procedido a agruparlas en las ocho categorías utilizadas por el INE en la difusión de resultados.

Podemos señalar, a modo de aclaración, las características esenciales de los niveles educativos mencionados:

1. *Sin estudios o primarios incompletos,* corresponde a aquellas personas que no han realizado ningún tipo de educación reglada o no finalizaron la educación primaria. Estas personas no tienen que ser obligatoriamente analfabetas, aunque estos individuos están incluidos en esta categoría.
2. *Educación primaria completa,* corresponde a personas que acabaron los estudios de educación primaria o primera etapa de escolaridad obligatoria. Comprende los programas de: Educación primaria (LOGSE), EGB (primer y segundo ciclo) y Educación básica obligatoria (educación especial).
3. *Educación secundaria I (1.er ciclo),* con esta educación se dominan plenamente las destrezas básicas. Comprende los programas de: Educación Secundaria Obligatoria (ESO) y EGB *(3.er ciclo).*
4. *Educación secundaria II (2.º ciclo),* se corresponde con los estudios de bachillerato y comprende los siguientes programas: Bachillerato (LOGSE), BUP y COU, y Bachillerato experimental (reforma de las enseñanzas medias).

5. *Formación profesional de grado medio (FP I),* comprende los programas de ciclos formativos de formación profesional específica de grado medio y equivalentes.
6. *Formación profesional de grado superior (FP II),* comprende los programas de ciclos formativos de formación profesional específica de grado superior y equivalentes.
7. *Diplomados universitarios y equivalentes,* comprende las enseñanzas universitarias de primer ciclo y equivalentes o personas que han aprobado tres cursos completos de una licenciatura o créditos equivalentes. Así mismo se incluyen títulos propios de universidades y otras enseñanzas que precisan del título de bachiller (2 y más años).
8. *Licenciados, ingenieros superiores y doctores (titulados superiores),* comprende las enseñanzas universitarias de primer y segundo ciclo y equivalentes, los programas de postgrado y estudios oficiales de especialización profesional, así como los estudios de doctorado.

CUADRO A.8.1: **Cobertura sectorial de la Encuesta de Estructura Salarial 2002**

CNAE-93: Clasificación Nacional de Actividades Económicas, 1993	
Código	**Título**
C	**Industrias extractivas**
CA	Extracción de productos energéticos
CB	Extracción de otros minerales excepto productos energéticos
D	**Industria manufacturera**
DA	Industria de la alimentación, bebidas y tabaco
DB	Industria textil y de la confección
DC	Industria del cuero y del calzado
DD	Industria de la madera y del corcho
DE	Industria del papel; edición, artes gráficas y reproducción de soportes grabados
DF	Refino de petróleo y tratamiento de combustibles nucleares
DG	Industria química
DH	Industria de la transformación del caucho y materias plásticas
DI	Industrias de otros productos minerales no metálicos
DJ	Metalurgia y fabricación de productos metálicos
DK	Industria de la construcción de maquinaria y equipo mecánico
DL	Industria de material y equipo eléctrico, electrónico y óptico
DM	Fabricación de material de transporte
DN	Industrias manufactureras diversas
E	**Producción y distribución de energía eléctrica, gas y agua**
F	**Construcción**
G	**Comercio; reparación de vehículos de motor, motocicletas y ciclomotores y artículos personales y de uso doméstico**
H	**Hostelería**
I	**Transporte, almacenamiento y comunicaciones**
J	**Intermediación financiera**
K	**Actividades inmobiliarias y de alquiler; servicios empresariales**
M	**Educación**
N	**Actividades sanitarias y veterinarias, servicio social**
O	**Otras actividades sociales y de servicios prestados a la comunidad; servicios personales**

Fuente: INE.

CUADRO A.8.2: **Ocupaciones en la Encuesta de Estructura Salarial 2002**

CNO-94: Clasificación Nacional de Ocupaciones, 1994	
Código	Título
1	**Dirección de las empresas y de las Administraciones Públicas**
A	*Dirección de las Administraciones Públicas y de empresas de 10 o más asalariados*
10	Poder ejecutivo y legislativo y dirección de las Administraciones Públicas; dirección de organizaciones de interés
11	Dirección de empresas de 10 ó más asalariados
2	**Técnicos y profesionales científicos e intelectuales**
D	*Profesiones asociadas a titulaciones de 2.º y 3.er ciclo universitario y afines*
20	Profesiones asociadas a titulaciones de 2.º y 3.er ciclo universitario en ciencias físicas, químicas, matemáticas e ingeniería
21	Profesiones asociadas a titulaciones de 2.º y 3.er ciclo universitario en ciencias naturales y sanidad
22	Profesiones asociadas a titulaciones de 2.º y 3.er ciclo universitario en la enseñanza
23	Profesionales del derecho
24	Profesionales en organizaciones de empresas, profesionales en las ciencias sociales y humanas asociadas a titulaciones de 2.º y 3.er ciclo universitario
25	Escritores, artistas y otras profesiones asociadas a titulaciones de 2.º y 3.er ciclo universitario
E	*Profesiones asociadas a una titulación de 1.er ciclo universitario y afines*
26	Profesiones asociadas a una titulación de 1.er ciclo universitario en ciencias físicas, químicas, matemáticas, ingeniería y asimilados
27	Profesiones asociadas a una titulación de 1.er ciclo universitario en ciencias naturales y sanidad, excepto ópticos, fisioterapeutas y asimilados
28	Profesiones asociadas a una titulación de 1.er ciclo universitario en la enseñanza
29	Otras profesiones asociadas a una titulación universitaria de 1.er ciclo
3	**Técnicos y profesionales de apoyo**
F	*Técnicos y profesionales de apoyo*
30	Técnicos de las ciencias físicas, químicas e ingenierías
31	Técnicos de las ciencias naturales y de la sanidad
32	Técnicos en educación infantil, instructores de vuelo, navegación y conducción de vehículos

CUADRO A.8.2 *(cont.)*: **Ocupaciones en la Encuesta de Estructura Salarial 2002**

3	**Técnicos y profesionales de apoyo**
33	Profesionales de apoyo en operaciones financieras y comerciales
34	Profesionales de apoyo a la gestión administrativa
35	Otros técnicos y profesionales de apoyo
4	**Empleados de tipo administrativo**
G	*Empleados de tipo administrativo*
40	Empleados en servicios contables, financieros y de servicios de apoyo a la producción y al transporte
41	Empleados de bibliotecas, servicios de correos y asimilados
42	Operadores de máquinas de oficina
43	Auxiliares administrativos sin tareas de atención al publico no clasificados anteriormente
44	Auxiliares administrativos con tareas de atención al público no clasificados anteriormente
45	Empleados de trato directo con el público en agencias de viajes, recepcionistas y telefonistas
46	Cajeros, taquilleros y otros empleados asimilados en trato directo con el público
5	**Trabajadores de los servicios de restauración, personales, protección y vendedores de los comercios**
H	*Trabajadores de los servicios de restauración y de servicios personales*
50	Trabajadores de los servicios de restauración
51	Trabajadores de los servicios personales
J	*Trabajadores de los servicios de protección y seguridad*
52	Trabajadores de servicios de protección y seguridad
K	*Dependientes de comercio y asimilados*
53	Dependientes de comercio y asimilados
6	**Trabajadores cualificados en la agricultura y en la pesca**
L	*Trabajadores cualificados en la agricultura y en la pesca*
60	Trabajadores cualificados en actividades agrícolas
61	Trabajadores cualificados en actividades ganaderas
62	Trabajadores cualificados en otras actividades agrarias
63	Pescadores y trabajadores cualificados en actividades piscícolas

CUADRO A.8.2 *(cont.)*: **Ocupaciones en la Encuesta de Estructura Salarial 2002**

7	**Artesanos y trabajadores cualificados de las industrias manufactureras, la construcción y la minería, excepto los operadores de instalaciones y maquinaria**
M	*Trabajadores cualificados de la construcción, excepto los operadores de maquinaria*
70	Encargados de obra y otros encargados en la construcción
71	Trabajadores en obras estructurales de construcción y asimilados
72	Trabajadores de acabado de construcciones y asimilados; pintores y otros asimilados
N	*Trabajadores cualificados de las industrias extractivas, de la metalurgia, la construcción de maquinaria y asimilados*
73	Encargados en la metalurgia y jefes de talleres mecánicos
74	Trabajadores de las industrias extractivas
75	Soldadores, chapistas, montadores de estructuras metálicas, herreros, elaboradores de herramientas y asimilados
76	Mecánicos y ajustadores de maquinaria y equipos eléctricos y electrónicos
P	*Trabajadores cualificados de industrias de artes gráficas, textil y de la confección, de la elaboración de alimentos, ebanistas, artesanos y otros asimilados*
77	Mecánicos de precisión en metales, trabajadores de artes gráficas, ceramistas, vidrieros y artesanos de la madera, textil y del cuero
78	Trabajadores de la industria de la alimentación, bebidas y tabaco
79	Trabajadores que tratan la madera, ebanistas, trabajadores de la industria textil, confección piel, cuero, calzado y asimilados
8	**Operadores de instalaciones y maquinaria, y montadores**
Q	*Operadores de instalaciones industriales, de maquinaria fija; montadores y ensambladores*
80	Jefes de equipo y encargados en instalaciones industriales fijas
81	Operadores de instalaciones industriales fijas y asimilados
82	Encargado de operadores de máquinas fijas
83	Operadores de máquinas fijas
84	Montadores y ensambladores

CUADRO A.8.2 *(cont.)*: **Ocupaciones en la Encuesta de Estructura Salarial 2002**

8	**Operadores de instalaciones y maquinaria, y montadores**
R	*Conductores y operadores de maquinaria móvil*
85	Maquinista de locomotora, operador de maquinaria agrícola y de equipos pesados móviles y marineros
86	Conductores de vehículos para el transporte urbano o por carretera
9	**Trabajadores no cualificados**
S	*Trabajadores no cualificados en servicios (excepto transportes)*
90	Trabajadores no cualificados en el comercio
91	Empleados domésticos y otro personal de limpieza de interior de edificios
92	Conserje de edificios, limpiacristales y vigilantes
93	Otros trabajadores no cualificados en otros servicios
T	*Peones de la agricultura, pesca, construcción, industrias manufactureras y transportes*
94	Peones agropecuarios y de la pesca
95	Peones de la minería
96	Peones de la construcción
97	Peones de las industrias manufactureras
98	Peones del transporte y descargadores

Fuente: INE.

CUADRO A.8.3: Ganancia hora por sexo, niveles de estudio y comunidades autónomas

a) Total población (euros/hora)

Comunidades autónomas	1	2	3	4	5	6	7	8	Todos
Andalucía	8,11	8,01	7,71	11,36	9,10	10,66	14,72	18,74	10,01
Aragón	6,87	8,52	9,43	11,55	10,84	11,67	13,84	18,51	10,90
Asturias, Principado de	5,80	8,98	9,02	10,34	9,49	11,68	13,98	17,74	10,76
Balears, Illes	7,05	7,31	8,50	11,17	10,37	10,91	15,69	21,90	10,24
Canarias	6,50	6,79	7,15	10,52	8,76	9,96	16,01	19,26	9,15
Cantabria	6,52	8,35	7,99	10,91	9,54	9,38	14,76	18,50	9,82
Castilla y León	7,96	8,71	8,26	11,09	9,55	11,33	13,52	15,82	10,04
Castilla-La Mancha	6,52	7,32	7,14	11,76	8,78	10,40	13,54	16,75	9,08
Cataluña	7,69	9,03	9,36	13,28	10,71	12,46	16,03	20,01	11,80
Ceuta y Melilla	6,01	7,32	7,93	10,33	10,56	12,22	17,62	25,92	10,78
C. Valenciana	6,12	7,93	7,94	11,49	8,98	10,86	14,06	17,27	9,79
Extremadura	5,50	6,54	7,06	10,78	8,64	9,08	13,48	16,72	9,08
Galicia	7,96	7,55	7,17	10,44	8,64	9,82	14,45	17,82	9,47
Madrid, C. de	6,55	8,48	9,09	12,69	10,12	12,52	16,76	21,95	13,12
Murcia, Región de	6,80	7,28	6,99	10,15	8,19	8,20	13,16	17,08	8,95
Navarra, C. Foral de	7,16	10,56	9,68	12,43	10,75	12,15	15,50	18,07	11,97
País Vasco	7,33	11,44	9,80	14,02	11,84	12,68	16,30	19,38	13,01
Rioja, La	6,83	7,85	7,89	10,48	9,14	11,39	13,79	17,39	9,57
España	**7,07**	**8,41**	**8,44**	**12,12**	**9,95**	**11,71**	**15,41**	**19,80**	**11,11**

CUADRO A.8.3 *(cont.)*: **Ganancia hora por sexo, niveles de estudio y comunidades autónomas**

b) Hombres (euros/hora)

Comunidades autónomas	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**Todos**
Andalucía	8,35	8,37	8,36	12,84	10,22	11,80	16,33	21,53	10,59
Aragón	7,45	9,38	11,03	13,59	13,09	12,82	16,11	21,67	12,20
Asturias, Principado de	6,22	9,90	10,01	11,99	10,89	12,90	15,18	20,45	11,73
Balears, Illes	7,16	8,04	9,28	13,58	12,35	12,75	18,06	25,68	11,23
Canarias	6,74	7,25	7,99	12,19	10,42	11,55	17,91	22,21	9,81
Cantabria	7,02	9,22	8,63	12,39	11,20	10,26	16,12	21,41	10,57
Castilla y León	9,04	9,45	9,12	13,00	11,78	12,72	16,12	18,32	11,09
Castilla-La Mancha	6,85	7,95	7,91	13,34	9,60	11,96	14,78	19,12	9,71
Cataluña	8,19	10,28	10,53	15,81	12,94	14,40	19,02	23,52	13,34
Ceuta y Melilla	6,30	7,86	9,31	12,51	10,43	13,77	20,90	27,90	11,32
C. Valenciana	6,54	8,50	8,66	14,17	10,30	12,30	15,94	19,29	10,69
Extremadura	5,78	6,92	7,49	11,88	9,36	9,93	13,99	18,37	9,33
Galicia	9,29	8,20	7,81	11,93	9,60	10,82	16,97	20,63	10,24
Madrid, C. de	7,21	9,47	10,09	14,70	12,04	13,93	20,07	26,17	14,83
Murcia, Región de	7,46	7,80	7,64	11,62	8,84	8,93	14,93	20,95	9,66
Navarra, C. Foral de	7,54	11,73	10,61	14,39	11,91	13,24	17,79	20,47	12,97
País Vasco	8,15	12,68	10,92	15,71	12,59	13,41	18,47	21,79	14,11
Rioja, La	7,72	8,53	8,74	11,65	10,92	13,03	15,58	18,75	10,31
España	**7,61**	**9,19**	**9,32**	**14,12**	**11,62**	**13,06**	**17,89**	**23,04**	**12,18**

CUADRO A.8.3 *(cont.)*: **Ganancia hora por sexo, niveles de estudio y comunidades autónomas**

c) Mujeres (euros/hora)

Comunidades autónomas	1	2	3	4	5	6	7	8	Todos
Andalucía	7,18	6,66	6,08	8,81	8,15	8,40	13,20	14,68	8,81
Aragón	–	6,18	6,28	8,07	8,19	8,94	12,08	14,68	8,58
Asturias, Principado de	–	6,22	6,64	7,92	7,69	7,99	12,93	14,62	8,94
Balears, Illes	6,63	6,01	7,18	8,53	8,41	9,02	14,19	17,34	8,86
Canarias	5,88	5,69	5,68	8,37	7,36	7,85	14,83	15,53	8,11
Cantabria	–	6,12	6,39	8,41	7,74	7,74	13,95	14,14	8,45
Castilla y León	5,90	6,28	6,06	7,56	6,51	7,57	10,69	12,69	7,71
Castilla-La Mancha	4,91	5,54	5,56	8,53	7,94	7,98	12,72	13,84	7,90
Cataluña	6,65	6,85	7,23	10,11	8,25	9,73	13,60	15,81	9,58
Ceuta y Melilla	–	5,49	6,17	8,23	10,67	–	15,67	23,11	9,93
C. Valenciana	4,60	6,19	6,27	7,64	7,46	8,36	11,62	13,81	7,93
Extremadura	5,18	5,52	5,94	8,53	8,25	7,65	13,11	14,28	8,65
Galicia	5,02	5,92	5,82	8,08	7,70	7,54	12,42	14,00	8,06
Madrid, C. de	5,63	6,62	7,25	10,29	8,39	10,03	13,11	16,82	10,66
Murcia, Región de	5,44	6,05	5,56	7,28	7,74	7,08	11,76	12,32	7,73
Navarra, C. Foral de	–	7,54	7,60	9,22	8,94	9,29	14,01	15,06	10,17
País Vasco	5,36	8,32	7,38	11,06	10,46	10,29	14,55	16,03	11,14
Rioja, La	–	6,19	6,09	7,32	7,69	8,12	12,60	15,58	8,21
España	**5,84**	**6,53**	**6,62**	**9,33**	**8,18**	**9,16**	**13,18**	**15,60**	**9,30**

CUADRO A.8.3 *(cont.)*: **Ganancia hora por sexo, niveles de estudio y comunidades autónomas**

d) Ganancia relativa (100 * mujeres/hombres)

Comunidades autónomas	1	2	3	4	5	6	7	8	Todos
Andalucía	85,92	79,60	72,71	68,64	79,77	71,24	80,85	68,19	83,25
Aragón	–	65,88	56,91	59,41	62,55	69,74	74,99	67,73	70,35
Asturias, Principado de	–	62,80	65,81	66,06	70,59	61,90	85,19	71,52	76,23
Balears, Illes	92,57	74,68	77,43	62,76	68,14	70,73	78,55	67,49	78,95
Canarias	87,29	78,59	71,06	68,68	70,62	68,02	82,82	69,91	82,67
Cantabria	–	66,38	74,02	67,84	69,06	75,38	86,50	66,02	79,94
Castilla y León	65,29	66,47	66,42	58,12	55,29	59,54	66,33	69,25	69,55
Castilla-La Mancha	71,62	69,78	70,27	63,96	82,73	66,70	86,06	72,38	81,37
Cataluña	81,22	66,64	68,73	63,97	63,77	67,57	71,49	67,22	71,80
Ceuta y Melilla	–	69,79	66,25	65,73	102,33	–	74,95	82,82	87,69
C. Valenciana	70,35	72,81	72,41	53,96	72,38	67,97	72,87	71,61	74,21
Extremadura	89,65	79,82	79,33	71,77	88,18	77,06	93,68	77,75	92,68
Galicia	54,02	72,22	74,59	67,75	80,20	69,74	73,21	67,83	78,76
Madrid, C. de	78,05	69,93	71,85	70,00	69,67	72,04	65,31	64,26	71,87
Murcia, Región de	72,84	77,58	72,84	62,69	87,49	79,30	78,74	58,80	80,09
Navarra, C. Foral de	–	64,29	71,59	64,11	75,05	70,18	78,72	73,58	78,43
País Vasco	65,70	65,60	67,58	70,40	83,03	76,76	78,76	73,57	78,94
Rioja, La	–	72,52	69,63	62,80	70,45	62,33	80,85	83,10	79,67
España	**76,74**	**71,08**	**71,01**	**66,09**	**70,43**	**70,17**	**73,64**	**67,71**	**76,30**

Nota: Por razones de significatividad estadística no se ofrecen resultados si el numero de observaciones en la celda es igual o inferior a 20. 1: Sin estudios o primarios incompletos; 2: Educación primaria completa; 3: Educación secundaria I (1.er ciclo); 4: Educación secundaria II (2.º ciclo); 5: Formación profesional de grado medio (FP I); 6: Formación profesional de grado superior (FP II); 7: Diplomados universitarios y equivalentes; 8: Licenciados, ingenieros superiores y doctores (titulados superiores).

