



FUNDACION BBV

**DERIVADOS SOBRE
RENTA FIJA Y RENTA
VARIABLE EN ESPAÑA**
(III JORNADAS DE
ECONOMÍA FINANCIERA)



Los trabajos que contiene este libro han sido seleccionados en función de su rigor científico e interés divulgativo.

El interés que despierta entre directivos, operadores y gerentes financieros los trabajos llevados a cabo por expertos profesionales sobre temas vinculados al complejo mundo de los productos derivados está fuera de toda duda.

Cuando, además, los trabajos están íntimamente conectados con la experiencia propia de los mercados financieros españoles y son aportaciones originales, el valor añadido de los mismos es aún mayor.

Los dos primeros trabajos de este volumen analizan el comportamiento dinámico de los tipos de interés y las consecuencias que dicho comportamiento tiene sobre la valoración de productos derivados de renta fija.

El tercer trabajo presenta la primera valoración que se ha hecho en España sobre bonos segregables, mientras que los artículos cuarto y quinto discuten las interrelaciones entre los mercados al contado y los mercados de derivados.

FUNDACIÓN BBV
Documenta

Portada:

El cambista y su mujer (Louvre), de Quentin Metsys



FUNDACION BBV

**DERIVADOS SOBRE
RENTA FIJA Y RENTA
VARIABLE EN ESPAÑA**

**(III JORNADAS DE
ECONOMÍA FINANCIERA)**

La decisión de la Fundación BBV de publicar el presente libro no implica responsabilidad alguna sobre su contenido ni sobre la inclusión, dentro del mismo, de documentos o información complementaria facilitada por los autores.

Derivados sobre renta fija y renta variable en España
(III Jornadas de economía financiera)

© Fundación BBV

Edita Fundación BBV. Documenta

Plaza de San Nicolás, 4

48005 Bilbao

Depósito legal: M. 42.566-1999

I.S.B.N.: 84-95163-24-1

Ilustración de portada: *El cambista y su mujer* (Louvre),
de Quentin Metsys.

Imprime Sociedad Anónima de Fotocomposición
Talisio, 9 - 28027 Madrid

**Derivados sobre renta fija
y renta variable en España
(III Jornadas de economía financiera)**

ÍNDICE

Presentación	9
Introducción	11
Un modelo de la estructura temporal de tipos de interés con dos factores y reversión a la media, <i>M. Moreno</i>	15
Modelos para valorar opciones sobre tipos de interés: una comparación empírica, <i>J. M. Moraleda</i>	63
Valoración de los strips de deuda pública en España, <i>I. Gómez y J. Sicilia</i>	87
Transmisión de información y volatilidad entre el mercado de futuros sobre el índice Ibex 35 y el mercado al contado, <i>R. Blanco</i>	129
Integración y arbitraje en los mercados financieros españoles. Un análisis empírico, <i>A. Balbás, I. R. Longarela y Á. Pardo</i>	157

PRESENTACIÓN

El éxito de los productos derivados en las dos últimas décadas representa uno de los fenómenos más relevantes que han experimentado los mercados financieros internacionales. La Fundación BBV, aprovechando las III Jornadas de Economía Financiera que en junio de 1998 reunió en Bilbao a los más destacados economistas financieros académicos de nuestro país, ha decidido publicar un volumen que contenga cinco trabajos seleccionados entre los presentados en dichas Jornadas, y que, al mismo tiempo, discutan aspectos novedosos sobre productos derivados, tanto de renta fija como de renta variable. Se han escogido trabajos que, además de su excelente nivel científico, tengan un especial interés para mejorar nuestro conocimiento sobre el funcionamiento real de los mercados de productos derivados. Por otra parte, los trabajos que contiene este libro no sólo recogen aspectos específicos de productos derivados, sino que pretenden englobarlos en otros aspectos relacionados con mercados al contado, discutiendo temas tan relevantes como la transmisión de información entre el contado y el mercado de futuros, las relaciones de arbitraje entre los mercados, la estructura temporal de los tipos de interés o la creación de nuevos productos que faciliten la gestión de carteras, como son los recientemente creados bonos segregables.