Fuente: Elaboración propia a partir de los datos de INE (2004b).

CUADRO A.8.4: Ganancia hora por sexo, tipos de ocupación y comunidades autónomas

a) Total población (euros/hora)

Comunidades autónomas	A	D	E	F	G	H	J	K	L	M	N	P	Q	R	S	T	Todos
Andalucía	28,05	20,57	16,15	13,44	9,45	7,49	8,62	8,10	6,87	7,06	9,77	7,09	9,13	8,06	6,56	5,72	10,01
Aragón	28,73	21,12	15,35	15,23	9,91	7,27	8,91	8,22	–	8,89	11,58	7,34	9,99	9,05	5,66	5,66	10,90
Asturias, P. de	30,12	17,03	15,41	14,06	9,08	7,24	7,98	7,52	–	8,68	10,99	8,53	11,32	10,00	6,21	5,91	10,76
Balears, Illes	26,60	19,91	15,88	16,11	9,16	8,32	9,61	7,34	8,70	7,58	9,41	6,93	7,66	9,83	6,05	5,61	10,24
Canarias	25,06	20,32	16,65	14,46	8,96	7,14	7,86	6,87	7,02	6,40	9,00	6,88	8,07	7,95	5,55	5,46	9,15
Cantabria	29,71	19,69	16,55	11,98	8,09	7,21	8,80	7,32	–	8,35	10,67	6,30	10,13	8,38	6,44	6,39	9,82
Castilla y León	27,98	16,20	14,98	14,29	8,67	5,91	8,59	6,95	–	7,46	11,89	7,84	10,34	9,11	6,46	5,47	10,04
C.–La Mancha	25,98	18,08	14,02	12,28	9,86	7,32	8,21	7,70	–	6,61	9,32	7,48	7,30	8,43	5,83	5,04	9,08
Cataluña	34,44	21,21	16,95	14,70	10,04	7,58	8,57	7,96	9,69	9,58	11,50	8,24	10,32	10,14	6,37	6,12	11,80
Ceuta y Melilla	–	25,54	19,67	18,32	9,87	8,77	6,79	7,48	–	7,27	7,37	–	–	9,36	5,94	5,55	10,78
C. Valenciana	27,87	18,50	15,23	13,67	9,08	7,18	7,94	8,46	–	6,95	10,48	6,46	8,42	8,25	6,07	5,68	9,79
Extremadura	22,25	17,85	14,44	12,71	9,10	7,32	7,59	7,31	–	5,78	7,80	6,17	6,90	6,65	5,91	5,17	9,08
Galicia	26,35	18,61	16,07	13,02	8,45	6,71	8,88	7,52	–	7,05	9,06	6,00	7,71	7,39	6,53	5,57	9,47
Madrid, C. de	38,97	23,28	17,52	16,40	9,38	7,66	8,90	8,04	–	8,19	10,90	9,22	9,86	9,93	6,43	5,68	13,12
Murcia, R. de	24,63	17,84	13,55	11,47	8,87	7,11	6,43	7,40	–	7,15	8,04	6,33	7,10	8,15	6,32	5,37	8,95
Navarra, C. F. de	26,18	19,66	15,75	14,47	10,09	8,07	11,14	8,78	–	10,14	12,54	9,34	11,66	9,95	6,93	7,09	11,97
País Vasco	26,80	20,31	17,57	15,40	11,02	8,34	9,02	9,18	–	10,62	11,96	9,59	12,65	11,67	7,95	7,74	13,10
Rioja, La	23,91	19,27	14,44	14,12	9,49	6,98	8,53	6,69	–	8,47	10,48	7,32	7,82	8,15	6,01	6,10	9,57
España	**31,50**	**20,93**	**16,36**	**14,83**	**9,50**	**7,46**	**8,55**	**7,91**	**7,82**	**7,84**	**10,80**	**7,53**	**9,76**	**9,03**	**6,37**	**5,80**	**11,11**

CUADRO A.8.4 *(cont.)*: **Ganancia hora por sexo, tipos deocupación y comunidades autónomas**

b) Hombres (euros/hora)

Comunidades autónomas	A	D	E	F	G	H	J	K	L	M	N	P	Q	R	S	T	Todos
Andalucía	29,02	22,95	17,11	14,84	11,31	7,82	8,68	10,16	6,87	7,07	9,78	7,74	9,80	8,06	8,05	5,82	10,59
Aragón	29,82	23,88	16,96	17,66	12,51	7,81	9,35	9,73	–	8,96	11,74	8,53	11,14	9,08	6,37	5,86	12,20
Asturias, P. de	30,72	18,58	15,94	15,44	11,64	8,17	7,96	9,46	–	8,74	11,03	8,70	11,87	10,07	7,02	6,13	11,73
Balears, Illes	27,40	22,99	16,25	19,38	11,54	8,83	9,70	8,53	8,89	7,58	9,39	7,64	8,36	9,86	6,61	5,67	11,23
Canarias	28,56	22,51	19,10	15,99	10,84	7,48	8,15	9,70	7,08	6,40	8,96	6,89	8,56	8,03	6,14	5,53	9,81
Cantabria	30,05	22,57	18,18	13,29	9,64	7,80	8,86	9,27	–	8,34	10,63	7,95	10,90	8,40	7,22	6,51	10,57
Castilla y León	29,33	17,91	16,79	16,06	10,61	7,15	8,63	8,36	–	7,45	11,92	8,49	11,03	9,12	7,73	5,58	11,09
C.–La Mancha	27,55	20,08	14,79	13,14	11,84	7,25	8,39	8,79	–	6,62	9,36	8,53	8,90	8,49	6,46	5,37	9,71
Cataluña	36,37	23,59	19,19	16,84	12,32	8,79	8,73	10,37	9,86	9,59	11,61	8,97	11,62	10,21	7,13	6,44	13,34
Ceuta y Melilla	–	28,00	22,37	20,03	12,70	11,52	6,64	8,71	–	7,27	7,37	–	–	9,36	6,10	5,58	11,32
C. Valenciana	29,16	19,90	16,20	15,26	11,11	8,17	8,02	11,06	–	6,97	10,50	6,96	9,24	8,27	7,22	5,97	10,69
Extremadura	23,10	19,43	14,60	13,76	11,17	6,95	7,58	8,15	–	5,78	7,82	6,71	7,73	6,66	6,73	5,28	9,33
Galicia	27,60	20,20	19,34	14,07	10,72	7,16	9,06	8,62	–	7,09	9,07	6,94	9,29	7,46	7,65	5,74	10,24
Madrid, C. de	41,83	26,46	20,19	18,68	11,38	7,88	9,12	8,93	–	8,20	10,90	10,21	10,81	9,98	7,29	6,04	14,83
Murcia, R. de	27,13	20,76	14,54	12,76	11,04	7,08	6,48	8,80	–	7,15	8,08	7,03	7,83	8,16	7,87	5,54	9,66
Navarra, C. F. de	26,93	21,55	16,66	16,57	12,36	8,79	11,72	10,80	–	10,18	12,77	10,24	12,34	9,97	8,72	7,21	12,97
País Vasco	28,42	22,00	18,96	16,78	13,19	9,96	9,38	11,79	–	10,63	12,02	10,49	13,16	11,80	9,50	8,06	14,11
Rioja, La	25,77	19,50	15,88	15,93	11,54	8,06	8,59	8,77	–	8,52	10,51	8,01	8,49	8,32	6,03	6,34	10,31
España	**33,23**	**23,33**	**18,23**	**16,64**	**11,58**	**8,06**	**8,70**	**9,73**	**7,96**	**7,85**	**10,84**	**8,31**	**10,80**	**9,07**	**7,39**	**6,03**	**12,18**

CUADRO A.8.4 *(cont.)*: **Ganancia hora por sexo, tipos de ocupación y comunidades autónomas**

c) Mujeres (euros/hora)

Comunidades autónomas	A	D	E	F	G	H	J	K	L	M	N	P	Q	R	S	T	Todos
Andalucía	20,38	16,93	15,34	10,65	7,71	7,24	–	6,54	–	6,68	9,42	5,88	6,17	–	5,96	5,00	8,81
Aragón	–	17,78	14,17	10,62	8,00	7,08	–	7,07	–	–	6,23	5,53	6,37	–	5,51	4,90	8,58
Asturias, P. de	27,07	15,05	15,02	11,06	7,55	6,93	–	6,16	–	–	–	7,91	5,72	–	5,97	4,50	8,94
Balears, Illes	23,80	16,86	15,69	11,80	7,53	7,77	–	6,72	–	–	–	5,83	5,61	–	5,89	5,18	8,86
Canarias	14,82	17,80	15,11	11,72	7,53	6,72	–	5,53	–	–	–	6,86	5,26	–	5,32	4,89	8,11
Cantabria	–	15,79	15,74	9,48	7,30	6,93	–	6,38	–	–	–	4,82	5,94	–	6,14	5,29	8,45
Castilla y León	19,91	14,16	12,88	10,33	6,99	5,50	–	6,17	–	–	–	5,99	6,93	–	6,03	4,78	7,71
C.–La Mancha	18,05	15,54	13,61	10,21	7,98	7,35	–	6,60	–	–	–	4,68	4,61	–	5,65	4,17	7,90
Cataluña	23,63	18,12	15,39	11,86	8,55	6,95	6,86	6,88	–	–	9,52	7,04	7,48	6,60	6,11	5,10	9,58
Ceuta y Melilla	–	21,39	18,46	15,11	6,65	7,87	–	5,94	–	–	–	–	–	–	5,88	–	9,93
C. Valenciana	19,59	15,48	13,99	10,57	7,48	6,08	–	7,10	–	5,98	9,06	5,56	5,53	7,25	5,65	4,76	7,93
Extremadura	–	15,62	14,35	9,96	7,39	7,52	–	6,28	–	–	–	4,82	5,50	–	5,68	4,31	8,65
Galicia	18,31	16,18	13,71	10,83	7,00	6,49	–	6,74	–	4,34	8,90	5,31	5,46	4,79	6,08	4,88	8,06
Madrid, C. de	29,78	18,93	14,17	13,21	8,16	7,55	7,48	7,31	–	–	10,95	7,32	6,80	–	6,08	4,23	10,66
Murcia, R. de	–	14,02	12,91	8,90	7,17	7,12	–	6,02	–	–	–	5,10	5,40	–	5,74	5,14	7,73
Navarra, C. F. de	22,55	17,56	15,41	11,67	8,66	7,85	–	7,49	–	–	9,27	6,62	8,43	–	6,55	6,73	10,17
País Vasco	21,83	18,03	16,75	12,89	9,49	7,95	–	7,55	–	–	10,28	7,48	9,29	–	7,31	6,48	11,14
Rioja, La	–	19,02	13,67	10,57	7,56	6,61	–	5,94	–	–	–	5,72	5,85	–	6,00	5,10	8,21
España	**23,79**	**17,59**	**14,82**	**11,93**	**8,01**	**7,10**	**6,95**	**6,76**	**6,18**	**7,00**	**9,55**	**6,12**	**6,64**	**6,58**	**6,00**	**4,91**	**9,30**

CUADRO A.8.4 *(cont.)*: **Ganancia hora por sexo, tipos de ocupación y comunidades autónomas**

d) Ganancia relativa (100 * mujeres/hombres)

Comunidades autónomas	A	D	E	F	G	H	J	K	L	M	N	P	Q	R	S	T	Todos
Andalucía	70,23	73,77	89,68	71,75	68,10	92,54	–	64,37	–	94,50	96,34	75,91	62,93	–	74,06	85,88	83,25
Aragón	–	74,48	83,58	60,15	63,93	90,64	–	72,68	–	–	53,12	64,80	57,18	–	86,56	83,63	70,35
Asturias, P. de	88,09	80,98	94,21	71,62	64,87	84,74	–	65,17	–	–	–	90,91	48,21	–	85,08	73,30	76,23
Balears, Illes	86,84	73,34	96,54	60,88	65,29	87,91	–	78,83	–	–	–	76,22	67,14	–	89,07	91,40	78,95
Canarias	51,90	79,09	79,09	73,34	69,47	89,83	–	57,05	–	–	–	99,50	61,42	–	86,54	88,49	82,67
Cantabria	–	69,96	86,58	71,34	75,67	88,80	–	68,81	–	–	–	60,54	54,52	–	85,09	81,23	79,94
Castilla y León	67,90	79,07	76,67	64,37	65,89	76,96	–	73,83	–	–	–	70,59	62,88	–	78,09	85,54	69,55
C.–La Mancha	65,51	77,40	92,02	77,76	67,34	101,39	–	75,11	–	–	–	54,88	51,80	–	87,54	77,62	81,37
Cataluña	64,98	76,81	80,20	70,39	69,38	79,07	78,57	66,37	–	–	81,98	78,46	64,36	64,61	85,76	79,22	71,80
Ceuta y Melilla	–	76,39	82,52	75,44	52,38	68,36	–	68,13	–	–	–	–	–	–	96,43	–	87,69
C. Valenciana	67,18	77,77	86,36	69,31	67,32	74,46	–	64,23	–	85,89	86,32	79,87	59,92	87,69	78,21	79,71	74,21
Extremadura	–	80,41	98,29	72,35	66,13	108,11	–	77,07	–	–	–	71,81	71,13	–	84,44	81,60	92,68
Galicia	66,35	80,12	70,87	76,94	65,34	90,60	–	78,23	–	61,19	98,19	76,49	58,76	64,18	79,49	85,14	78,76
Madrid, C. de	71,20	71,53	70,15	70,73	71,77	95,85	82,00	81,86	–	–	100,46	71,73	62,86	–	83,40	69,99	71,87
Murcia, R. de	–	67,52	88,76	69,73	64,96	100,67	–	68,44	–	–	–	72,53	69,02	–	72,97	92,74	80,09
Navarra, C. F. de	83,73	81,46	92,51	70,42	70,06	89,31	–	69,38	–	–	72,58	64,60	68,30	–	75,17	93,25	78,43
País Vasco	76,80	81,99	88,35	76,86	72,00	79,84	–	64,07	–	–	85,55	71,25	70,53	–	77,00	80,40	78,94
Rioja, La	–	97,52	86,05	66,36	65,53	81,94	–	67,68	–	–	–	71,40	68,91	–	99,58	80,38	79,67
España	**71,59**	**75,41**	**81,28**	**71,66**	**69,19**	**87,99**	**79,81**	**69,47**	**77,66**	**89,08**	**88,09**	**73,69**	**61,48**	**72,54**	**81,15**	**81,53**	**76,30**

Nota: Por razones de significatividad estadística no se ofrecen resultados si el numero de observaciones en la celda es igual o inferior a 20. A: Dirección de las Administraciones Públicas y de empresas de 10 o más asalariados; D: Profesiones asociadas a titulaciones de 2.º y 3.er ciclo universitario y afines; E: Profesiones asociadas a una titulación de 1er ciclo universitario y afines; F: Técnicos y profesionales de apoyo; G: Empleados de tipo administrativo; H: Trabajadores de los servicios de restauración y de servicios personales; J: Trabajadores de los servicios de protección y seguridad; K: Dependientes de comercio y asimilados; L: Trabajadores cualificados en la agricultura y en la pesca; M: Trabajadores cualificados de la construcción, excepto los operadores de maquinaria; N: Trabajadores cualificados de las industrias extractivas, de la metalurgia, la construcción de maquinaria y asimilados; P: Trabajadores cualificados de industrias de artes gráficas, textil y de la confección, de la elaboración de alimentos, ebanistas, artesanos y otros asimilados; Q: Operadores de instalaciones industriales, de maquinaria fija; montadores y ensambladores.; R: Conductores y operadores de maquinaria móvil; S: Trabajadores no cualificados en servicios (excepto transportes); T: Peones de la agricultura, pesca, construcción, industrias manufactureras y transportes.
Fuente: INE (2004b).

CUADRO A.8.5: **Ganancia hora por sexo, ramas de actividad y comunidades autónomas**

a) Total población (euros/hora)

Comunidades autónomas	**C**	**D**	**E**	**F**	**G**	**H**	**I**	**J**	**K**	**M**	**N**	**O**	**Todos**
Andalucía	8,52	10,07	16,49	7,26	8,54	7,07	11,32	19,47	7,67	14,89	13,45	10,32	10,01
Aragón	11,25	11,40	14,83	9,46	8,89	6,60	10,32	21,26	6,50	15,34	12,79	13,62	10,90
Asturias, Principado de	14,48	12,45	22,99	9,07	8,31	5,90	11,46	22,17	7,50	13,07	13,11	8,72	10,76
Balears, Illes	9,56	7,93	8,68	7,49	7,53	8,66	16,41	21,51	8,72	14,07	14,12	8,91	10,24
Canarias	7,28	9,33	15,43	6,98	7,95	7,06	13,53	23,26	6,38	13,98	13,59	9,68	9,15
Cantabria	10,53	11,34	17,84	8,51	8,05	6,37	7,87	18,94	7,73	15,11	11,76	8,15	9,82
Castilla y León	13,81	11,50	21,55	7,89	7,62	6,28	11,02	21,27	6,50	13,72	6,75	8,46	10,04
Castilla-La Mancha	10,35	8,12	18,13	7,11	7,65	5,86	9,43	21,26	6,39	12,45	13,01	7,16	9,08
Cataluña	12,01	12,48	21,83	9,89	10,39	7,31	12,62	22,37	8,84	15,84	12,70	10,44	11,80
Ceuta y Melilla	–	6,31	16,87	8,22	7,93	5,90	13,57	24,70	5,88	18,90	18,02	7,71	10,78
C. Valenciana	11,40	9,54	17,94	7,41	8,89	6,52	11,51	20,03	8,02	14,55	12,33	8,96	9,79
Extremadura	5,51	7,82	14,37	6,16	7,68	5,17	7,33	18,24	6,19	14,16	12,63	8,13	9,08
Galicia	8,39	9,10	20,58	7,43	7,89	5,64	10,61	20,50	7,02	13,68	12,82	8,57	9,47
Madrid, C. de	13,05	13,93	26,12	10,57	12,08	7,16	16,29	23,52	11,48	15,12	12,30	11,90	13,12
Murcia, Región de	12,32	7,77	15,36	7,74	7,54	5,82	8,23	19,36	7,42	12,58	13,07	9,70	8,95
Navarra, C. Foral de	17,11	12,64	11,77	10,42	9,89	7,55	9,92	23,01	8,01	14,32	13,58	10,26	11,97
País Vasco	14,07	13,65	17,45	10,97	11,15	7,50	13,18	22,95	10,50	17,06	15,49	11,41	13,01
Rioja, La	9,58	9,22	16,23	8,72	8,17	6,78	12,26	19,54	7,37	16,47	11,51	8,01	9,57
España	**11,42**	**11,44**	**19,65**	**8,55**	**9,62**	**7,07**	**13,21**	**21,86**	**9,17**	**14,93**	**12,90**	**10,41**	**11,11**

CUADRO A.8.5 *(cont.)*: **Ganancia hora por sexo, ramas de actividad y comunidades autónomas**

b) Hombres (euros/hora)

Comunidades autónomas	**C**	**D**	**E**	**F**	**G**	**H**	**I**	**J**	**K**	**M**	**N**	**O**	**Todos**
Andalucía	8,51	10,83	17,06	7,25	9,61	7,87	11,62	21,55	9,54	16,40	16,53	11,16	10,59
Aragón	11,38	12,42	16,80	9,46	10,36	7,56	10,58	22,80	7,64	16,73	17,21	21,24	12,20
Asturias, Principado de	14,53	12,84	23,96	9,10	9,80	6,50	12,04	24,05	9,22	13,51	16,25	11,80	11,73
Balears, Illes	9,49	8,33	8,57	7,51	8,58	10,21	18,43	24,15	11,32	14,47	16,88	10,25	11,23
Canarias	7,34	9,97	16,04	6,92	9,53	7,70	14,02	26,36	7,80	14,84	16,30	11,04	9,81
Cantabria	10,54	12,05	17,62	8,53	9,26	7,22	7,86	20,84	9,16	15,56	15,36	9,47	10,57
Castilla y León	14,13	12,11	21,86	7,93	8,57	7,03	11,40	22,93	7,24	14,51	9,52	10,14	11,09
Castilla-La Mancha	10,48	9,16	19,42	7,03	8,55	6,28	10,12	23,06	7,25	12,55	17,09	8,41	9,71
Cataluña	12,36	13,83	22,90	10,00	12,52	8,31	13,47	25,97	10,59	17,01	16,87	12,49	13,34
Ceuta y Melilla	–	–	17,41	8,30	9,06	7,48	13,25	26,21	6,22	20,69	23,58	10,09	11,32
C. Valenciana	11,54	10,39	18,90	7,42	10,45	7,67	12,00	22,53	9,40	15,45	13,62	10,17	10,69
Extremadura	5,49	8,58	14,83	6,13	8,35	5,31	7,40	20,00	6,89	13,94	15,74	9,38	9,33
Galicia	8,25	10,36	21,09	7,43	8,71	5,83	10,62	22,54	8,08	14,97	15,85	10,07	10,24
Madrid, C. de	13,45	14,64	27,41	10,67	14,08	8,13	17,26	27,94	14,21	17,48	15,50	13,88	14,83
Murcia, Región de	12,45	8,71	16,36	7,78	8,69	6,77	8,39	21,52	8,29	13,85	17,32	11,13	9,66
Navarra, C. Foral de	16,53	13,39	12,25	10,52	11,08	8,82	10,20	25,53	9,33	15,68	17,07	11,76	12,97
País Vasco	14,23	14,20	18,74	11,15	12,89	8,98	13,90	25,79	12,98	17,93	19,92	13,22	14,11
Rioja, La	–	9,91	18,82	8,86	9,32	7,25	12,62	20,78	9,00	18,29	13,66	8,84	10,31
España	**11,57**	**12,38**	**20,37**	**8,57**	**11,19**	**8,00**	**13,74**	**24,79**	**11,24**	**16,25**	**16,07**	**12,06**	**12,18**

CUADRO A.8.5 *(cont.)*: **Ganancia hora por sexo, ramas de actividad y comunidades autónomas**

c) Mujeres (euros/hora)

Comunidades autónomas	C	D	E	F	G	H	I	J	K	M	N	O	Todos
Andalucía	–	7,16	12,94	7,53	6,60	6,01	9,87	14,93	6,06	13,66	11,71	8,50	8,81
Aragón	–	7,62	6,91	9,55	7,13	5,97	9,15	16,63	5,80	14,55	11,33	6,60	8,58
Asturias, Principado de	–	9,14	–	8,37	6,41	5,54	8,28	18,80	6,19	12,81	12,07	6,07	8,94
Balears, Illes	–	6,83	–	6,94	6,50	7,02	11,59	17,20	7,12	13,91	12,79	7,15	8,86
Canarias	–	6,78	11,85	7,83	6,26	6,18	11,92	18,73	5,37	13,50	12,12	7,22	8,11
Cantabria	–	7,62	–	8,27	6,58	5,68	7,90	13,83	6,63	14,93	10,80	6,26	8,45
Castilla y León	8,11	8,48	–	7,08	6,30	5,80	8,84	16,35	5,97	13,18	6,10	6,44	7,71
Castilla-La Mancha	–	5,49	–	8,67	6,18	5,43	6,91	16,07	5,76	12,39	11,42	5,75	7,90
Cataluña	9,32	9,35	17,39	8,53	8,07	6,47	10,29	16,57	7,17	15,16	11,35	8,37	9,58
Ceuta y Melilla	–	–	–	–	5,78	4,70	–	–	5,65	17,68	14,91	5,24	9,93
C. Valenciana	–	6,82	11,24	7,36	7,02	5,61	9,74	15,05	6,49	13,94	9,84	7,42	7,93
Extremadura	–	5,07	–	6,62	6,33	5,02	–	13,90	5,76	14,35	11,16	6,17	8,65
Galicia	9,69	6,30	15,42	7,45	6,71	5,50	10,57	14,99	6,08	12,82	11,49	6,77	8,06
Madrid, C. de	–	11,92	22,53	9,40	9,33	6,37	14,04	17,64	8,83	13,57	11,16	9,88	10,66
Murcia, Región de	–	5,73	–	7,01	5,99	4,98	6,90	13,88	6,43	12,00	10,86	7,48	7,73
Navarra, C. Foral de	–	9,72	–	9,27	7,97	7,04	8,86	17,08	7,10	13,72	12,37	8,46	10,17
País Vasco	–	10,85	13,05	9,13	8,51	6,76	10,99	18,42	7,95	16,60	14,05	9,18	11,14
Rioja, La	–	7,15	–	7,04	6,37	6,53	9,73	15,34	6,56	15,67	10,57	7,20	8,21
España	**9,23**	**8,57**	**15,84**	**8,22**	**7,57**	**6,20**	**11,54**	**16,70**	**7,28**	**14,11**	**11,45**	**8,39**	**9,30**

CUADRO A.8.5 *(cont.)*: **Ganancia hora por sexo, ramas de actividad y comunidades autónomas**

d) Ganancia relativa (100 * mujeres/hombres)

Comunidades autónomas	C	D	E	F	G	H	I	J	K	M	N	O	Todos
Andalucía	–	66,08	75,81	103,86	68,66	76,35	84,95	69,26	63,55	83,27	70,83	76,13	83,25
Aragón	–	61,32	41,15	100,94	68,81	78,97	86,47	72,96	75,92	86,97	65,85	31,09	70,35
Asturias, Principado de	–	71,15	–	91,92	65,40	85,24	68,73	78,19	67,13	94,80	74,30	51,43	76,23
Balears, Illes	–	82,00	–	92,34	75,70	68,79	62,89	71,20	62,86	96,16	75,74	69,74	78,95
Canarias	–	67,95	73,86	113,28	65,67	80,25	84,97	71,06	68,93	90,97	74,34	65,33	82,67
Cantabria	–	63,27	–	96,96	71,00	78,68	100,46	66,36	72,41	95,95	70,31	66,10	79,94
Castilla y León	57,43	70,00	–	89,25	73,45	82,48	77,58	71,29	82,45	90,83	64,13	63,47	69,55
Castilla-La Mancha	–	59,93	–	123,35	72,26	86,40	68,27	69,72	79,49	98,71	66,82	68,42	81,37
Cataluña	75,44	67,61	75,96	85,33	64,41	77,88	76,35	63,80	67,75	88,64	67,24	66,97	71,80
Ceuta y Melilla	–	–	–	–	63,80	62,82	–	–	90,92	85,46	63,25	51,90	87,69
C. Valenciana	–	65,59	59,48	99,13	67,17	73,19	81,19	66,80	69,03	90,25	72,21	72,99	74,21
Extremadura	–	59,01	–	107,96	75,74	94,55	–	69,52	83,68	102,96	70,92	65,78	92,68
Galicia	117,41	60,76	73,09	100,19	77,01	94,24	99,53	66,50	75,18	85,64	72,49	67,18	78,76
Madrid, C. de	–	81,43	82,21	88,15	66,22	78,42	81,34	63,13	62,14	77,63	72,00	71,20	71,87
Murcia, Región de	–	65,84	–	91,18	69,01	73,50	82,30	64,52	77,54	86,62	62,72	67,20	80,09
Navarra, C. Foral de	–	72,59	–	88,19	71,99	79,83	86,90	66,92	76,08	87,50	72,44	71,99	78,43
País Vasco	–	76,40	69,64	81,84	66,06	75,28	79,07	71,42	61,27	92,60	70,53	69,45	78,94
Rioja, La	–	72,12	–	79,49	68,33	90,04	77,09	73,83	72,89	85,68	77,39	81,47	79,67
España	**79,77**	**69,22**	**77,75**	**95,96**	**67,64**	**77,56**	**84,04**	**67,38**	**64,81**	**86,82**	**71,26**	**69,57**	**76,30**

Nota: Por razones de significatividad estadística no se ofrecen resultados si el numero de observaciones en la celda es igual o inferior a 20. C: Industrias extractivas; D: Industria manufacturera, E: Producción y distribución de energía eléctrica, gas y agua; F: Construcción; G: Comercio; reparación de vehículos de motor, motocicletas y ciclomotores y artículos personales y de uso doméstico; H: Hostelería; I: Transporte, almacenamiento y comunicaciones; J: Intermediación financiera; K: Actividades inmobiliarias y de alquiler; servicios empresariales; M: Educación; N: Actividades sanitarias y veterinarias, servicio social; O: Otras actividades sociales y de servicios prestados a la comunidad; servicios personales.
Fuente: INE (2004b).

CUADRO A.8.6: Distribución de la ganancia hora por sexo, niveles de estudio y comunidades autónomas

a) Total población (índice de Theil)

Comunidades autónomas	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**Todos**
Andalucía	0,143	0,159	0,146	0,206	0,131	0,169	0,136	0,206	0,215
Aragón	0,131	0,144	0,243	0,187	0,175	0,144	0,147	0,230	0,221
Asturias, Principado de	0,119	0,158	0,164	0,181	0,118	0,131	0,126	0,182	0,187
Balears, Illes	0,128	0,133	0,172	0,225	0,137	0,213	0,167	0,262	0,250
Canarias	0,093	0,153	0,209	0,244	0,172	0,198	0,195	0,193	0,262
Cantabria	0,053	0,111	0,103	0,164	0,109	0,109	0,109	0,188	0,161
Castilla y León	0,154	0,149	0,158	0,196	0,229	0,173	0,178	0,183	0,196
Castilla-La Mancha	0,123	0,162	0,140	0,212	0,141	0,155	0,128	0,171	0,206
Cataluña	0,095	0,141	0,153	0,211	0,160	0,148	0,153	0,206	0,209
Ceuta y Melilla	0,208	0,162	0,290	0,192	0,106	0,265	0,141	0,168	0,308
C. Valenciana	0,124	0,150	0,140	0,233	0,138	0,166	0,157	0,179	0,205
Extremadura	0,160	0,152	0,158	0,195	0,111	0,154	0,105	0,148	0,208
Galicia	0,124	0,131	0,136	0,207	0,128	0,162	0,144	0,208	0,211
Madrid, C. de	0,180	0,178	0,211	0,230	0,154	0,146	0,188	0,258	0,283
Murcia, Región de	0,164	0,144	0,128	0,214	0,100	0,107	0,111	0,235	0,206
Navarra, C. Foral de	0,010	0,097	0,108	0,176	0,096	0,117	0,133	0,175	0,150
País Vasco	0,153	0,109	0,132	0,175	0,010	0,099	0,126	0,161	0,154
Rioja, La	0,152	0,100	0,010	0,185	0,130	0,187	0,118	0,215	0,173
España	**0,142**	**0,154**	**0,168**	**0,219**	**0,149**	**0,151**	**0,159**	**0,224**	**0,232**

CUADRO A.8.6 *(cont.)*: **Distribución de la ganancia hora por sexo, niveles de estudio y comunidades autónomas**

b) Hombres (índice de Theil)

Comunidades autónomas	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**Todos**
Andalucía	0,137	0,162	0,141	0,195	0,144	0,157	0,138	0,198	0,219
Aragón	0,117	0,134	0,244	0,155	0,188	0,133	0,154	0,212	0,216
Asturias, Principado de	0,108	0,151	0,153	0,159	0,010	0,116	0,142	0,175	0,177
Balears, Illes	0,147	0,141	0,192	0,233	0,142	0,255	0,214	0,243	0,270
Canarias	0,096	0,146	0,222	0,261	0,198	0,196	0,213	0,181	0,270
Cantabria	0,035	0,093	0,092	0,155	0,094	0,107	0,118	0,182	0,152
Castilla y León	0,154	0,146	0,150	0,179	0,219	0,155	0,156	0,182	0,189
Castilla-La Mancha	0,115	0,153	0,134	0,200	0,176	0,157	0,154	0,150	0,203
Cataluña	0,088	0,128	0,144	0,206	0,148	0,136	0,159	0,199	0,204
Ceuta y Melilla	0,233	0,156	0,339	0,203	0,218	0,285	0,141	0,173	0,330
C. Valenciana	0,119	0,143	0,136	0,199	0,130	0,160	0,145	0,174	0,201
Extremadura	0,196	0,161	0,159	0,200	0,210	0,166	0,134	0,139	0,224
Galicia	0,103	0,130	0,130	0,211	0,146	0,151	0,149	0,179	0,210
Madrid, C. de	0,221	0,176	0,217	0,224	0,157	0,132	0,183	0,260	0,294
Murcia, Región de	0,155	0,131	0,120	0,204	0,126	0,107	0,115	0,224	0,213
Navarra, C. Foral de	0,101	0,081	0,095	0,153	0,090	0,107	0,176	0,151	0,139
País Vasco	0,145	0,087	0,103	0,165	0,095	0,094	0,137	0,153	0,141
Rioja, La	0,127	0,091	0,084	0,168	0,135	0,167	0,099	0,190	0,155
España	**0,144**	**0,149**	**0,165**	**0,210**	**0,150**	**0,140**	**0,166**	**0,220**	**0,234**

CUADRO A.8.6 *(cont.)*: **Distribución de la ganancia hora por sexo, niveles de estudio y comunidades autónomas**

c) Mujeres (índice de Theil)

Comunidades autónomas	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**Todos**
Andalucía	0,162	0,125	0,120	0,180	0,103	0,157	0,123	0,173	0,193
Aragón	–	0,108	0,105	0,171	0,076	0,126	0,119	0,211	0,187
Asturias, Principado de	–	0,092	0,130	0,168	0,111	0,096	0,103	0,157	0,183
Balears, Illes	0,046	0,084	0,105	0,141	0,087	0,117	0,117	0,245	0,196
Canarias	0,078	0,150	0,134	0,164	0,108	0,150	0,172	0,172	0,236
Cantabria	–	0,108	0,105	0,131	0,089	0,086	0,098	0,139	0,164
Castilla y León	0,082	0,091	0,120	0,128	0,119	0,131	0,160	0,141	0,165
Castilla-La Mancha	0,125	0,144	0,109	0,170	0,088	0,088	0,103	0,173	0,199
Cataluña	0,098	0,113	0,123	0,154	0,114	0,118	0,116	0,165	0,180
Ceuta y Melilla	–	0,137	0,138	0,121	0,021	–	0,123	0,149	0,263
C. Valenciana	0,096	0,136	0,110	0,171	0,119	0,126	0,145	0,152	0,181
Extremadura	0,108	0,101	0,134	0,137	0,049	0,105	0,081	0,144	0,176
Galicia	0,039	0,090	0,118	0,141	0,093	0,142	0,114	0,214	0,193
Madrid, C. de	0,088	0,135	0,153	0,198	0,113	0,140	0,139	0,189	0,226
Murcia, Región de	0,151	0,157	0,113	0,158	0,076	0,091	0,094	0,157	0,174
Navarra, C. Foral de	–	0,078	0,103	0,160	0,080	0,104	0,085	0,185	0,156
País Vasco	0,107	0,119	0,162	0,155	0,098	0,092	0,102	0,145	0,165
Rioja, La	–	0,090	0,094	0,161	0,091	0,158	0,123	0,244	0,197
España	**0,108**	**0,123**	**0,132**	**0,178**	**0,109**	**0,131**	**0,125**	**0,179**	**0,202**

CUADRO A.8.6 *(cont.)*: **Distribución de la ganancia hora por sexo, niveles de estudio y comunidades autónomas**

d) Desigualdad relativa (índice de Theil)

Comunidades autónomas	1	2	3	4	5	6	7	8	Todos
Andalucía	118,82	77,44	84,87	92,04	71,33	100,14	89,39	87,50	87,99
Aragón	–	80,40	43,04	110,29	40,29	94,56	77,34	99,19	86,86
Asturias, Principado de	–	61,07	85,02	105,96	110,88	82,68	72,24	89,45	103,01
Balears, Illes	31,54	59,70	54,76	60,28	61,12	45,89	54,52	100,76	72,46
Canarias	81,65	103,12	60,63	62,73	54,41	76,54	80,66	94,77	87,35
Cantabria	–	116,03	113,40	84,74	93,81	80,95	83,32	76,65	107,91
Castilla y León	53,27	62,12	80,31	71,45	54,40	84,18	102,89	77,05	87,39
Castilla-La Mancha	108,16	94,09	81,25	85,27	49,94	55,84	67,10	115,54	97,88
Cataluña	111,42	88,45	85,40	74,93	77,38	87,09	72,97	82,71	88,18
Ceuta y Melilla	–	88,33	40,82	59,68	9,62	–	87,40	86,44	79,86
C. Valenciana	81,26	95,70	80,44	85,97	91,42	78,80	100,12	87,73	90,33
Extremadura	54,97	62,95	84,09	68,46	23,28	63,29	60,31	103,45	78,34
Galicia	38,02	69,72	91,15	66,85	63,73	93,73	76,74	119,33	91,74
Madrid, C. de	39,95	76,81	70,69	88,18	71,93	106,21	75,82	72,74	76,85
Murcia, Región de	97,29	119,62	93,74	77,56	60,05	85,24	81,97	69,76	81,48
Navarra, C. Foral de	–	97,43	108,21	104,70	88,40	97,16	48,40	122,60	112,27
País Vasco	73,58	136,89	157,16	94,28	103,63	97,53	74,42	95,36	117,05
Rioja, La	–	99,21	112,20	95,49	67,43	94,61	123,66	128,45	127,25
España	**74,93**	**82,68**	**79,96**	**84,92**	**72,39**	**93,48**	**75,77**	**81,52**	**86,21**

Nota: Por razones de significatividad estadística no se ofrecen resultados si el numero de observaciones en la celda es igual o inferior a 20. 1: Sin estudios o primarios incompletos; 2: Educación primaria completa; 3: Educación secundaria I (1.er ciclo); 4: Educación secundaria II (2.º ciclo); 5: Formación profesional de grado medio (FP I); 6: Formación profesional de grado superior (FP II); 7: Diplomados universitarios y equivalentes; 8: Licenciados, ingenieros superiores y doctores (titulados superiores).
Fuente: INE (2004b).