Estamos convencidos de que este volumen puede resultar de enorme utilidad a los profesionales de los mercados financieros. Presenta una discusión de las novedades más recientes que están viviendo los mercados financieros desde un punto de vista divulgativo, pero manteniendo, al mismo tiempo, un elevado rigor científico que no impide su lectura a ninguna persona familiarizada con el día a día de estos mercados y productos.

INTRODUCCIÓN

Las Jornadas de Economía Financiera, que la Fundación BBV ha organizado en tres ocasiones en la última década con la colaboración de la Universidad del País Vasco, han pretendido crear el marco de discusión más adecuado para fomentar el intercambio de nuevas ideas entre los mejores especialistas nacionales en esta materia. Estas Jornadas, cuya primera edición se celebró en 1993, nacieron con el objetivo de crear un lugar de encuentro periódico y específico en el que poder exponer y debatir los trabajos de investigación que con creciente rigor científico se venían realizando en España. Gracias a esta iniciativa, la Fundación BBV ha contribuido a generalizar entre los académicos financieros españoles las formas de hacer más comunes, que otros países con experiencias científicas más avanzadas llevaban realizando muchos años. El éxito alcanzado y el reconocimiento que la Fundación BBV ha obtenido entre las universidades e institutos de investigación como promotora de esta iniciativa han representado un estímulo para tomar nuevas iniciativas que permitan acercar el mundo académico y los mercados financieros reales. Este libro debe entenderse, precisamente, como una forma alternativa de dar a conocer de manera generalizada la actividad y las aportaciones logradas en las Jornadas de Economía Financiera, que, insistimos, han supuesto un auténtico hito en la formas de comunicación con las que tradicionalmente contaban los académicos financieros españoles.

La selección de cinco trabajos entre las 36 ponencias presentadas en las III Jornadas, celebradas en junio de 1998 en la Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales de la Universidad del País Vasco, ha sido un proceso evidentemente complejo. La selección final se basó en el potencial de publicación internacional que tenían los trabajos, en los comentarios recibidos por parte de los miembros del Comité Científico de las Jornadas, en la discusión que plantearon los comentaristas de los trabajos durante las Jornadas y, finalmente, en la necesidad de realizar un volumen con un conte-

nido coherente y de actualidad para los mercados financieros reales. Esta última idea ha llevado a organizar un volumen cuyo punto de unión son los productos derivados y sus interrelaciones con los mercados al contado y con la moderna gestión de carteras.

Así, los dos primeros trabajos, de Manuel Moreno (Universitat Pompeu Fabra), «Un modelo de la estructura temporal de tipos de interés con dos factores y reversión a la media» y Juan Moraleda (Santander Investment y Universidad Carlos III), «Modelos para valorar opciones sobre tipos de interés: una comparación empírica», tratan modelos alternativos de comportamiento de los tipos de interés que permiten, a su vez y siempre dado dicho comportamiento, la valoración de opciones sobre productos de renta fija. El tercer trabajo, de Inmaculada Gómez (Universidad de Huelva) y Jorge Sicilia (Argentaria), «Valoración de los strips de deuda pública en España», nos presenta la valoración de los bonos segregables recientemente autorizados en nuestro país y que permiten una nueva forma de analizar y estimar la curva de tipos. En el cuarto trabajo, Roberto Blanco (Banco de España), «Transmisión de información y volatilidad entre el mercado de futuros sobre el índice Ibex 35 y el mercado al contado», presenta una interesantísima discusión sobre cómo y en qué dirección se transmite la información entre el mercado de futuros y el mercado de contado de renta variable. Finalmente, en un trabajo muy relacionado con el anterior, Alejandro Balbás (Universidad Carlos III), Iñaki Longarela (Universidad Carlos III) y Ángel Pardo (Universidad de Valencia), «Integración y arbitraje en los mercados financieros españoles. Un análisis empírico», discuten la integración y, por tanto, la ausencia de posibilidades de arbitraje entre los mercados del contado de renta variable, el mercado de futuros sobre renta variable y el mercado de deuda anotada.

Resulta sencillo entender que este volumen contiene trabajos de elevado rigor científico, presentados con un claro espíritu divulgativo, y que tratan temas esenciales para la gestión de carteras que emplean productos derivados como un medio no sólo de cobertura sino incluso de inversión y que, por tanto, deben englobarse y analizarse en relación al comportamiento de los productos y activos subyacentes.