CUADRO A.8.7: Distribución de la ganancia hora por sexo, tipos de ocupación y comunidades autónomas

a) Total población (índice de Theil)

Comunidades autónomas	A	D	E	F	G	H
Andalucía	0,161	0,161	0,089	0,162	0,172	0,106
Aragón	0,126	0,193	0,084	0,261	0,171	0,085
Asturias, P. de	0,122	0,145	0,081	0,135	0,157	0,107
Balears, Illes	0,200	0,175	0,067	0,290	0,199	0,089
Canarias	0,161	0,131	0,097	0,313	0,185	0,125
Cantabria	0,117	0,128	0,081	0,121	0,109	0,098
Castilla y León	0,112	0,139	0,132	0,148	0,142	0,091
C.-La Mancha	0,114	0,151	0,087	0,144	0,194	0,081
Cataluña	0,149	0,161	0,106	0,142	0,181	0,125
Ceuta y Melilla	–	0,118	0,117	0,245	0,285	0,166
C. Valenciana	0,139	0,139	0,112	0,169	0,166	0,095
Extremadura	0,099	0,130	0,077	0,157	0,185	0,119
Galicia	0,090	0,148	0,115	0,194	0,168	0,095
Madrid, C. de	0,217	0,187	0,136	0,193	0,183	0,138
Murcia, R. de	0,188	0,200	0,080	0,152	0,139	0,108
Navarra, C. F. de	0,126	0,131	0,073	0,129	0,129	0,084
País Vasco	0,120	0,119	0,075	0,113	0,134	0,152
Rioja, La	0,146	0,160	0,074	0,173	0,127	0,097
España	**0,176**	**0,169**	**0,107**	**0,176**	**0,175**	**0,119**

CUADRO A.8.7 *(cont.)***: Distribución de la ganancia hora por sexo, tipos de ocupación y comunidades autónomas**

a) Total población (índice de Theil)

Comunidades autónomas	J	K	L	M	N	P
Andalucía	0,060	0,165	0,094	0,111	0,113	0,112
Aragón	0,060	0,134	–	0,124	0,166	0,108
Asturias, P. de	0,046	0,144	–	0,097	0,095	0,096
Balears, Illes	0,089	0,106	0,112	0,106	0,109	0,067
Canarias	0,083	0,191	0,049	0,140	0,129	0,149
Cantabria	0,054	0,135	–	0,081	0,069	0,091
Castilla y León	0,015	0,125	–	0,114	0,107	0,106
C.-La Mancha	0,034	0,103	–	0,108	0,089	0,150
Cataluña	0,074	0,138	0,147	0,080	0,087	0,072
Ceuta y Melilla	0,072	0,153	–	0,210	0,108	–
C. Valenciana	0,069	0,153	–	0,097	0,107	0,010
Extremadura	0,056	0,105	–	0,103	0,097	0,086
Galicia	0,181	0,116	–	0,080	0,100	0,107
Madrid, C. de	0,065	0,139	–	0,157	0,098	0,101
Murcia, R. de	0,127	0,150	–	0,124	0,091	0,097
Navarra, C. F. de	0,139	0,153	–	0,084	0,081	0,065
País Vasco	0,127	0,163	–	0,084	0,073	0,078
Rioja, La	0,025	0,096	–	0,060	0,098	0,048
España	**0,077**	**0,147**	**0,010**	**0,120**	**0,102**	**0,106**

CUADRO A.8.7 *(cont.)*: **Distribución de la ganancia hora por sexo, tipos de ocupación y comunidades autónomas**

a) Total población (índice de Theil)

Comunidades autónomas	Q	R	S	T	Todos
Andalucía	0,132	0,106	0,089	0,097	**0,215**
Aragón	0,091	0,088	0,088	0,127	**0,221**
Asturias, P. de	0,112	0,111	0,093	0,120	**0,187**
Balears, Illes	0,112	0,089	0,081	0,104	**0,250**
Canarias	0,135	0,119	0,104	0,105	**0,262**
Cantabria	0,083	0,073	0,095	0,079	**0,161**
Castilla y León	0,124	0,102	0,103	0,119	**0,196**
C.-La Mancha	0,162	0,101	0,107	0,092	**0,206**
Cataluña	0,109	0,102	0,089	0,110	**0,209**
Ceuta y Melilla	–	0,274	0,145	0,072	**0,308**
C. Valenciana	0,113	0,106	0,098	0,110	**0,205**
Extremadura	0,121	0,092	0,093	0,076	**0,208**
Galicia	0,133	0,093	0,077	0,110	**0,211**
Madrid, C. de	0,111	0,116	0,115	0,123	**0,283**
Murcia, R. de	0,092	0,095	0,103	0,125	**0,206**
Navarra, C. F. de	0,074	0,074	0,085	0,086	**0,150**
País Vasco	0,071	0,072	0,095	0,111	**0,154**
Rioja, La	0,082	0,076	0,088	0,083	**0,173**
España	**0,119**	**0,110**	**0,010**	**0,112**	**0,232**

CUADRO A.8.7 *(cont.)*: **Distribución de la ganancia hora por sexo, tipos de ocupación y comunidades autónomas**

b) Hombres (índice de Theil)

Comunidades autónomas	A	D	E	F	G	H
Andalucía	0,157	0,160	0,110	0,153	0,150	0,101
Aragón	0,121	0,181	0,110	0,272	0,141	0,089
Asturias, P. de	0,128	0,154	0,105	0,127	0,144	0,086
Balears, Illes	0,205	0,185	0,082	0,283	0,208	0,096
Canarias	0,112	0,124	0,129	0,307	0,158	0,125
Cantabria	0,124	0,113	0,112	0,110	0,125	0,105
Castilla y León	0,103	0,152	0,133	0,132	0,124	0,095
C.-La Mancha	0,108	0,135	0,106	0,145	0,195	0,081
Cataluña	0,137	0,170	0,129	0,137	0,165	0,123
Ceuta y Melilla	–	0,110	0,204	0,203	0,293	0,224
C. Valenciana	0,130	0,140	0,104	0,161	0,156	0,069
Extremadura	0,088	0,121	0,117	0,160	0,205	0,093
Galicia	0,081	0,151	0,121	0,181	0,163	0,095
Madrid, C. de	0,213	0,189	0,138	0,200	0,166	0,114
Murcia, R. de	0,177	0,207	0,095	0,148	0,121	0,127
Navarra, C. F. de	0,111	0,136	0,122	0,122	0,128	0,080
País Vasco	0,108	0,128	0,097	0,114	0,116	0,090
Rioja, La	0,136	0,122	0,068	0,149	0,109	0,099
España	**0,167**	**0,174**	**0,126**	**0,175**	**0,159**	**0,108**

CUADRO A.8.7 *(cont.)*: **Distribución de la ganancia hora por sexo, tipos de ocupación y comunidades autónomas**

b) Hombres (índice de Theil)

Comunidades autónomas	J	K	L	M	N	P
Andalucía	0,060	0,145	0,094	0,111	0,114	0,097
Aragón	0,049	0,142	–	0,123	0,163	0,077
Asturias, P. de	0,050	0,120	–	0,096	0,095	0,010
Balears, Illes	0,090	0,111	0,117	0,106	0,108	0,063
Canarias	0,075	0,174	0,052	0,141	0,125	0,169
Cantabria	0,055	0,121	–	0,081	0,068	0,075
Castilla y León	0,016	0,131	–	0,112	0,106	0,010
C.-La Mancha	0,027	0,113	–	0,109	0,091	0,117
Cataluña	0,070	0,139	0,152	0,080	0,087	0,062
Ceuta y Melilla	0,084	0,174	–	0,210	0,108	–
C. Valenciana	0,073	0,164	–	0,097	0,107	0,089
Extremadura	0,058	0,106	–	0,103	0,097	0,078
Galicia	0,173	0,113	–	0,078	0,101	0,097
Madrid, C. de	0,061	0,165	–	0,158	0,097	0,083
Murcia, R. de	0,132	0,137	–	0,124	0,089	0,078
Navarra, C. F. de	0,113	0,092	–	0,086	0,078	0,049
País Vasco	0,130	0,118	–	0,085	0,072	0,070
Rioja, La	0,026	0,116	–	0,060	0,097	0,024
España	**0,076**	**0,149**	**0,102**	**0,120**	**0,102**	**0,093**

CUADRO A.8.7 *(cont.)*: **Distribución de la ganancia hora por sexo, tipos de ocupación y comunidades autónomas**

b) Hombres (índice de Theil)

Comunidades autónomas	**Q**	**R**	**S**	**T**	**Todos**
Andalucía	0,112	0,106	0,091	0,095	**0,219**
Aragón	0,068	0,086	0,118	0,126	**0,216**
Asturias, P. de	0,096	0,110	0,135	0,119	**0,177**
Balears, Illes	0,108	0,089	0,127	0,107	**0,270**
Canarias	0,126	0,116	0,143	0,106	**0,270**
Cantabria	0,065	0,073	0,126	0,077	**0,152**
Castilla y León	0,107	0,103	0,150	0,123	**0,189**
C -La Mancha	0,124	0,099	0,136	0,083	**0,203**
Cataluña	0,093	0,100	0,118	0,109	**0,204**
Ceuta y Melilla	–	0,274	0,102	0,074	**0,330**
C. Valenciana	0,091	0,105	0,124	0,107	**0,201**
Extremadura	0,109	0,093	0,114	0,070	**0,224**
Galicia	0,104	0,091	0,097	0,103	**0,210**
Madrid, C. de	0,089	0,115	0,184	0,114	**0,294**
Murcia, R. de	0,072	0,095	0,010	0,081	**0,213**
Navarra, C. F. de	0,062	0,074	0,087	0,089	**0,139**
País Vasco	0,064	0,069	0,090	0,108	**0,141**
Rioja, La	0,070	0,070	0,113	0,072	**0,155**
España	**0,097**	**0,109**	**0,134**	**0,108**	**0,234**

CUADRO A.8.7 *(cont.)*: **Distribución de la ganancia hora por sexo, tipos de ocupación y comunidades autónomas**

c) Mujeres (índice de Theil)

Comunidades autónomas	A	D	E	F	G	H
Andalucía	0,152	0,133	0,067	0,144	0,159	0,109
Aragón	–	0,185	0,054	0,120	0,151	0,082
Asturias, P. de	0,078	0,118	0,061	0,116	0,124	0,111
Balears, Illes	0,175	0,133	0,060	0,217	0,142	0,075
Canarias	0,226	0,124	0,059	0,293	0,179	0,121
Cantabria	–	0,113	0,060	0,104	0,083	0,092
C. y León	0,117	0,103	0,110	0,123	0,116	0,080
C.-La Mancha	0,073	0,158	0,074	0,115	0,146	0,081
Cataluña	0,155	0,124	0,074	0,112	0,164	0,116
Ceuta y Melilla	–	0,109	0,064	0,321	0,115	0,116
C. Valenciana	0,147	0,112	0,118	0,137	0,136	0,107
Extremadura	–	0,129	0,055	0,103	0,114	0,131
Galicia	0,091	0,126	0,078	0,206	0,128	0,093
Madrid, C. de	0,180	0,145	0,090	0,138	0,172	0,151
Murcia, R. de	–	0,135	0,066	0,113	0,109	0,100
Navarra, C. F. de	0,194	0,113	0,052	0,100	0,101	0,084
País Vasco	0,136	0,091	0,057	0,085	0,125	0,165
Rioja, La	–	0,202	0,073	0,178	0,100	0,091
España	**0,177**	**0,135**	**0,076**	**0,138**	**0,156**	**0,123**

CUADRO A.8.7 *(cont.)*: **Distribución de la ganancia hora por sexo, tipos de ocupación y comunidades autónomas**

c) Mujeres (índice de Theil)

Comunidades autónomas	J	K	L	M	N	P
Andalucía	–	0,136	–	0,045	0,076	0,120
Aragón	–	0,099	–	–	0,121	0,111
Asturias, P. de	–	0,122	–	–	–	0,079
Balears, Illes	–	0,091	–	–	–	0,048
Canarias	–	0,135	–	–	–	0,051
Cantabria	–	0,118	–	–	–	0,038
C. y León	–	0,101	–	–	–	0,078
C.-La Mancha	–	0,066	–	–	–	0,140
Cataluña	0,109	0,104	–	–	0,054	0,073
Ceuta y Melilla	–	0,064	–	–	–	–
C. Valenciana	–	0,101	–	0,100	0,052	0,108
Extremadura	–	0,081	–	–	–	0,067
Galicia	–	0,104	–	0,109	0,073	0,098
Madrid, C. de	0,077	0,103	–	–	0,124	0,108
Murcia, R. de	–	0,125	–	–	–	0,106
Navarra, C. F. de	–	0,178	–	–	0,087	0,051
País Vasco	–	0,159	–	–	0,067	0,059
Rioja, La	–	0,060	–	–	–	0,079
España	**0,072**	**0,115**	**0,043**	**0,111**	**0,084**	**0,103**

CUADRO A.8.7 *(cont.)*: **Distribución de la ganancia hora por sexo, tipos de ocupación y comunidades autónomas**

c) Mujeres (índice de Theil)

Comunidades autónomas	Q	R	S	T	Todos
Andalucía	0,169	–	0,073	0,101	**0,193**
Aragón	0,069	–	0,079	0,116	**0,187**
Asturias, P. de	0,130	–	0,076	0,077	**0,183**
Balears, Illes	0,058	–	0,066	0,075	**0,196**
Canarias	0,092	–	0,082	0,083	**0,236**
Cantabria	0,063	–	0,078	0,083	**0,164**
C. y León	0,145	–	0,073	0,078	**0,165**
C.-La Mancha	0,102	–	0,095	0,093	**0,199**
Cataluña	0,085	0,157	0,075	0,090	**0,180**
Ceuta y Melilla	–	–	0,163	–	**0,263**
C. Valenciana	0,117	0,149	0,077	0,100	**0,181**
Extremadura	0,108	–	0,083	0,104	**0,176**
Galicia	0,095	0,089	0,058	0,135	**0,193**
Madrid, C. de	0,121	–	0,074	0,119	**0,226**
Murcia, R. de	0,102	–	0,088	0,185	**0,174**
Navarra, C. F. de	0,086	–	0,076	0,073	**0,156**
País Vasco	0,080	–	0,087	0,107	**0,165**
Rioja, La	0,074	–	0,084	0,124	**0,197**
España	**0,114**	**0,148**	**0,078**	**0,114**	**0,202**

CUADRO A.8.7 *(cont.)*: **Distribución de la ganancia hora por sexo, tipos de ocupación y comunidades autónomas**

d) Desigualdad relativa (100 * mujeres/hombres)

Comunidades autónomas	A	D	E	F	G	H
Andalucía	96,71	83,07	60,73	93,81	105,69	107,39
Aragón	–	102,15	49,33	44,12	107,01	92,38
Asturias, P. de	60,87	76,94	58,35	91,66	86,47	129,60
Balears, Illes	85,58	72,01	72,54	76,69	67,99	78,14
Canarias	201,42	100,33	45,99	95,35	112,98	97,14
Cantabria	–	100,41	53,43	94,21	66,54	87,55
C. y León	113,51	67,67	82,49	93,69	93,32	83,94
C.-La Mancha	67,96	117,09	69,24	79,32	74,79	100,79
Cataluña	112,96	73,07	57,77	81,69	99,44	94,80
Ceuta y Melilla	–	98,44	31,16	157,98	39,36	51,95
C. Valenciana	113,16	79,95	114,18	85,03	87,04	154,21
Extremadura	–	106,89	47,05	64,27	55,68	141,97
Galicia	112,45	83,35	64,35	113,89	78,88	97,96
Madrid, C. de	84,45	76,60	64,72	68,95	103,18	132,31
Murcia, R. de	–	65,21	69,22	76,37	90,14	78,85
Navarra, C. F. de	174,56	82,86	42,69	81,82	79,06	104,81
País Vasco	125,15	71,12	58,78	74,81	107,74	183,17
Rioja, La	–	165,50	108,84	119,38	92,21	91,54
España	**105,68**	**77,77**	**60,51**	**78,44**	**98,02**	**114,65**

CUADRO A.8.7 *(cont.)*: **Distribución de la ganancia hora por sexo, tipos de ocupación y comunidades autónomas**

d) Desigualdad relativa (100 * mujeres/hombres)

Comunidades autónomas	**J**	**K**	**L**	**M**	**N**	**P**
Andalucía	–	93,90	–	40,66	66,27	123,22
Aragón	–	69,35	–	–	74,01	144,31
Asturias, P. de	–	101,25	–	–	–	79,17
Balears, Illes	–	82,48	–	–	–	76,15
Canarias	–	77,69	–	–	–	30,12
Cantabria	–	97,23	–	–	–	50,01
C. y León	–	76,55	–	–	–	78,20
C.-La Mancha	–	57,98	–	–	–	119,37
Cataluña	156,40	75,22	–	–	62,33	116,93
Ceuta y Melilla	–	36,77	–	–	–	–
C. Valenciana	–	61,28	–	103,92	48,19	121,27
Extremadura	–	76,21	–	–	–	84,78
Galicia	–	91,92	–	140,32	72,41	101,59
Madrid, C. de	125,65	62,71	–	–	127,84	129,42
Murcia, R. de	–	91,21	–	–	–	135,11
Navarra, C. F. de	–	192,88	–	–	111,85	103,94
País Vasco	–	135,48	–	–	92,32	83,94
Rioja, La	–	51,95	–	–	–	326,42
España	**94,58**	**76,86**	**42,09**	**92,37**	**82,42**	**110,87**

CUADRO A.8.7 *(cont.)*: **Distribución de la ganancia hora por sexo, tipos de ocupación y comunidades autónomas**

d) Desigualdad relativa (100 * mujeres/hombres)

Comunidades autónomas	**Q**	**R**	**S**	**T**	**Todos**
Andalucía	151,24	–	81,12	105,91	**87,99**
Aragón	100,99	–	66,94	91,81	**86,86**
Asturias, P. de	134,57	–	56,32	64,52	**103,01**
Balears, Illes	53,81	–	51,67	70,09	**72,46**
Canarias	73,32	–	57,21	78,16	**87,35**
Cantabria	96,14	–	61,88	108,31	**107,91**
C. y León	134,90	–	48,86	63,35	**87,39**
C.-La Mancha	81,78	–	70,26	111,52	**97,88**
Cataluña	92,17	157,03	63,47	83,23	**88,18**
Ceuta y Melilla	–	–	160,37	–	**79,86**
C. Valenciana	128,56	142,20	62,00	94,06	**90,33**
Extremadura	99,29	–	73,00	148,59	**78,34**
Galicia	90,69	98,19	59,72	131,00	**91,74**
Madrid, C. de	135,98	–	40,43	104,43	**76,85**
Murcia, R. de	141,85	–	88,50	229,74	**81,48**
Navarra, C. F. de	138,90	–	86,69	82,08	**112,27**
País Vasco	126,35	–	95,89	98,85	**117,05**
Rioja, La	106,35	–	74,21	172,56	**127,25**
España	**117,00**	**136,22**	**58,37**	**105,32**	**86,21**

Nota: Por razones de significatividad estadística no se ofrecen resultados si el numero de observaciones en la celda es igual o inferior a 20. A: Dirección de las Administraciones Públicas y de empresas de 10 o más asalariados; D: Profesiones asociadas a titulaciones de 2.º y 3.er ciclo universitario y afines; E: Profesiones asociadas a una titulación de 1.er ciclo universitario y afines; F: Técnicos y profesionales de apoyo; G: Empleados de tipo administrativo; H: Trabajadores de los servicios de restauración y de servicios personales; J: Trabajadores de los servicios de protección y seguridad; K: Dependientes de comercio y asimilados; L: Trabajadores cualificados en la agricultura y en la pesca; M: Trabajadores cualificados de la construcción, excepto los operadores de maquinaria; N: Trabajadores cualificados de las industrias extractivas, de la metalurgia, la construcción de maquinaria y asimilados; P: Trabajadores cualificados de industrias de artes gráficas, textil y de la confección, de la elaboración de alimentos, ebanistas, artesanos y otros asimilados; Q: Operadores de instalaciones industriales, de maquinaria fija; montadores y ensambladores; R: Conductores y operadores de maquinaria móvil; S: Trabajadores no cualificados en servicios (excepto transportes); T: Peones de la agricultura, pesca, construcción, industrias manufactureras y transportes.
Fuente: INE (2004b).

CUADRO A.8.8: Distribución de la ganancia hora por sexo, ramas de actividad y comunidades autónomas

a) Total población (índice de Theil)

Comunidades autónomas	C	D	E	F	G	H	I	J	K	M	N	O	Todas
Andalucía	0,116	0,202	0,147	0,153	0,169	0,174	0,163	0,110	0,240	0,153	0,161	0,189	**0,215**
Aragón	0,127	0,161	0,198	0,161	0,149	0,094	0,146	0,113	0,244	0,179	0,178	1,007	**0,221**
Asturias, Principado de	0,183	0,142	0,207	0,117	0,198	0,086	0,010	0,092	0,161	0,128	0,130	0,320	**0,187**
Balears, Illes	0,136	0,122	0,072	0,149	0,129	0,183	0,319	0,119	0,292	0,162	0,134	0,215	**0,250**
Canarias	0,237	0,192	0,166	0,216	0,226	0,143	0,344	0,113	0,175	0,109	0,177	0,351	**0,262**
Cantabria	0,160	0,127	0,252	0,121	0,134	0,101	0,090	0,129	0,137	0,150	0,142	0,248	**0,161**
Castilla y León	0,117	0,156	0,149	0,165	0,146	0,097	0,126	0,093	0,128	0,107	0,130	0,208	**0,196**
Castilla-La Mancha	0,159	0,177	0,170	0,145	0,144	0,100	0,123	0,091	0,161	0,128	0,157	0,178	**0,206**
Cataluña	0,124	0,173	0,151	0,129	0,206	0,144	0,151	0,156	0,259	0,140	0,170	0,235	**0,209**
Ceuta y Melilla	–	0,099	0,165	0,278	0,124	0,112	0,395	0,113	0,123	0,141	0,183	0,195	**0,308**
C. Valenciana	0,103	0,174	0,163	0,146	0,196	0,132	0,196	0,107	0,223	0,128	0,155	0,202	**0,205**
Extremadura	0,069	0,183	0,122	0,170	0,141	0,093	0,127	0,087	0,150	0,112	0,143	0,153	**0,208**
Galicia	0,173	0,176	0,112	0,146	0,170	0,099	0,258	0,109	0,173	0,106	0,185	0,181	**0,211**
Madrid, C. de	0,324	0,214	0,165	0,258	0,301	0,164	0,232	0,214	0,334	0,182	0,151	0,270	**0,283**
Murcia, Región de	0,325	0,159	0,179	0,198	0,167	0,177	0,106	0,090	0,234	0,085	0,187	0,177	**0,206**
Navarra, C. Foral de	0,075	0,109	0,204	0,114	0,111	0,207	0,134	0,107	0,131	0,105	0,194	0,224	**0,150**
País Vasco	0,114	0,112	0,180	0,134	0,165	0,115	0,127	0,140	0,202	0,092	0,121	0,208	**0,154**
Rioja, La	0,088	0,157	0,238	0,108	0,130	0,121	0,137	0,068	0,241	0,132	0,168	0,142	**0,173**
España	**0,170**	**0,183**	**0,173**	**0,186**	**0,227**	**0,153**	**0,217**	**0,154**	**0,288**	**0,142**	**0,165**	**0,258**	**0,232**

CUADRO A.8.8 *(cont.)*: **Distribución de la ganancia hora por sexo, ramas de actividad y comunidades autónomas**

b) Hombres (índice de Theil)

Comunidades autónomas	**C**	**D**	**E**	**F**	**G**	**H**	**I**	**J**	**K**	**M**	**N**	**O**	**Todas**
Andalucía	0,118	0,188	0,139	0,151	0,164	0,184	0,160	0,100	0,289	0,145	0,171	0,169	**0,219**
Aragón	0,128	0,147	0,152	0,168	0,161	0,097	0,130	0,113	0,306	0,130	0,165	1,097	**0,216**
Asturias, Principado de	0,183	0,134	0,210	0,118	0,195	0,067	0,085	0,080	0,189	0,157	0,137	0,318	**0,177**
Balears, Illes	0,135	0,110	0,082	0,153	0,130	0,222	0,291	0,112	0,334	0,154	0,166	0,230	**0,270**
Canarias	0,239	0,181	0,162	0,221	0,225	0,153	0,306	0,101	0,177	0,090	0,182	0,379	**0,270**
Cantabria	0,162	0,113	0,263	0,125	0,124	0,113	0,093	0,120	0,129	0,146	0,173	0,233	**0,152**
Castilla y León	0,110	0,148	0,150	0,168	0,153	0,111	0,123	0,080	0,156	0,104	0,147	0,209	**0,189**
Castilla-La Mancha	0,162	0,155	0,153	0,143	0,133	0,098	0,115	0,084	0,189	0,131	0,150	0,157	**0,203**
Cataluña	0,114	0,164	0,149	0,132	0,211	0,168	0,147	0,137	0,282	0,133	0,170	0,222	**0,204**
Ceuta y Melilla	–	–	0,170	0,286	0,113	0,085	0,352	0,100	0,097	0,202	0,213	0,154	**0,330**
C. Valenciana	0,103	0,163	0,148	0,155	0,200	0,137	0,205	0,092	0,230	0,102	0,145	0,191	**0,201**
Extremadura	0,071	0,166	0,120	0,174	0,155	0,082	0,131	0,079	0,133	0,123	0,159	0,139	**0,224**
Galicia	0,153	0,157	0,110	0,148	0,180	0,099	0,244	0,101	0,200	0,077	0,200	0,156	**0,210**
Madrid, C. de	0,339	0,211	0,146	0,267	0,319	0,156	0,233	0,222	0,342	0,178	0,159	0,258	**0,294**
Murcia, Región de	0,328	0,150	0,163	0,201	0,154	0,207	0,101	0,069	0,302	0,063	0,213	0,153	**0,213**
Navarra, C. Foral de	0,073	0,102	0,182	0,118	0,084	0,170	0,134	0,089	0,132	0,092	0,263	0,233	**0,139**
País Vasco	0,116	0,106	0,185	0,137	0,147	0,091	0,115	0,116	0,177	0,092	0,130	0,197	**0,141**
Rioja, La	–	0,138	0,235	0,104	0,121	0,143	0,131	0,058	0,222	0,131	0,178	0,132	**0,155**
España	**0,168**	**0,170**	**0,164**	**0,191**	**0,234**	**0,167**	**0,213**	**0,146**	**0,310**	**0,136**	**0,172**	**0,254**	**0,234**

CUADRO A.8.8 *(cont.)*: **Distribución de la ganancia hora por sexo, ramas de actividad y comunidades autónomas**

c) Mujeres (índice de Theil)

Comunidades autónomas	**C**	**D**	**E**	**F**	**G**	**H**	**I**	**J**	**K**	**M**	**N**	**O**	**Todas**
Andalucía	–	0,205	0,170	0,205	0,127	0,132	0,166	0,087	0,115	0,153	0,128	0,220	**0,193**
Aragón	–	0,130	0,193	0,062	0,083	0,079	0,221	0,071	0,176	0,208	0,157	0,149	**0,187**
Asturias, Principado de	–	0,170	–	0,076	0,141	0,095	0,143	0,098	0,088	0,109	0,114	0,180	**0,183**
Balears, Illes	–	0,146	–	0,051	0,105	0,080	0,332	0,094	0,197	0,165	0,099	0,144	**0,196**
Canarias	–	0,183	0,159	0,146	0,171	0,109	0,477	0,098	0,139	0,119	0,155	0,203	**0,236**
Cantabria	–	0,132	–	0,061	0,112	0,073	0,076	0,090	0,119	0,151	0,114	0,219	**0,164**
Castilla y León	0,156	0,150	–	0,080	0,100	0,078	0,116	0,096	0,096	0,107	0,010	0,135	**0,165**
Castilla-La Mancha	–	0,151	–	0,164	0,132	0,097	0,099	0,067	0,123	0,127	0,132	0,168	**0,199**
Cataluña	0,179	0,141	0,129	0,078	0,136	0,102	0,135	0,127	0,182	0,142	0,145	0,204	**0,180**
Ceuta y Melilla	–	–	–	–	0,076	0,085	–	–	0,140	0,087	0,108	0,124	**0,263**
C. Valenciana	–	0,149	0,190	0,066	0,135	0,102	0,140	0,087	0,170	0,145	0,144	0,190	**0,181**
Extremadura	–	0,158	–	0,086	0,074	0,104	–	0,061	0,155	0,104	0,109	0,121	**0,176**
Galicia	0,313	0,142	0,093	0,117	0,127	0,098	0,321	0,068	0,120	0,124	0,156	0,174	**0,193**
Madrid, C. de	–	0,207	0,213	0,139	0,205	0,157	0,213	0,121	0,250	0,170	0,130	0,253	**0,226**
Murcia, Región de	–	0,118	–	0,129	0,146	0,114	0,140	0,086	0,113	0,094	0,116	0,174	**0,174**
Navarra, C. Foral de	–	0,100	–	0,047	0,132	0,217	0,127	0,104	0,113	0,109	0,146	0,175	**0,156**
País Vasco	–	0,116	0,098	0,081	0,145	0,115	0,151	0,153	0,165	0,091	0,099	0,185	**0,165**
Rioja, La	–	0,190	–	0,148	0,098	0,106	0,161	0,072	0,235	0,129	0,150	0,142	**0,197**
España	**0,188**	**0,179**	**0,204**	**0,119**	**0,160**	**0,119**	**0,219**	**0,114**	**0,202**	**0,142**	**0,138**	**0,223**	**0,202**

CUADRO A.8.8 *(cont.)***: Distribución de la ganancia hora por sexo, ramas de actividad y comunidades autónomas**

d) Desigualdad relativa (100 * Mujeres/hombres)

Comunidades autónomas	C	D	E	F	G	H	I	J	K	M	N	O	Todas
Andalucía	–	108,81	121,81	136,23	77,54	71,51	103,60	86,99	39,77	105,86	74,44	130,72	**87,99**
Aragón	–	88,26	126,78	37,08	51,83	81,21	170,40	63,31	57,41	159,99	94,92	13,57	**86,86**
Asturias, Principado de	–	126,58	–	63,96	72,12	141,05	167,03	121,89	46,43	69,71	83,02	56,58	**103,01**
Balears, Illes	–	133,11	–	33,12	80,63	35,96	114,00	84,23	58,93	106,98	59,79	62,59	**72,46**
Canarias	–	101,10	98,21	66,28	76,18	70,98	155,69	97,39	78,52	132,10	84,96	53,54	**87,35**
Cantabria	–	116,60	–	48,89	90,66	64,56	81,71	75,13	92,23	103,11	65,70	93,85	**107,91**
Castilla y León	140,91	101,56	–	47,35	65,51	70,14	94,87	120,69	61,46	103,18	67,86	64,51	**87,39**
Castilla-La Mancha	–	97,66	–	115,19	98,84	99,44	86,57	79,31	65,00	96,86	87,50	107,49	**97,88**
Cataluña	156,53	85,97	86,01	58,78	64,38	60,64	91,88	92,44	64,36	106,23	85,61	92,05	**88,18**
Ceuta y Melilla	–	–	–	–	67,23	100,13	–	–	144,10	42,85	50,67	80,32	**79,86**
C. Valenciana	–	91,88	127,93	42,95	67,25	73,93	68,38	94,80	73,82	142,18	99,72	99,83	**90,33**
Extremadura	–	95,38	–	49,33	47,76	126,20	–	76,34	116,33	84,01	68,57	87,30	**78,34**
Galicia	204,94	90,65	84,18	79,29	70,65	99,40	131,52	67,02	60,16	161,65	78,00	111,53	**91,74**
Madrid, C. de	–	98,02	145,46	51,88	64,29	100,56	91,55	54,46	72,95	95,25	81,88	98,01	**76,85**
Murcia, Región de	–	79,04	–	64,23	94,58	54,89	138,67	124,51	37,56	149,40	54,59	114,14	**81,48**
Navarra, C. Foral de	–	98,16	–	39,58	157,35	127,48	94,86	117,92	85,28	119,12	55,39	75,24	**112,27**
País Vasco	–	109,54	53,18	59,21	98,86	126,97	130,81	131,81	93,24	99,38	76,21	93,71	**117,05**
Rioja, La	–	138,04	–	142,52	81,10	74,25	122,72	124,96	105,69	98,06	84,34	107,36	**127,25**
España	**111,84**	**105,16**	**124,24**	**62,21**	**68,49**	**71,30**	**102,99**	**77,89**	**65,37**	**104,63**	**80,30**	**87,70**	**86,21**

Nota: Por razones de significatividad estadística no se ofrecen resultados si el numero de observaciones en la celda es igual o inferior a 20. C: Industrias extractivas; D: Industria manufacturera, E: Producción y distribución de energía eléctrica, gas y agua; F: Construcción; G: Comercio; reparación de vehículos de motor, motocicletas y ciclomotores y artículos personales y de uso doméstico; H: Hostelería; I: Transporte, almacenamiento y comunicaciones; J: Intermediación financiera; K: Actividades inmobiliarias y de alquiler; servicios empresariales; M: Educación; N: Actividades sanitarias y veterinarias, servicio social; O: Otras actividades sociales y de servicios prestados a la comunidad; servicios personales.
Fuente: INE (2004b).

Bibliografía

Aaberge, Rolf. «Characterizations of Lorenz curves and income distributions». *Social Choice and Welfare* 17, 4 (agosto 2000): 639-653.

Aczél, János. *Lectures on functional equations and their applications.* Nueva York: Academic Press, 1966.

Aczél, János, y Jean Dhombres. *Functional equations containing several variables.* Cambridge (Reino Unido): Cambridge University Press, 1989.

Aigner, Dennis J., y A. James Heins. «A social welfare view of the measurement of income inequality». *The Review of Income and Wealth* 13, 3, (1967): 12-25.

Aldás, Joaquin, Francisco J. Goerlich y Matilde Mas. *Gasto de las Familias en las Comunidades Autónomas Españolas. Pautas de Consumo, Desigualdad y Convergencia.* A Coruña: Fundación Caixa Galicia, CIEF Centro de Investigación Económica y Financiera, 2006a.

—. *Consumo de los hogares y distribución de la renta en España (1973-2003). Una perspectiva regional.* A Coruña: Fundación Caixa Galicia, CIEF Centro de Investigación Económica y Financiera, 2006b.

Alonso-Colmenares, María Dolores, Ana Lara, María Teresa Cardelús, Coral Del Río y Javier Ruiz-Castillo. «La Encuesta de Presupuestos Familiares 1973-74», Madrid: Departamento de Economía de la Universidad Carlos III, [sin fecha]. Disponible en http://www.eco.uc3m.es/investigacion/epf73-74.html.

Alonso-Colmenares, María Dolores, Ana Lara, Coral Del Río y Javier Ruiz-Castillo. «La Encuesta de Presupuestos Familiares 1980-81», Madrid: Departamento de Economía de la Universidad Carlos III, 1999. Disponible en http://www.eco.uc3.es/investigacion/epf80-81.html.

Amiel, Yoram, y Frank A. Cowell. *Thinking about Inequality.* Cambridge: Cambridge University Press, 1999.

Anand, Sudhir. *Inequality and Poverty in Malaysia.* Oxford: Oxford University Press, 1983.

Anand, Sudhir, y Amartya Sen. «Human Development Index: Methodology and measurement». Human Development Report Office Occasional Paper 12. Nueva York: United Nations Development Program, 1994.

Arévalo, Raquel, María Teresa Cardelús y Javier Ruiz-Castillo. «La Encuesta de Presupuestos Familiares 1990-91», Madrid: Departamento de Economía de la Universidad Carlos III, 1998. Disponible en http://www.eco.uc3.es/investigacion/epf90-91.html.

Arnold, Barry C. *Majorization and the Lorenz Order: A Brief Introduction.* Lecture Notes in Statistics, Berlín: Springer-Verlag, 1987.

Arrow, Kenneth J. *Social Choice and Individual Values.* 1.ª ed., Nueva York: John Wiley & Sons, 1951 [2.ª ed., Nueva York: John Wiley & Sons 1963].

Atkinson, Anthony B. «On the measurement of inequality». *Journal of Economic Theory* 2, 3 (septiembre 1970): 244-263.

—. «Horizontal equity and the distribution of the tax burden». En Henry Aaron y Michael Boskin, eds. *The Economics of Taxation.* Washington, D.C.: The Brookings Institution, capítulo 1 (1980): 3-18.

—. *The Economics of Inequality.* 2.ª ed. Oxford: Clarendon Press, [1.ª ed. 1975] 1983.

—. «Measuring poverty and differences in family composition». *Economica* 59, 233 (febrero 1992): 1-16.

Atkinson, Anthony B. y François Bourguignon. «The comparison of multidimensional distributions of economic status». *Review of Economic Studies* 49, 2 (1982): 183-201.

—. «Income distribution and differences in needs». En George R. Feiwel, eds. *Arrow and the Foundations of the Theory of Economic Policy,* Nueva York: MacMillan (1987): 183-201.

—. *Handbook of Income Distribution.* Amsterdam: Elsevier Science Publishers B. V. North Holland, vol. 1, 2000a.

—. «Introduction: Income distribution and economics». En Anthony B. Atkinson y François Bourguignon, eds. *Handbook of Income Distribution.* Amsterdam: Elsevier Science Publishers B. V. North Holland, vol. 1, capítulo 1, 2000b.

Atkinson, Anthony B., y Andrea Brandolini. «Promise and pitfalls in the use of 'secondary' data-sets: Income inequality in OECD countries as a case study». *Journal of Economic Literature* 39, 3 (2001): 771-799.

Atkinson, Anthony B., Lee Rainwater y Timothy Smeeding. *Income Distribution in OECD Countries: Evidence from Luxembourg Income Study*. París: OCDE, 1995.

Ayala Cañón, Luis, Antonio Jurado Málaga y Francisco Pedraja Chaparro. «Desigualdad y bienestar en la distribución intraterritorial de la renta, 1973-2000» *Investigaciones Regionales* 8 (primavera 2006): 5-30.

Basu, Kaushik. «Axioms for a fuzzy measure of inequality». *Mathematical Social Sciences* 14, 12 (1987): 275-288.

Bawa, Vijai S. «Optimal rules for ordering uncertain prospects». *Journal of Financial Economics* 2 (1975): 95-121.

Banks, James, y Paul Johnson. «Equivalence scale relativities revisited». *The Economic Journal* 104, 425 (julio 1994): 883-890.

Barten, Anton P. «Family composition, prices, and expenditure patterns». En Peter E. Hart, Gordon Mills y John K. Whitaker, eds. *Economic Analysis for National Economic Planning,* Londres: Butterworth, 1964.

Beach, Charles M., y Russell Davidson. «Distribution-free statistical inference with Lorenz curves and income shares». *The Review of Economic Studies* 50, 4 (octubre 1983): 723-735.

Beach, Charles M., y Stephan F. Kaliski. «Lorenz curve inference with sample weights: an application to the distribution of unemployment experience». *Applied Statistics* 35, 1 (1986): 38-45.

Becker, Gary S., Tomas J. Philipson y Rodrigo R. Soares. «The quantity and quality of life and the evolution of world inequality». *The American Economic Review* 91, 1 (marzo 2005): 277-291. (Existen dos versiones anteriores: una como Documento de Trabajo n.º 9765, Cambridge (MA): National Bureau of Economic Research, junio 2003, disponible en http://www.nber.org/papers/w9765; y la otra como «Growth and Mortality in Less Developed Nations». Documento de Trabajo, Chicago: University of Chicago, diciembre 2001).

Benjamin, Dwayne, y Angus Deaton. «Household welfare and the pricing of cocoa and coffee in Côte d'Ivoire: Lessons from the Living Standards Surveys». *The World Bank Economic Review* 7 (1993): 293-318.