Esta introducción no estaría completa sin mencionar a todo el equipo de trabajo que hizo posible la celebración de las III Jornadas de Economía Financiera y la selección de los artículos que contiene este libro. En primer lugar debemos agradecer el entusiasmo y capacidad organizativa de los miembros del Comité Organizador de las Jornadas: Gonzalo Rubio (Universidad del País Vasco), Rafael Repullo (CEMFI), Miguel Sebastián (BBV), Xavier Vives (Instituto

de Análisis Económico, CSIC) y Antonio Roldán (Fundación BBV). Asimismo, debemos recordar que la labor de selección de los 36 trabajos que se presentaron en las Jornadas entre más de noventa originales recibidos fue posible gracias a la desinteresada colaboración de los miembros del Comité Científico: Jordi Caballé (Universidad Autónoma de Barcelona), Santiago Carrillo (Universidad Autónoma de Madrid), Ana Isabel Fernández (Universidad de Oviedo), Xavier Freixas (Universidad Pompeu Fabra), Miguel Á. García Cestona (Universidad Autónoma de Barcelona), Juan Carlos Gómez Sala (Universidad de Alicante), José Marín (Universidad Pompeu Fabra), Carmen Matutes (Instituto de Análisis Económico, CSIC), Ignacio Peña (Universidad Carlos III), Fernando Restoy (Banco de España), Gonzalo Rubio (Universidad del País Vasco) y Enrique Sentana (CEMFI).

UN MODELO DE LA ESTRUCTURA TEMPORAL DE TIPOS DE INTERÉS CON DOS FACTORES Y REVERSIÓN A LA MEDIA

Manuel Moreno

Universitat Pompeu Fabra

Resumen

Muchos trabajos que analizan la estructura temporal de los tipos de interés [véase Chan *et al.* (1992) para una descripción y comparación empírica entre ellos] suponen que los tipos de interés evolucionan de modo continuo a lo largo del tiempo y que sus movimientos son dirigidos por una única variable de estado. Esta variable de estado suele ser el tipo de interés instantáneo libre de riesgo y se modeliza mediante un proceso de difusión.

Como una variable de estado puede ser insuficiente para reflejar adecuadamente la dirección de los cambios futuros en los tipos de interés, muchos trabajos teóricos y empíricos se han dedicado a estudiar diferentes alternativas. Así, a los modelos unifactoriales les han seguido los modelos unifactoriales con saltos y los modelos multifactoriales. Ejemplos de la primera alternativa son Ahn and Thompson (1988), Das (1994a, b) y Das and Foresi (1996) los cuales desarrollan diferentes modelos de un factor con saltos. Asimismo, Moreno and Peña (1996) estudian la dinámica de los tipos de interés del mercado interbancario y la valoración de opciones sobre activos derivados mediante un modelo unifactorial con saltos y analizan cualitativamente la relación entre las intervenciones de la autoridad monetaria y los saltos presentes en una muestra de datos diarios.

Los modelos multifactoriales, que intentan evitar las características poco realistas relacionadas con los modelos unifactoriales y explicar una mayor variedad de movimientos en la evolución temporal de los tipos de interés, suponen que se necesita más de una variable de estado para explicar los movimientos de los tipos de interés.

Richard (1978), Brennan and Schwartz (1979), Schaefer and Schwartz (1984), Cox, Ingersoll and Ross (1985b) y Longstaff and Schwartz (1992) son algunos ejemplos de este tipo de modelos. Modelos bifactoriales con saltos se analizan en Naik and Lee (1995) y Das and Foresi (1996). Recientemente, Chen (1996) ha propuesto un modelo de tres factores en el que el tipo de interés a corto plazo futuro depende de 1) el tipo de interés a corto plazo actual 2) la media a corto plazo de la anterior variable y 3) la volatilidad actual del tipo de interés a corto plazo.

En este artículo se presenta y desarrolla un modelo de dos factores para la estructura temporal de los tipos de interés. Como se ha indicado previamente, la mayoría de los modelos unifactoriales utilizan el tipo de interés a corto plazo como la única variable de estado. Intentando una aproximación más realista, añadimos el tipo de interés a largo plazo como la segunda variable de estado que utilizaremos en nuestro modelo. Con ambos factores, podremos explicar no sólo los cambios en los tramos corto y largo de la curva de tipos de interés sino también los movimientos intermedios que pueden darse en dicha curva.