Ben-Porath, Elchanan, y Itzhak Gilboa. «Linear measures, the Gini index, and the income-equality trade-off». *Journal of Economic Theory* 64, 2 (diciembre 1994): 443-467.
Bentham, Jeremy. *An Introduction to the Principle of Morals and Legislation.* Oxford: Oxford University Press, 1907.
Bentzel, Ragnar. «The social significance of income distribution statistics». *The Review of Income and Wealth* 16, 3 (1970): 253-263.
Bergson, Abram. «A reformulation of certain aspects of welfare economics». *Quarterly Journal of Economics* 52 (1938): 310-334.
Berrebi, Z. M., y Jacques Silber. «Income inequality indices and deprivation: A generalization». *Quarterly Journal of Economics* 100, 3 (agosto 1985): 807-810.
Berry, Albert, François Bourguignon y Christian Morrison. «The level of world inequality: How much can one say?». *Review of Income and Wealth* 29 (1981): 217-243.
—. «Changes in the world distribution of income between 1950 and 1977». *The Economic Journal* 93, 370 (junio 1983): 331-350.
Bhattacharya, N., y B. Mahalanobis. «Regional disparities in household consumption in India». *Journal of the American Statistical Association* 62, 317 (marzo 1967): 143-161.
Blackorby, Charles, y David Donaldson. «Measures of relative equality and their meaning in terms of social welfare». *Journal of Economic Theory* 18, 1 (junio 1978): 59-80.
—. «A theoretical treatment of indices of absolute inequality». *International Economic Review* 21, 1 (1980): 107-136.
—. "Ratio-Scale and Translation-Scale Full Interpersonal Comparability without Domain Restrictions: Admissible Social-Evaluation Functions", *International Economic Review* 23, 2 (junio 1982): 249-268.
—. «Adult equivalence scales, interpersonal comparisons of well-being, and applied welfare economics». En J. Elster y J. Roemer, eds., *Interpersonal Comparisons and Distributive Justice.* Cambridge: Cambridge University Press (1991): 164-199.
—. «Adult equivalence scales, and the economic implementation of interpersonal comparisons of well-being». *Social Choice and Welfare* 10, 4 (octubre 1993a): 335-361.
—. «Household equivalence scales and welfare comparisons: A comment». *Journal of Public Economics* 50, 1 (enero 1993b): 143-146.
Blackorby, Charles, David Donaldson y Maria Auersperg. «A new procedure for the measurement of inequality within and among population subgroups». *Canadian Journal of Economics* 14 (1981): 665-685.
—. «Ratio-Scale and Translation-Scale Full Interpersonal Comparability without Domain Restrictions: Admissible Social-Evaluation Functions», *International Economic Review* 23, 2 (junio 1982): 249-268.
Blackorby, Charles, y Daniel Primont. «Index numbers and consistency in aggregation». Documento de Trabajo 78-23, Vancouver: University of British Columbia, 1978.
Blundell, Richard W., y Arthur Lewbel. «The information content of equivalence scales». *Journal of Econometrics* 50, 1-2 (octubre 1991): 49-68.
Bosch, Antoni. «Economies of scale, location, age, and sex discrimination in household demand». *European Economic Review* 35, 8 (diciembre 1990): 1589-1595.
Bosch, Antoni, Carlos Escribano y Isabel Sánchez. *Evolución de la Desigualdad y la Pobreza en España. Estudio basado en las Encuestas de Presupuestos Familiares 1973-74 y 1980-81.* Madrid: Instituto Nacional de Estadística, 1989.

Bossert, Walter, y Andreas Pfingsten. «Intermediate inequality: concepts, indices and welfare implications». *Mathematical Social Science* 19 (1990): 117-134.

Bottiroli Civardi, Marisa, y Enrica Martinetti Chiappero. «Family as economic unit in the analyses of income inequality and poverty». *Research on Economic Inequality* 6 (1995): 157-176.

Bourguignon, François. «Decomposable income inequality measures». *Econometrica* 47, 4 (julio 1979): 901-920.

Box, George E. P., y D. R. Cox. «An analysis of transformations». *Journal of the Royal Statistical Society*, Serie B, 26, 2 (1964): 211-243.

Browning, Martin, y Pierre-André Chiappori. «Efficient intra-household allocations: A general characterization and empirical tests.» *Econometrica* 66, 6 (noviembre 1998): 1241-1278.

Budd, John. «Changing food prices and rural welfare: A nonparametric examination of the Côte d'Ivoire». *Economic Development and Cultural Change* 41 (1993): 587-603.

Buhmann, Brigitte, Lee Rainwater, Günther Schmaus y Timothy Smeeding. «Equivalence scales, well-being, inequality, and poverty: sensitivity estimates across ten countries using the Luxembourg Income Study (LIS) database». *Review of Income and Wealth* 34 (1988): 115-142.

Bullen, Peter S. *Handbook of Means and Their Inequalities.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2003.

Canberra, Grupo de. *Final Report and Recommendations.* Ottawa: Expert Group on Household Income Statistics, The Canberra Group, 2001.

Chakravarty, Satya R. «Extended Gini indices of inequality». *International Economic Review* 29, 1 (febrero 1988): 147-156.

—. *Ethical Social Index Numbers.* Berlín: Springer-Verlag, 1990.

Chakravarty, Satya R., y Bhaskar Dutta. «Migration and welfare». *European Journal of Political Economy* 6, 1 (agosto 1990): 119-138.

Champernowne, David G. «The graduation of income distribution». *Econometrica* 20, 4 (octubre 1952): 591-615.

Champernowne, David, y Frank A. Cowell. *Economic inequality and Income Distribution.* Cambridge: Cambridge University Press, 1997.

Cheng, Yuk-Shing, y Sung-Ko Li. «Income inequality and efficiency: A decomposition approach and applications to China». *Economics Letters* 91 (2006): 8-14.

Chechi, Daniele, y Vitorocco Peragine. «Regional Disparities and Inequality of Opportunity: the case of Italy», Documento de Trabajo n.º 1874, Bonn: Institute for the Study of Labor (IZA), diciembre 2005.

Combes, Pierre-Philippe, y Henry G. Overman. «The spatial distribution of economic activities in the European Union». En *Handbook of Regional and Urban Economics.* Amsterdam: Elsevier Science Publishers B.V. North Holland, vol. 4, capítulo 64, 2004.

Coulter, Fiona A. E., Frank A. Cowell y Stephen P. Jenkins. «Equivalence scale relativities and the extent of inequality and poverty». *The Economic Journal* 102, 414 (septiembre 1992a): 1067-1082.

—. «Differences in needs and assessment of income distributions». *Bulletin of Economic Research* 44 (1992b): 77-124.

Cowell, Frank A. *Measuring Inequality.* 1.ª ed. Oxford: Phillip Allan, 1977.

—. «On the structure of additive inequality measures». *Review of Economic Studies* 47 (1980): 521-531.

—. «The structure of American income inequality». *Review of Income and Wealth* 30 (1984): 351-375.
—. «Poverty measures, inequality and decomposability». En D. Bos, M. Rose y C. Seid, eds. *Welfare and Efficiency in Welfare Economics.* Berlín: Springer-Verlag, 1988.
—. «Sampling variance and decomposable inequality measures». *Journal of Econometrics* 42, 1 (septiembre 1989): 27-41.
—. *Measuring Inequality.* 2.ª ed. LSE Handbooks in Economics Series, Harvester Wheatsheaf, Hemel Hempstead, 1995.
—. «Estimation of inequality indices». En Jacques Silber, ed. *Income Inequality Measurement: From Theory to Practice.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1999.
—. «Measurement of Inequality». En Anthony. B. Atkinson y François Bourguignon, eds. *Handbook of Income Distribution.* Amsterdam: Elsevier Science Publishers B.V. North Holland, vol. 1, 2000.
—. «Theil, inequality and the structure of income distribution». Documento de Trabajo DARP n.º 67, Londres: STICERD-London School of Economics, mayo 2003.
—. «Theil, inequality indices and decomposition». Documento de Trabajo WP 2005-01, Palma de Mallorca: ECINEQ, octubre 2005.
Cowell, Frank A., y Stephen P. Jenkins. «Estimating welfare indices: Household weights and sample design». Documento de Trabajo DARP n.º 48, Londres: STICERD-London School of Economics, junio 2000.
Cowell, Frank A., y Kiyoshi Kuga. «Additivity and the entropy concept: An axiomatic approach to inequality measurement». *Journal of Economic Theory* 25, 1 (agosto 1981a): 131-143.
—. «Inequality measurement. An axiomatic approach». *European Economic Review* 15, 3 (marzo 1981b): 287-305.
Cowell, Frank A. y Magda Mercader-Prats. «Equivalence scales and inequality». Documento de Trabajo DARP n.º 27, Londres: STICERD-London School of Economics, marzo 1999.
Cowell, Frank A. y Maria-Pia Victoria-Feser. «Statistical inference for Lorenz curves with censored data». Documento de Trabajo DARP n.º 35, Londres: STICERD-London School of Economics, junio 1998.
—. «Statistical inference for welfare under complete and incomplete information», Documento de Trabajo DARP n.º 47, Londres: STICERD-London School of Economics, diciembre 1999.
Cutler, David M., y Lawrence F. Katz. «Rising inequality? Changes in the distribution of income and consumption in the 1980s». *American Economic Review, Papers and Proceedings* 82, 2 (mayo 1992): 546-551.
Dagum, Camilo. «On the relationship between income inequality measures and social welfare functions». *Journal of Econometrics* 43, 1-2 (enero-febrero 1990): 91-102.
—. «The social welfare bases of Gini and other income inequality measures». *Statistica* 8 (1993): 3-30.
Dalton, Hugh. «The measurement of inequality of income». *The Economic Journal* 30 (1920): 348-361.
Danziger, Sheldon, y Michael K. Taussig. «The income unit and the anatomy of income distribution». *Review of Income and Wealth* 25 (1979): 365-375.
David, Herbert A. «Gini's mean difference rediscovered». *Biometrika* 55, 3 (noviembre 1968): 573-575.
Davidson, Russell, y Jean-Yves Duclos. «Statistical inference for the measurement of the incidence of taxes and transfers». *Econometrica* 65, 6 (noviembre 1997): 1453-1465.

—. «Statistical inference for stochastic dominance and for the measurement of poverty and inequality». *Econometrica* 68, 6 (noviembre 2000): 1435-1464.

DAVIES, James B., y Anthony F. SHORROCKS. «Assessing the quantitative importance of inheritance in the distribution of wealth». *Oxford Economic Papers* 30 (1978): 138-149.

DAS, T., y Ashok PARIKH. «Decomposition of inequality measures and a comparative analysis». *Empirical Economics* 7, 1 (diciembre 1982): 23-48.

DASGUPTA, Partha S., Amartya K. SEN y David A. STARRETT. «Notes on the measurement of inequality». *Journal of Economic Theory* 6, 2 (abril 1973): 180-187.

D'ASPREMONT, Claude. «Axioms for Social Welfare Orderings». En L. Hurwicz, D. Schmeidler y H. Sonnenschein, eds., *Social Goals and Social Organization. Essays in Memory of Elisha Pazner*, Cambridge: Cambridge University Press, 1985.

—. «Welfarism and Interpersonal Comparisons». *Investigaciones Económicas*, 18 (1994): 3-17.

D'ASPREMONT, Claude, y Louis GEVERS. «Equity and the informational basis of collective choice». *Review of Economic Studies* 44 (1977): 199-209.

DE LA RICA, Sara, y Arantza UGIDOS. «¿Son las diferencias en capital humano determinantes de las diferencias salariales observadas entre hombres y mujeres?» *Investigaciones Económicas* XIX, 3 (septiembre 1995): 395-414.

DEATON, Angus. *The Analysis of Household Surveys. A Microeconomic Approach to Development Policy*. Publicado para el Banco Mundial. Baltimore: The Johns Hopkins University Press, 1997.

—. «Inequalities in income and inequalities in health». Documento de Trabajo n.º 7141, Cambridge (MA): National Bureau of Economic Research, mayo 1999.

—. «Health, Inequality, and Economic Development». Commission on Macroeconomics and Health, CMH Documento de Trabajo n.º WG1: 3, revisado mayo, 2001.

—. «Global patterns of income and health: facts, interpretations, and policies». UNU-WIDER 10th Annual Lecture, Helsinki: United Nations University y World Institute for Development Economics Research, 2007. Disponible en Internet: http://www.wider.unu.edu/publications/annual-lectures/en_GB/AL10/.

DEATON, Angus, y John MUELLBAUER. *Economics and Consumer Behavior,* Cambridge: Cambridge University Press (1980): 193.

—. «On measuring child costs: with applications to poor countries». *Journal of Political Economy* 94, 5 (octubre 1986): 720-744.

DEATON, Angus, y Salman ZAIDI. «Guidelines for constructing consumption aggregates for welfare analysis». LSMS Documento de Trabajo n.º 135, Washington D.C.: Banco Mundial, 2002. Disponible en http://www.worldbank.org/lsms.

DEBREU, Gerard. «Representation of a preference ordering by a numerical function». En R. Thrall, C. Coombs y R. Davis, eds. *Decision Processes*, Nueva York: John Wiley & Sons, 1954.

—. *Theory of Value.* Nueva York: John Wiley & Sons, 1959.

DEL RÍO, Coral, y Javier RUIZ-CASTILLO. «Ordenaciones de bienestar e inferencia estadística. El caso de las EPF de 1980-81 y 1990-91». En *La Desigualdad de Recursos.* Segundo Simposio sobre la Distribución de la Renta y la Riqueza. Madrid: Fundación Argentaria, vol. VI, 1996.

—. «Intermediate inequality and welfare». *Social Choice and Welfare* 17, 2 (2000): 223-239.

DEPARTMENT OF SOCIAL SECURITY. *Households Below Average Income: A Statistical Analysis, 1979-1988/89.* Londres: Government Statistical Service, 1992.

DIEWERT, W. Erwin, y Alice O. NAKAMURA. *Essays in Index Number Theory*. Amsterdam: Elsevier Science Publishers B.V. North Holland, 1993.

DONALDSON, David, y John A. WEYMARK. «A single parameter generalization of the Gini indices of inequality». *Journal of Economic Theory* 22 (1980): 67-68.

—. «Ethically flexible Gini indices for income distribution in the continuum». *Journal of Economic Theory* 29, 4 (1983): 353-358.

DOROFEEV, Sergey, y Peter GRANT. *Statistics for Real-Life Sample Surveys. Non-Simple-Random Samples and Weighted Data*. Cambridge: Cambridge University Press, 2006.

DUCLOS, Jean-Yves. «Progressivity, redistribution and equity, with application to the British tax and benefit system». *Public Finance/Finances Publiques* 48 (1993) 350-365.

DUCLOS, Jean-Yves, y Abdelkrim ARAAR. *Poverty and Equity: Measurement, Policy and Estimation with DAD*. Boston, Dordrecht y Londres: Kluwer Academic Publishers, 2006.

DUCLOS, Jean-Yves, Abdelkrim ARAAR y Carl FORTIN. *Manual del DAD 4.4*. DAD: MIMAP Programme, International Development Research Centre, Gobierno de Canadá y CIRPÉE, Universidad de Laval, 2004. Disponible en Internet en http://132.203.59.36/DAD/index.html.

DUTTA, Bhaskar, y Joan M. ESTEBAN. «Social welfare and equality». *Social Choice and Welfare* 9 (1992): 267-276.

DURO, Juan Antonio, y Joan M. ESTEBAN. «Factor decomposition of cross-country income inequality, 1960-1990». *Economics Letters* 60 (1998): 269-275.

EBERT, Udo. «Income inequality and differences in household size», *Mathematical Social Sciences* 30, 1 (agosto 1995): 37-53.

—. «Social welfare when needs differ: An axiomatic approach». *Economica* 64, 254 (mayo 1997): 233-244.

—. «Using equivalent income of equivalent adults to rank income distributions when household types are different». *Social Choice and Welfare* 16, 2 (febrero 1999): 233-258.

EBERT, Udo, y Patrick MOYES. «Equivalence scales reconsidered». *Econometrica* 71, 1 (enero 2003): 319-343.

ÉLTETÖ, Ö., y E. FRIGYES. «New income inequality measures as efficient tools for causal analysis and planning». *Econometrica* 36, 2 (abril 1968): 383-396.

ENGEL, Ernst. «Die Lebenskosten Belgischer Arbeiter-Familien früher und jetzt». *International Statistical Institute Bulletin* 9 (1857): 1-74.

ESTEBAN, Joan M. «Social welfare functions and inequality measures». Documento de Trabajo, 12-76, Barcelona: Universidad Autónoma de Barcelona, 1976.

—. «La desigualdad interregional en Europa y en España: Descripción y análisis». En Joan M. Esteban y Xavier Vives, eds. *Crecimiento y Convergencia Regional en España y en Europa*. Barcelona: Instituto de Análisis Económico, vol. 2, 1994.

ESTEBAN, Joan M., y Debraj RAY. «On the Measurement of Polarization». *Econometrica,* 62 (1994): 819-851.

FEI, John C. H., Gustav RANIS y Shirley W. Y. KUO, «Growth and the family distribution of income by factor components». *Quarterly Journal of Economics* 92 (1978): 17-53.

FIELDS, Gary S. «Income inequality in urban Colombia: A decomposition analysis». *Review of Income and Wealth* 25 (1979): 327-341.

FIELDS, Gary S., y John C. H. FEI. «On inequality comparisons». *Econometrica* 46 (1978): 303-316.

FISHBURN, Peter C. «Dominance in SSB utility theory». *Journal of Economic Theory* 34, 1 (octubre 1984): 130-148.

Fleurbaey, Marc. *Théories Economiques de la Justice*, París: Economica, 1996.

Fleurbaey, Marc, y François Maniquet. «Compensation and Responsibility». En Kenneth Arrow, Amartya Sen y Kotaro Suzumura, eds., *Handbook of Social Choice and Welfare*. Amsterdam: North-Holland, vol. 2, 2001.

Foster, James E. «An axiomatic characterization of the Theil measure of income inequality». *Journal of Economic Theory* 31, 1 (octubre 1983): 105-121.

—. «Inequality Measurement». En H. P. Young, ed. *Fair Allocation,* American Mathematical Society Proceedings of Applied Mathematics, vol. 33, 1985.

Foster, James E., Luis F. López-Calva y Miguel Székely. «Measuring the distribution of human development: Methodology and an application to Mexico». *Estudios Sobre el Desarrollo Humano*, México: PNUD, n.º 4, 2003.

Foster, James E., y Efe A. Ok. «Lorenz dominance and the variance of logarithms». *Econometrica* 67, 4 (julio 1999): 901-907.

Foster, James E., y Artyom A. Shneyerov. «A general class of additively decomposable inequality measures». *Economic Theory* 14 (1999): 89-111.

—. «Path independent inequality measures». *Journal of Economic Theory* 91 (2000): 199-222.

Foster, James E., y Anthony F. Shorrocks. «Poverty orderings». *Econometrica* 56, 1 (enero 1988a): 173-177.

—. «Poverty orderings and welfare dominance». *Social Choice and Welfare* 5 (1988b): 171-198.

Fuchs, Victor. «A note on sex segregation in professional occupations». *Explorations in Economic Research* 2, 1 (invierno 1975): 105-111.

García España, Eduardo. *Diseño de la Encuesta General de Población. Ministerio de Planificación del Desarrollo*. Madrid: Instituto Nacional de Estadística, 1974.

García Pérez, Ignacio J., y Antonio Villar. «Discrimination and equality of opportunity». Mimeo, Universidad Pablo Olavide, 2006.

Gastwirth, Joseph L. «A general definition of the Lorenz curve». *Econometrica* 39, 6 (noviembre 1971): 1037-1039.

Gini, Corrado. «Variabilità e mutabilità, contributo allo studio delle distribuzioni e relazioni statistiche». *Studi Economico-Giuridici dell' Universiti di Cagliari* 3, part 2, (1912): 1-158.

—. «Measurement of inequality of incomes». *The Economic Journal* 31 (1921): 124-126.

—. *Cowles Commission Research Conference on Economic and Statistics*. General Series n.º 28, Colorado Springs: Colorado College Publication,1936.

Giorgi, Giovanni M. «Bibliographic portrait of the Gini concentration ratio», *Metron* 48, 1-4 (1990): 183-221.

—. «A fresh look at the topical interest of the Gini concentration ratio». *Metron* 51, 1-2 (1993): 83-98.

Glewwe, Paul William. «Household equivalence scales and the measurement of inequality: Transfers from the poor to the rich could decrease inequality». *Journal of Public Economics* 44, 2 (marzo 1991): 211-216.

Goerlich, Francisco J. «Desigualdad, Diversidad y Convergencia: (Algunos) Instrumentos de Medida». Monografía 1998-01, Valencia: Instituto Valenciano de Investigaciones Económicas, diciembre 1998. Disponible en http://www.ivie.es.