Así, desarrollaremos un modelo en el que se supone que el precio de los bonos al descuento libres de riesgo viene determinado por el tiempo al vencimiento y por dos factores: el tipo de interés a largo plazo y el diferencial de tipos de interés (diferencia entre el tipo de interés a largo plazo y el tipo de interés a corto plazo). Reflejamos reversión a la media en los tipos de interés suponiendo que cada uno de estos factores sigue un proceso Ornstein-Uhlenbeck. Mediante condiciones de no arbitraje, se deriva una ecuación general de valoración de bonos y obtenemos una expresión analítica cerrada para el precio de bonos con diferentes vencimientos.

Posteriormente, se obtiene una expresión analítica para el precio de activos derivados. Dicha fórmula es utilizada para valorar opciones europeas sobre bonos al descuento, opciones sobre una cartera de bonos y otras opciones más complejas (caps, floors, swaps, opciones sobre swaps, opciones compuestas, opciones binarias...).

Finalmente, comparamos el ajuste (dentro y fuera de la muestra) del modelo presentado frente a un modelo unifactorial alternativo. La base de datos utilizada incluye precios de bonos cupón-cero y tipos de interés diarios y fue obtenida gracias al Servicio de Estudios del Banco de España. Las estimaciones obtenidas para el período 1991-1995 corroboran empíricamente el supuesto de reversión a la media en las series analizadas.

Para el período completo se observa que los precios de mercado del riesgo asociados a las variables de estado son positivos, muy variables a lo largo del tiempo y significativamente diferentes de cero. Los dos modelos proporcionan estimaciones para el período 1991-1994 y predicciones para el año 1995. La principal conclusión de la aplicación empírica realizada es que –independientemente de los estadísticos utilizados, de los subperíodos analizados y de los vencimientos considerados– el modelo de dos factores es más adecuado (tanto para estimar como para predecir) que el modelo unifactorial considerado.

1. Introducción

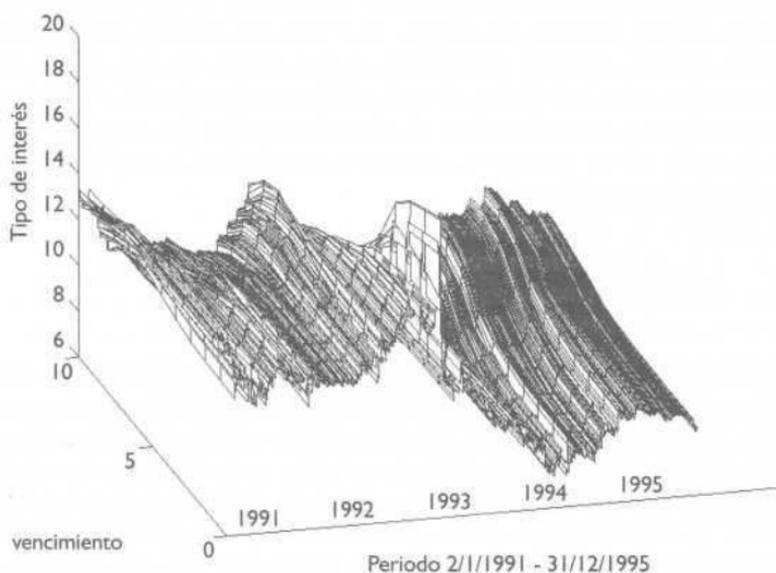
La estructura temporal de los tipos de interés establece la relación entre los tipos de interés correspondientes a activos libres de riesgo y sus diferentes plazos¹. Un ejemplo de representación gráfica de dicha estructura temporal viene dado en la Figura 1. En este gráfico podemos ver datos diarios correspondientes a tipos de interés que comprenden el período 1991-1995 y donde se consideran diez vencimientos diferentes. Por tanto, para cada día, tenemos diez valores que indican los tipos de interés relacionados con los diez vencimientos considerados. Los tres ejes incluyen la rentabilidad obtenida en cada día, los días considerados y los vencimientos analizados. En esta superficie, las curvas paralelas al eje de los vencimientos representan la estructura temporal observada en cada día de este período. Por otro lado, las curvas paralelas al eje del tiempo muestran la evolución diaria de los tipos de interés correspondientes a los distintos vencimientos considerados.