—. «Desigualdad, Diversidad y Convergencia: (Más) Instrumentos de Medida –Estadística Descriptiva–». Monografía 2000-01, Valencia: Instituto Valenciano de Investigaciones Económicas, abril 2000. Disponible en http://www.ivie.es.

—. «On factor decomposition of cross-country income inequality: Some extensions and qualifications», *Economics Letters*, 70 (2001): 303-309.

—. «La encuesta continua de presupuestos familiares (base 1997) y la distribución de la renta (¿Cuánta desigualdad sufrimos?)». Documento de Trabajo WP-EC 2007-07, Valencia: Instituto Valenciano de Investigaciones Económicas, 2007.

Goerlich, Francisco J., y Matilde Mas. «Inequality in Spain 1973-1991: Contribution to a Regional Database». *The Review of Income and Wealth*, Series 47, 3, (septiembre 2001a): 361-378.

—. *La Evolución Económica de las Provincias Españolas (1955-1998)*. Vol. 1, *Capitalización y Crecimiento*. Vol. 2, *Desigualdad y Convergencia*. Bilbao: Fundación BBVA, 2001b.

—. «Intertemporal and interprovincial variations in income inequality: Spain 1973-1991». *Regional Studies*, 36, 9 (diciembre 2002): 1005-2002.

—. «Distribución personal de la renta en España. 1973-2001», *Papeles de Economía Española* 100, 1, (2004a): 50-58.

—. «Theree (marginal?) questions regarding convergence». *Journal of Economic Studies*, 31, 1 (2004b): 25-38.

Goerlich, Francisco J., Matilde Mas, Joaquín Azagra y Pilar Chorén. *La Localización de la Población Española sobre el Territorio. Un Siglo de Cambios. Un Estudio Basado en Series Homogéneas (1900-2001)*. Bilbao: Fundación BBVA, 2006.

Goerlich, Francisco J., Matilde Mas y Francisco Pérez. «Concentración, convergencia y desigualdad regional en España». *Papeles de Economía Española*, 93 (2002): 17-36.

Goldie, Charles M. «Convergence theorems for empirical Lorenz curves and their inverses». *Advances in Applied Probability* 9, 4 (diciembre 1977): 765-791.

Goodman, Alissa, Paul Johnson y Steven Webb. *Inequality in the U.K.* Oxford: Oxford University Press, 1989.

Haddad, Lawrence, y Ravi Kanbur. «How serious is the neglect of intrahousehold inequality?». *The Economic Journal* 100, 402 (septiembre 1990): 866-881.

Hagenaars, Aldi J. M., Klaas De Vos y M. Asghar Zaidi, *Poverty Statistics in the Late 1980s: Research Based on Micro-data*. Luxemburgo: Oficina de Publicaciones Oficiales de las Comunidades Europeas, 1994.

Hammond, Peter J. «A note on extreme inequality aversion». *Journal of Economic Theory* 11 (1975): 465-467.

—. «Equity, Arrow's conditions, and Rawls' difference principle». *Econometrica* 44, 4 (julio 1976): 793-804.

Hamilton, James D. *Time Series Analysis*. Princeton: Princeton University Press, 1994.

Hardy, Godfrey Harold, John Edensor Littelwood y George Pólya. *Inequalities*. 1.ª ed. Cambridge: Cambridge University Press [2.ª ed., 1952] 1934.

Harsanyi, John C. «Cardinal utility in welfare economics and in the theory of risk-taking». *Journal of Political Economy* 61 (1953): 434-435.

—. «Cardinal welfare, individualistic ethics and interpersonal comparisons of utility». *Journal of Political Economy* 63 (1955): 309-321.

Hausman, Jerry A. «Exact consumer surplus and deadweight loss». *American Economic Review* 71 (1981): 662-676.

Hausman, Jerry A., y Whitney Newey. «Nonparametric estimation of exact consumers' surplus and deadweight loss». *Econometrica* 63, 6 (noviembre 1995): 1445-1476.

Helmert, Friedrich R. «Die Genauigkeit der Formel von Peters zur Berechnung des wahrscheinlichen Beobachtungsfehlers direkter Beobachtungen gleicher Genauigkeit». *Astronomische Nachrichten* 88, n.º 2096, 1876.

Hentschel, Jesko, y Peter Lanjouw. «Constructing an indicator of consumption for the analysis of poverty: Principles and illustrations with reference to Ecuador». Documento de Trabajo 124, Living Standards Measurement Study (LSMS), Washington: Banco Mundial 1996.

Hernández Martínez, Pedro Jesús. «Análisis empírico de la discriminación salarial de la mujer en España.» *Investigaciones Económicas* xix, 2 (mayo 1995): 195-215.

Herrero, Carmen. «Teorías de la utilidad esperada: Una interpretación en términos de bienestar social». *Investigaciones Económicas* 11, 3 (septiembre 1987): 375-398.

Herrero, Carmen, y Antonio Villar. «Comparaciones de renta real y evaluación del bienestar». *Revista de Economía Pública* 2 (1989): 79-101.

Herrero, Carmen, Ángel Soler y Antonio Villar. *Capital Humano y Desarrollo Humano en España, sus Comunidades Autónomas y Provincias. 1980-2000*, Valencia: Fundación Bancaja, 2004.

Hicks, Douglas A. «The inequality-adjusted Human Development Index: A constructive proposal». *World Development* 25 (1997): 1283-1298.

Hogan, Warren P. «Technical progress and production function». *The Review of Economics and Statistics* 40 (1958): 407-411.

Hotelling, Harold, y Leonard M. Solomons. «The limits of a measure of skewness». *The Annals of Mathematical Statistics* 3 (1932): 141-142.

Howes, Stephen, y Jean Olson Lanjouw. «Does sample design matter for poverty rate comparisons?». *Review of Income and Wealth* 44, 1 (marzo 1997): 99-109.

Imedio Olmedo, Luis José, y Elena Bárcena Martín. «Dos familias numerables de medidas de desigualdad». *Investigaciones Económicas* 31, 1 (enero 2007): 191-217.

INE. *Encuesta de Presupuestos Familiares 1973-1974 Metodología y Resultados.* Madrid: Instituto Nacional de Estadística, 1975.

—. *Encuesta de Presupuestos Familiares 1980-1981.* Madrid: Instituto Nacional de Estadística, 1983.

—. *Encuesta de Presupuestos Familiares. 1990/91. Metodología.* Madrid: Instituto Nacional de Estadística, 1992.

—. *Encuesta de Estructura Salarial 1995. Metodología.* Madrid: Instituto Nacional de Estadística, 1995. Disponible en http://www.ine.es.

—. *Encuesta Continua de Presupuestos Familiares. Base 1997. Ficheros Trimestrales de Usuarios.* Madrid: Instituto Nacional de Estadística, 1997a. Disponible en http://www.ine.es.

—. *Encuesta Continua de Presupuestos Familiares. Base 1997. Metodología.* Madrid: Instituto Nacional de Estadística, 1997b. Disponible en http://www.ine.es.

—. *Encuesta Continua de Presupuestos Familiares. Base 1997. Ficheros Longitudinales de Usuarios 2002. Características Anuales de los Hogares.* Madrid: Instituto Nacional de Estadística, 2002. Disponible en http://www.ine.es.

—. *Encuesta de Estructura Salarial 2002. Metodología.* Madrid: Instituto Nacional de Estadística, Noviembre 2004a. Disponible en http://www.ine.es.

—. *Encuesta de Estructura Salarial 2002. Principales Resultados.* Madrid: Instituto Nacional de Estadística, 2004b. Disponible en http://www.ine.es.

Iritani, Jun, y Kiyoshi Kuga. «Duality between the Lorenz curves and the income distribution functions». *Economic Studies Quarterly* 34, 4 (1983): 9-21.

Jenkins, Stephen P. «Income inequality and living standards: Changes in the 1970s and 1980s». *Fiscal Studies* 12, 1 (1991): 1-28.

—. «Trends in real income in Britain: A microeconomic analysis». *Empirical Economics* 22, 4 (1997): 483-500.

Jenkins, Stephen P., y Frank A. Cowell. «Parametric equivalence scales and scale relativities». *The Economic Journal* 104, 425 (julio 1994): 891-900.

Jenkins, Stephen P., y Peter J. Lambert. «Ranking income distributions when needs differ». *Review of Income and Wealth* 39 (1993): 337-356.

Kakwani, Nanak. «Measurement of tax progresivity: An international comparison». *The Economic Journal* 87, 345 (marzo 1977): 71-80.

—. *Income Inequality and Poverty. Methods of Estimation and Policy Application.* Oxford: Oxford University Press, 1980a.

—. «On a class of poverty measures». *Econometrica* 48, 2 (marzo 1980b): 437-446.

—. «Welfare ranking of income distributions». *Advances in Econometrics* 3 (1984): 191-213.

Kanbur, Ravi. «The measurement and decomposition of inequality and poverty». En F. van der Ploeg, ed., *Mathematical Methods in Economics.* Nueva York: John Wiley & Sons, 1984.

Kendall, Maurice, y Alan Stuart. *The Advanced Theory of Statistics. Volume 1: Distribution Theory*, 4.ª ed., Londres: Charles Griffin & Company Limited, 1977.

Kennedy, Bruce P., Ichiro Kawachi y Deborah Prothrow-Stith. «Income distribution and mortality: Cross-sectional ecological study of the Robin-Hood index in the United States». *British Medical Journal* 312 (1996a): 1004-1007.

—. «Important correction». *British Medical Journal* 312 (1996b): 1194.

Khinchin, Alexander. *Mathematical Formulations of Information Theory*. Nueva York: Dover Publications,1957.

Kish, Leslie. *Survey Sampling.* Nueva York: John Wiley and Sons, 1965.

Kolm, Serge-Christophe. «The optimal production of social justice». En J. Margolis y H. Guitton, eds. *Public Economics.* Londres: Macmillan, (1969): 145-200.

—. «Unequal inequalities i». *Journal of Economic Theory* 12 (1976a): 416-442.

—. «Unequal inequalities ii». *Journal of Economic Theory* 13 (1976b): 82-111.

—. «The Rational Foundations of Income Inequality Measurement». En J. Silber, ed. *Handbook of Income Inequality Measurement*, Londres: Kluwer Academic Publishers, 1999.

Kondor, Yaakov. «Value judgements implied by the use of various measures of income inequality». *The Review of Income and Wealth* 21 (1975): 309-321.

Konüs, Alexander A. «The problem of the true index of the cost of living». *Econometrica* 7, 1 (enero 1939): 10-29. [Original en escrito en ruso y publicado en 1924 en *The Economic Bulletin of the Institute of Economic Conjuncture* 9-10, Moscú (septiembre-octubre): 64-71].

Kullback, Solomon. *Information Theory and Statistics.* Nueva York: John Wiley & Sons, 1959.

Lam, David. «The dynamics of population growth, differential fertility, and inequality». *American Economic Review* 76 (1986): 1103-1116.

—. «Lorenz curves and inequality comparisons under changing population composition». *Journal of Policy Modelling* 10 (1988): 141-162.

Lambert, Peter J. *The Distribution and Redistribution of Income.* 2.ª ed. Manchester: Manchester University Press, 1993. [1.ª ed., 1989; edición en castellano de la segunda edición del Instituto de Estudios Fiscales, 1996].

Lambert, Peter J., y J. Richard Aronson. «Inequality decomposition analysis and the Gini coefficient revisited». *The Economic Journal* 103, 420 (septiembre 1993): 1221-1227.

Lasso de la Vega, María Casilda, y Ana M. Urrutia. «A new factorial decomposition for the Atkinson measure». *Economics Bulletin* 4, 29 (2003): 1-12.

—. «The class of multiplicative decomposable inequality measures: An axiomatic characterisation of the Atkinson measures». Presentado en la conferencia «Economic Inequality», ECINEQ, Palma de Mallorca (julio 2005a): 20-22.

—. «Path independent multiplicatively decomposable inequality measures». *Investigaciones Económicas* xxix, 2 (2005b): 379-387.

Le Grand, Julian. «Inequalities in health: Some international comparisons». *European Economic Review* 31, 1-2 (febrero-marzo 1987): 182-191.

Lerman, Robert I., y Shlomo Yitzhaki. «Income inequality effects by income source: A new approach and applications to the U.S.». *The Review of Economics and Statistics* 67 (1985): 151-156.

—. «Changing ranks and the inequality impacts of taxes and transfers». *National Tax Journal*. 48 (1995): 45-59.

Levy, Paul S., y Stanley Lemeshow. *Sampling of Populations: Methods and Applications*. Nueva York: John Wiley and Sons, 1991.

Lewbel, Arthur. «Household equivalence scales and welfare comparisons». *Journal of Public Economics* 39, 3 (agosto 1989): 377-391.

—. «Household equivalence scales and welfare comparisons: Reply». *Journal of Public Economics* 50, 1 (enero 1993): 147-148.

Lorenz, Max O. «Methods of measuring the concentration of wealth». *Publications of the American Statistical Association* 9 (1905): 209-219.

Love, Roger, y Michael C. Wolfson. *Income Inequality: Statistical Methodology and Canadian Illustrations*. Ottawa: Statistics Canada, 1976.

Maasoumi, Esfandiar. «The measurement and decomposition of multi-dimensional inequality». *Econometrica* 54, 4 (julio 1986): 991-997.

—. «Continuously distributed attributes and measures of multivariate inequality». *Journal of Econometrics* 42 (1989): 131-144.

Magnus, Jan R., y Heinz Neudecker. *Matrix Differential Calculus. With Applications in Statistics and Econometrics*. Nueva York: John Wiley & Sons, 1988.

Martín-Guzmán, Mª Pilar, Mª Isabel Toledo, Nicolás Bellido, Javier López Ortega, y Dolores Jano. *Encuesta de Presupuestos Familiares. Desigualdad y Pobreza en España. Estudio Basado en las Encuestas de Presupuestos Familiares de 1973-74, 1980-81 y 1990-91*. Madrid: Instituto Nacional de Estadística y Universidad Autónoma de Madrid, 1996.

McClements, Leslie D. «Equivalence scales for children». *Journal of Public Economics* 8, 2 (octubre 1977): 191-210.

—. *The Economics of Social Security*. Londres: Heinemann, 1978.

Mehran, Farhad. «Linear measures of income inequality». *Econometrica* 44, 4 (julio 1976): 805-809.

Milanovic, Branko. «The Gini-type functions: An alternative derivation». *Bulletin of Economic Research* 46 (1994): 81-90.

—. «A simple way to calculate the Gini coefficient, and some implications». *Economics Letters* 56 (1997): 45-49.

—. «True world income distribution, 1988 and 1993: First calculations based on household surveys alone». *The Economic Journal* 112 (enero 2002): 51-92.

—. *Worlds Apart: Measuring International and Global Inequality*. Princeton: Princeton University Press, 2005.

MOOD, Alexander M., Franklin A. GRAYBILL y Duane C. BOES. *Introductions to the Theory of Statistics.* 3.ª ed., International Student Edition, Singapore: McGraw-Hill International Book Company, 1974.

MOOKHERJEE, Dilip, y Alexander F. SHORROCKS. «A decomposition analysis of the trend in U.K. income inequality». *The Economic Journal* 92 (1982): 886-902.

MORA, Ricardo, y Javier RUIZ-CASTILLO. «Gender segregation: From birth to occupation». Documento de Trabajo 03-36, Economic Series 12, Madrid: Departamento de Economía, Universidad Carlos III de Madrid, noviembre 2003a.

—. «Additively decomposable segregation indexes. The case of gender segregation by occupations and human capital levels in Spain». *Journal of Economic Inequality* 1, 2 (agosto 2003b): 147-179.

—. «Gender segregation by occupations in the public and the private sector. The case of Spain.» *Investigaciones Económicas* XXVIII, 3 (enero 2004): 339-428.

—. «The axiomatic properties of an entropy based index of segregation». Documento de Trabajo 05-62, Economic Series 31, Madrid: Departamento de Economía, Universidad Carlos III de Madrid (noviembre 2005).

MOYES, Patrick. «A new concept of Lorenz dominance». *Economics Letters* 23 (1987): 203-207.

MUELLBAUER, John. «Household composition, Engel curves and welfare comparisons between households: A duality approach». *European Economic Review* 5, 2 (agosto 1974): 103-122.

NACIONES UNIDAS. *Provisional Guidelines on Statistics of the Distribution of Income. Consumption and Accumulation of Households.* Study M 61. Nueva York: Naciones Unidas, 1977.

NAPOLEONI, Claudio. *Smith, Ricardo, Marx.* Oxford: Blackwell, 1975. (Traducción de *Smith, Ricardo, Marx*, 2.ª ed., Turín: Boringhieri, 1973).

NARDO, Michaela, Michaela SAISANA, Andrea SALTELLI, Stefano TARANTOLA, Anders HOFFMAN y Enrico GIOVANNINI. *Handbook on Constructing Composite Indicators. Methodology and User Guide.* Documento de Trabajo STD/DOC(2005)3, OECD Statistics, París: Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico, agosto 2005.

NELSON, Julie A. «Household economies of scale in consumption: Theory and evidence». *Econometrica* 56, 6 (noviembre 1988): 1301-1314.

NYGÅRD, Fredrik, y Arne SANDSTRÖM. *Measuring Income Inequality.* Estocolmo: Almquist Wicksell International, 1981.

OCDE. *The OECD List of Social Indicators.* París: Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico, 1982.

OK, Efe A. «Fuzzy measurement of income inequality: A class of fuzzy inequality measures». *Social Choice and Welfare* 12, 2 (1995): 111-136.

—. «Fuzzy measurement of income inequality: Some possibility results on the fuzzification of the Lorenz ordering». *Economic Theory* 7, 3 (1996): 513-530.

OKUN, Arthur. M. *Equality and Efficiency: The Big Trade-off.* Washington: Brooking Institute, 1975.

OLIVER-ALONSO, Josep, Xavier RAMOS y José Luis RAYMOND-BARA. «Recent trends in Spanish income distribution: A robust picture of falling income inequality». Documento de Trabajo n.º 166, Madrid: Fundación de las Cajas de Ahorro Confederadas para la Investigación Económica y Social, 2001.

OSBERG, Lars. «The measurement of economic welfare». En David Laidler, coord. *Approaches to Economic Well-Being*, The Royal Commission on the Economic Union and Development Prospects for Canada (MacDonald Commission), Toronto: University of Toronto Press, vol. 26, 1985.

Osberg, Lars, y Andrew Sharpe. «The index of economic well-being: An overview». Ponencia presentada en «National Conference on Sustainable Development Indicators» organizado por National Round Table on the Environment and the Economy, Ottawa: Centre for the Study of Living Standards, 27 de marzo de 2001. Disponible en: http://www.csls.ca.

—. «An index of economic well-being for selected OECD countries». *Review of Income and Wealth* 48, 3 (septiembre 2002): 291-316.

Osmani, Siddiq R. *Economic Inequality and Group Welfare*. Oxford: Clarendon Press, 1982.

Palmer, John, Timothy Smeeding y Christopher Jencks. «The uses and limits of income comparisons». En J. Palmer; T. Smeeding y B. B. Torrey, eds., *The Vulnerable*. Washington D. C.: Urban Institute Press (1988): 9-27.

Paglin, Morton. «The measurement and trend of inequality: A basic revision». *American Economic Review* 65 (1975): 598-690.

Parfit, Derek. *Reasons and Persons*. Oxford: Oxford University Press, 1984.

Pastor, José M., Empar Pons y Lorenzo Serrano. «Desigualdad regional en España: Renta permanente *versus* renta corriente». Documento de Trabajo n.º 254/2006, Madrid: Fundación de las Cajas de Ahorro, marzo 2006.

Peragine, Vitorocco. «Opportunity, Responsibility and the Ranking of Income Distributions». Documento de Trabajo 00-03, Madrid: Universidad Carlos III , 2000.

—. «Opportunity Egalitarianism and Income Inequality». *Mathematical Social Sciences* 44 (2002): 45-64.

Pen, Jan. *Income Distribution*. Harmondsworth: Allen Lane, 1971.

Peña, Daniel, y Javier Ruiz-Castillo. «The estimation of food expenditures from household budget data in the Presence of Bulk Purchases». *Journal of Business and Economic Statistics* 16, 3 (julio 1998): 292-303.

Pfingsten, Andreas. «Distributionally-neutral tax changes for different inequality concepts». *Journal of Public Economics* 30 (1986): 385-393.

Philipson, Tomas, y Rodrigo R. Soares. «Human Capital, Longevity and Economic Growth: A Quantitative Assessment of Full Income Measures». Manuscrito inédito, University of Chicago, 2001.

Pigou, Arthur Cecil. *The Economics of Welfare*. Londres: Transaction Publishers, 1912. [4.ª ed., Nueva York: MacMillan, 1952].

Pinilla, Rafael, y Francisco J. Goerlich. «Renta per cápita y potencial de calidad de vida (*QLP*) en España (1981-1999)». *Investigaciones Regionales* 4 (2004): 53-74.

Plotnick, Robert. «A measure of horizontal inequity». *Review of Economics and Statistics* 63, 1 (febrero 1981): 283-288.

—. «The concept and measurement of horizontal inequity». *Journal of Public Economics* 17 (1982): 373-391.

Pollak, Robert A., y Terence Wales. «Welfare comparisons and equivalent scales». *American Economic Review, papers and proceedings* 69 (1979): 216-221.

Pratt, John W. «Risk aversion in the small and large». *Econometrica* 32, 1-2 (enero-abril 1964): 122-136.

Pyatt, Graham. «The interpretation and disaggregation of Gini coefficients». *The Economic Journal* 86 (1976): 243-255.

—. «An axiomatic approach to the Gini coefficient and the measurement of welfare». En R. L. Basman y G. F. Rhodes, Jr., eds. *Advances in Econometrics*, Greenwich, Connecticut: JAI Press, vol. 4, (1985): 87-109.

—. «Social evaluation criteria». En C. Dagum y M. Zenga, eds. *Income and Wealth Distribution, Inequality and Poverty*. Berlín: Springer-Verlag (1990): 243-253.

Pyatt, Graham, Chau-Nan Chen y John Fei. «The distribution of income by factor components». *Quarterly Journal of Economics* 95 (1980): 451-473.

Quirk, James D. y Rubin Saposnik. «Admissibility and measurable utility functions». *Review of Economic Studies* 29 (1962): 140-146.

Rabadan, Isabel, y Rafael Salas. «Convergencia y redistribución intertemporal en España: Efecto de los impuestos directos, cotizaciones sociales y transferencias». *Economía Pública*, Bilbao: Fundación BBV, septiembre 1996.

Rawls, John. *A Theory of Justice*. Oxford: Oxford University Press, 1971.

Rao, V. M. «Two decompositions of the concentration ratio». *Journal of the Royal Statistical Society, Series A (General)* 132, 3 (1969): 418-425.

Raymond Bara, José Luis. «Convergencia real de las regiones españolas y capital humano». *Papeles de Economía Española* 93 (2002): 109-121.

Real Academia Española. *Diccionario de la Lengua Española*. 22.ª ed., Madrid: Editorial Espasa Calpe, S. A., 2001. Disponible en http://www.rae.es/.

Rietveld, Piet. «Multidimensional inequality comparisons». *Economics Letters* 32 (1990): 187-192.

Roemer, John E. «A Pragmatic Theory of Responsibility for the Egalitarian Planner». *Philosophy and Public Affairs* 22 (1993): 146-166.

—. *Theories of Distributive Justice*, Cambridge: Massachusetts Harvard University Press, 1996.

—. *Equality of Opportunity*, Cambridge: Massachusetts Harvard University Press, 1998.

Rothschild, Michael, y Joseph E. Stiglitz. «Increasing risk I: A definition». *Journal of Economic Theory* 2, 3 (septiembre 1970): 225-243.

—. «Some further results on the measurement of inequality». *Journal of Economic Theory* 6, 2 (abril 1973): 188-203.

Ruiz-Castillo, Javier. «La medición de la pobreza y la desigualdad en España». *Estudios Económicos* n.º 42, Madrid: Banco de España 1987.

—. «La distribución del gasto en España de 1973-74 a 1980-81». En J. Almunia y L. Gutiérrez, eds., *La Distribución de la Renta*. Primer Simposio sobre Igualdad y Distribución de la Renta y la Riqueza. Madrid: Fundación Argentaria, vol. II, 1993.

—. «The evolution of the standard of living in Spain, 1973-74 to 1980-81». Documento de Trabajo 94-10, Economic Series 04, Madrid: Universidad Carlos III, 1994.

—. «Income distribution and social welfare: A review essay». *Investigaciones Económicas* 19 (1995a): 3-34.

—. «The Anatomy of Money and Real Income Inequality in Spain, 1973-74 to 1980-81». *Journal of Income Distribution* 4 (1995b): 265-281.

—. «A Simplified Model for Social Welfare Analysis. An Application to Spain, 1973-74 to 1980-81». *Review of Income and Wealth* 44, 1 (marzo 1998): 123-141.

—. «La comparación de distribuciones de renta en un contexto dinámico». En J. M. Maravall Herrero, ed. *Dimensiones de la desigualdad*, III Simposio sobre Igualdad y Distribución de la Renta y la Riqueza. Madrid: Fundación Argentaria-Visor, vol. I (febrero 1999): 325-344.

—. «The Measurement of Inequality of Opportunities». En Bishop, J. y Y. Amiel, eds., *Research in Economic Inequality* 9 (2003): 1-34.
—. «La Medición de la Desigualdad de la Renta: Una Revisión de la Literatura». Documento de Trabajo 07-02, Serie de Economía 01, Madrid: Departamento de Economía, Universidad Carlos III, febrero 2007.
Ruiz-Castillo, Javier, Eduardo Ley y Mario Izquierdo. *La Medición de la Inflación en España*. Colección de Estudios e Informes, n.º 17, Barcelona: Servicio de Estudios de «la Caixa», 1999a. Disponible en http://www.lacaixa.comunicacions.com/se.
—. «Índices de precios para las EPF de 1980-81 y 1990-91 con base en 1983 y 1992». Mimeo. Madrid: Departamento de Economía, Universidad Carlos III, 1999b. Disponible en http://www.eco.uc3m.es/investigacion/epf_ipc.html.
Ruiz-Castillo, Javier, y Mercedes Sastre García. «Desigualdad y bienestar en España en términos reales: 1973-74, 1980-81 y 1990-91». En J. M. Maravall Herrero, ed. *Dimensiones de la desigualdad*, III Simposio sobre Igualdad y Distribución de la Renta y la Riqueza, Madrid: Fundación Argentaria/Visor, vol. i (1999): 345-366.
Saunders, Trevor J., trad. y ed. *Plato: The laws*, Harmondsworth: Penguin, 1970.
Salas, Rafael. «Welfare-consistent inequality indices in changing populations: The marginal population replication axiom. A note». *Journal of Public Economics* 67, 1 (enero 1998): 145-150.
Saposnik, Rubin. «Rank dominance in income distribution». *Public Choice* 36 (1981): 147-151.
—. «On evaluating income distributions: Rank dominance». *Public Choice* 40 (1983): 329-336.
Sastre García, Mercedes. *Los ingresos y los gastos en las Encuestas de Presupuestos Familiares: Ensayos sobre desigualdad y bienestar*. Tesis doctoral inédita, Madrid: Universidad Complutense de Madrid, 1999. Disponible en http://www.ucm.es/eprints/3636/.
Savaglio, Ernesto. «Multidimensional Inequality with Variable Population Size». *Economic Theory* 28, 1 (mayo 2006): 85-94.
Schmeidler, David. «A condition for the completeness of partial preference relations», *Econometrica* 39, 2 (marzo 1971): 403-404.
Schutz, Robert R. «On the measurement of income inequality». *American Economic Review* 41 (marzo 1951): 107-122.
Sen, Amartya K. «The nature and classes of prescriptive judgements», *Philosophical Quarterly* 17 (1967): 46-62.
—. *On Economic Inequality*. 1.ª ed., Oxford: Clarendon Press, 1973.
—. «Poverty: An ordinal approach to measurement». *Econometrica* 44, 2 (marzo 1976a): 219-231.
—. «Real national income». *Review of Economic Studies* 43, 1 (febrero 1976b): 19-39.
—. «Ethical Measurement of Inequality: Some Difficulties». En W. Krelle y A.A. Shorrocks, eds. *Personal Income Distribution*, Amsterdam: North-Holland, 1978.
—. «Equality of what?». En S. McMurrin, ed. *Tanner Lectures on Human Values*. Cambridge: Cambridge University Press, 1980.
—. *Commodities and Capabilities*. Amsterdam: North-Holland, 1985.
—. *Inequality Reexamined*. Oxford: Oxford University Press, 1992.
Sen, Amartya K., y James E. Foster. *On Economic Inequality*. 2.ª ed., Oxford: Clarendon Press, 1997. [Edición en castellano del Fondo de Cultura Económica, México, 2001].

SHKOLNIKOV, Vladimir M., Evgueni M. ANDREEV y Alexander Z. BEGUN. «Gini coefficient as a life table function: Computation from discrete data, decomposition of differences and empirical examples». *Demographic Research* 8, 11 (junio 2003): 305-358.

SHORROCKS, Anthony F. «The class of additively decomposable inequality measures». *Econometrica* 48, 3 (abril 1980): 613-626.

—. «Inequality decomposition by factor components». *Econometrica* 50, 1 (enero 1982): 193-212.

—. «Ranking income distributions». *Economica* 50, 3 (1983): 3-17.

—. «Inequality decomposition by population subgroups». *Econometrica* 52, 6 (noviembre 1984): 1369-1386.

—. «Aggregation issues in inequality measurement». En W. Eichhorn, ed. *Measurement in Economics,* Heidelberg: Physica-Verlag, 1988.

—. «Decomposition procedures for distributional analysis: A unified framework based on the Shapely value». Mimeo, University of Essex y Institute for Fiscal Studies, 1999.

—. «Inequality and welfare evaluation of heterogeneous income distributions» Research Paper 2004/1, Helsinki: United Nations University-World Institute for Development Economics Research, enero 2004.

SHORROCKS, Anthony F., y James E. FOSTER. «Transfer sensitive inequality measures». *Review of Economic Studies* 54 (1987): 485-497.

SILBER, Jacques. «Factor components, population subgroups and the computation of the Gini index of inequality». *The Review of Economics and Statistics* 71 (1989): 107-115.

—. *Income Inequality Measurement: From Theory to Practice.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1999.

SIMÓN, Hipólito. «Diferencias salariales entre hombres y mujeres en España: Una comparación internacional con datos emparejados empresa-trabajador.» *Investigaciones Económicas* XXX, 1 (enero 2006): 55-87.

SLESNICK, Daniel T. «The standard of living in the United States». *The Review of Income and Wealth* 37, 4 (1991): 363-386.

—. «Gaining ground: Poverty in the Postwar United States». *Journal of Political Economy* 10 (1993): 1-38.

SMEEDING, Timothy, Serge ALLEGREZA y Günther SCHMAUS. «An introduction to LIS». LIS Documento de Trabajo n.º 1, Luxemburgo: Luxemburgo Income Study (julio 1985). Disponible en http://www.lisproject.org/.

SOLOW, Robert M. «'Reply' to Warren P. Hogan (1958)». *The Review of Economics and Statistics* 40 (1958): 411-413.

STEELE, J. Michael. *The Cauchy-Schwarz Master Class. An Introduction to the Art of Mathematical Inequalities.* Cambridge: Cambridge University Press, 2004.

STICH, Andreas. «Inequality and negative income». Documento de Trabajo n.º 4/96, Statistics and Econometrics, Colonia: Universidad de Colonia, mayo 1996.

STONE, J. Richard N. *The Measurement of Consumers' Expenditure and Behaviour in the United Kingdom, 1920-1938.* Vol. I. Cambridge: Cambridge University Press, 1954.

SYDSÆTER, Knut, Arne STRØM y Peter BERCK. *Economists' Mathematical Manual.* 4.ª ed., Berlin: Springer-Verlag, 2005.

TEMKIN, Larry S. *Inequality.* Oxford: Oxford University Press, 1993.

THEIL, Henri. *Economics and Information Theory.* Amsterdam: North-Holland, 1967.

—. «World income inequality and its components». *Economics Letters* 2 (1979a): 99-102.

—. «The measurement of inequality by components of income». *Economics Letters* 2 (1979b): 197-199.

—. «The development of international inequality 1960-1985». *Journal of Econometrics* 42 (1989): 145-155.

Theil, Henri, y Anthony J. Finizza. «A Note on the Measurement of Racial Integration of Schools by Means of Information Concepts». *Journal of Mathematical Sociology* 1 (1971): 187-194.

Thistle, Paul D. «Duality between generalized Lorenz curves and distribution functions». *Economic Studies Quarterly* 404, 6 (1989a): 183-187.

—. «Ranking distributions with generalized Lorenz curves». *Southern Economic Journal* 56 (1989b): 1-12.

Thomas, Vinod, Yan Wang y Xibo Fan. «Measuring education inequality. Gini coefficients of education». Policy Research Documento de Trabajo n.º 2525, Washington: Banco Mundial, The World Bank Institute, Economic Policy and Poverty Reduction Division, enero 2001.

Tortosa-Ausina, Emili, Francisco Pérez, Matilde Mas y Francisco J. Goerlich. «Growth and convergence profiles in the Spanish regions (1965-1997)». *Journal of Regional Science* 45, 1 (2005): 147-182.

Toyoda, Takeshi. «Decomposability of inequality measures». *Economic Studies Quarterly* 31 (1980): 207-216.

UNDP (United Nations Development Programme). *Human Development Report 1990. Concept and Measurement of Human Development*, Nueva York y Oxford: Oxford University Press, 1990. Disponible en http://hdr.undp.org/reports/global/1990/en/.

—. *Human Development Report 2005. International Cooperation at a Crossroads: Aid, Trade and Security in an Unequal World*. Nueva York, 2005. Disponible en http://hdr.undp.org/reports/global/2005.

UNU-WIDER. *World Income Distribution Database*. User Guide and Data Sources, Helsinki: United Nations University-World Institute for Development Economics Researchy, versión 2.0a, junio 2005.

U. S. Department of Commerce. *Money Income of Households, Families, and Persons in the United States: 1991*. Current Population Reports, Series P-60, n.º 132, Washington, D.C.: U.S. Government Printing Office, 1992.

—. *Poverty in the United States: 1992*. Current Population Reports, Series P-60, n.º 185, Washington, D.C.: U.S. Government Printing Office, 1993.

Vartia, Yrjo O. «Efficient methods of measuring welfare change and compensated income in terms of ordinary demand functions». *Econometrica* 51, 1 (enero 1983): 79-98.

Villar, Antonio. «La lógica de la elección social: Una revisión de los resultados básicos». *Investigaciones Económicas* 12, 1 (enero 1988): 3-44.

—. *Lecciones de Microeconomía*. Barcelona: Antoni Bosch Editor, 1999.

—. *Decisiones Sociales*. Madrid: McGraw Hill, 2005a.

—. «On the welfare evaluation of income and opportunity». *Contributions to Theoretical Economics* 5, 1 (2005b): artículo 3. Disponible en http://www.bepress.com/bejte/contributions/vol5/iss1/art3/. *Corrigendum* en la misma dirección.

Villaverde Castro, José. *Diferencias Regionales en España y Unión Monetaria Europea*, Madrid: Ediciones Pirámide, 1999.

Weymark, John A. «Generalized Gini inequality indices». *Mathemathical Social Sciences* 1 (1981): 409-430.

YAARI, Menahem E. «A controversial proposal concerning inequality measurement». *Journal of Economic Theory* 44, 4 (1988): 381-391.

YAARI, Menahem E., y Maya BAR-HILELL. «On Dividing Justly». *Social Choice and Welfare,* 1 (1984): 1-24.

YITZHAKI, Shlomo. «On an extension of the Gini inequality index». *International Economic Review* 24, 3 (octubre 1983): 617-628.

—. «On stratification and inequality in Israel». *Bank of Israel Economic Review* 63 (1988): 36-51.

—. «Economic distance and overlapping of distributions». *Journal of Econometrics* 61 (1994): 147-159.

—. «More than a dozen alternative ways of spelling Gini», *Research on Economic Inequality* 8, (1998): 13-30.

YITZHAKI, Shlomo, y Robert I. LERMAN, «Income stratification and income inequality». *Review of Income and Wealth* 37, 3 (1991): 313-329.

YITZHAKI, Shlomo, y Ingram OLKIN. «Concentration indices and concentration curves». En K. Mosler y M. Scarsini, eds. *Stochastic Orders and Decision under Risk.* Lecture Notes Monograph Series, Hayward, CA: Institute of Mathematical Statistics, vol. 19 (1991): 380-392.

YOSHIDA, T. «The necessary and sufficient condition for additive separability of income inequality measures». *Economic Studies Quarterly* 28 (1977): 160-163.

ZAGIER, Don. «Inequalities for the Gini coefficient of composite populations». *Journal of Mathematical Economics* 12, 2 (octubre 1983): 103-118.

ZUBIRI, Ignacio. «Income inequality as a predictor of welfare inequality», SEEDS Documento de Trabajo n.º 40, Bilbao: Instituto de Economía Pública, Universidad del País Vasco, 1985.

Índice de cuadros

Índice de esquemas

Índice de gráficos

Índice alfabético

Nota sobre los autores

EQUIPO INVESTIGADOR

Investigadores:

Francisco J. Goerlich Gisbert

(Universidad de Valencia e Ivie)

Antonio Villar Notario

(Universidad Pablo Olavide e Ivie)

Equipo técnico:

Rodrigo Aragón Rodríguez

Ángel Soler Guillén

Julia Teschendorff Cooper

(Ivie)

Rodrigo Aragón Rodríguez es licenciado en Informática por la Universidad Politécnica de Valencia y desde 1991 es responsable del área de informática en el Ivie, donde administra los recursos informáticos y las bases de datos del instituto.

Francisco J. Goerlich Gisbert, licenciado en Ciencias Económicas por la Universidad de Valencia, *Master of Science in Economics* por la London School of Economics y doctor por la Universidad de Valencia, es profesor titular del Departamento de Análisis Económico de la Universidad de Valencia y profesor investigador del Ivie. Coautor de más de diez libros, ha publicado asimismo medio centenar de artículos sobre temas de macroeconomía, econometría y economía regional en diversas revistas nacionales e internacionales, como *Investigaciones Económicas, Revista Española de Economía, Revista de Economía Aplicada, Investigaciones Regionales, Review of Income and Wealth, Regional Studies, Applied Economics, Economics Letters* o *Econometric Theory.*

Ángel Soler Guillén es licenciado en Ciencias Económicas y Empresariales por la Universidad de Valencia en la rama de Economía General, y tiene realizados los cursos de doctorado en el Departamento de Análisis Económico. Desde 1996 ejerce como técnico de investigación en el Ivie y está especializado en capital humano, mercado laboral e inmigración.

Antonio Villar Notario, licenciado en Ciencias Económicas por la Universidad de Valencia, doctor en Economía por la Universidad de Alicante y *Doctor of Philosophy* por la Universidad de Oxford, es catedrático de Universidad en el Departamento de Economía de la Universidad Pablo de Olavide y profesor investigador del Ivie. Su investigación se centra en el área de microeconomía, con contribuciones en temas de equilibrio general y economía del bienestar. Es autor de once libros y unos sesenta artículos publicados en algunas de las principales revistas especializadas.