La explicación de esta estructura temporal nos ayuda no sólo a establecer la relación entre el tipo de interés y su plazo, sino también a extraer información sobre la economía y a predecir cambios en las variables que afectan a la curva de «tipo de interés-plazo». Así mismo, la modelización de esta curva y su evolución a lo largo del tiempo es fundamental para entender el funcionamiento de una economía dado el importante papel que tienen los tipos de interés en la transmisión de los movimientos del sector monetario al sector real.

Por estas razones, la estructura temporal de los tipos de interés para bonos al descuento libres de riesgo ha sido un tema analizado en multitud de artículos y trabajos por parte no sólo de académi-

¹ El plazo de un instrumento financiero con una fecha de madurez fija se define como el tiempo hasta el día del vencimiento de dicho activo.

FIGURA I
Representación gráfica de la estructura temporal de tipos de interés



cos sino, en general, de los diferentes participantes en los mercados financieros. Muchos de estos estudios proponen que la evolución en el tiempo de los tipos de interés se puede reflejar adecuadamente mediante los modelos en tiempo continuo. El principal supuesto que realiza este tipo de modelos es que los tipos de interés evolucionan de modo continuo a lo largo del tiempo. Dentro de estos modelos, siguiendo a Moraleda (1997), podemos distinguir dos categorías:

- **Modelos endógenos.** Este tipo de modelos se centra en «descubrir» qué variables mueven los tipos de interés, es decir, intentan encontrar cuáles son las fuerzas responsables de los diferentes movimientos presentes en superficies como la representada en la Figura I. Posteriormente, estos modelos realizan una serie de supuestos sobre estas variables (factores o variables de estado del modelo) y sobre el modelo más adecuado para caracterizarlas. Como consecuencia, la dinámica de los tipos de interés viene totalmente determinada por los parámetros del modelo que se haya supuesto para dichas variables y es, por tanto, una variable endógena del modelo. Ejemplos de estos modelos son Vasicek (1977), Brennan and Schwartz (1980) y Cox, Ingersoll, and Ross (1985a, b) (CIR, de ahora en adelante). Según el número de variables utilizadas, estos modelos se dividen en unifactoriales y multifactoriales.

- Modelos exógenos. Esta clase de modelos parte de que la evolución de los tipos de interés es observable. A partir de la información que proporciona esta evolución, se intentan deducir cuáles serán los movimientos futuros en los tipos de interés mediante los cuales se consiguen evitar las oportunidades de arbitraje negociando con bonos de diferentes vencimientos. Trabajos representativos de este enfoque son Ho and Lee (1986), Hull and White (1990) y Heath, Jarrow, and Morton (1992).

Ambos tipos de modelos difieren en sus objetivos. Los modelos endógenos parten del proceso supuesto para las variables explicativas para, tras estimar sus parámetros, calcular la estructura temporal de equilibrio, la cual sirve de base para realizar la valoración de activos derivados. Por otro lado, los modelos exógenos intentan conseguir un ajuste perfecto a los tipos de interés observados y valoran activos derivados con relación a la estructura temporal observada. Una característica común es que ambos pretenden estimar los tipos de interés y predecir su evolución futura. Dichas estimaciones y predicciones tienen diversas (potenciales) aplicaciones que, básicamente, se pueden sintetizar en los siguientes puntos:

- Valoración de activos derivados. El conocimiento de los movimientos futuros en los tipos de interés permite conocer la evolución futura de los precios de los activos derivados de renta fija. Dichos precios pueden obtenerse mediante una fórmula matemática en función de los tipos de interés o, si dicha fórmula no es posible, mediante la aplicación de técnicas numéricas.
- Diseño de estrategias de cobertura, las cuales ayudan a gestionar el riesgo derivado de cambios no esperados en los tipos de interés. Dichas estrategias se basan en la utilización de ciertas medidas (duración, convexidad...) que son calculadas a partir del modelo propuesto para los tipos de interés.
- Análisis del comportamiento empírico e implicaciones prácticas. En este caso lo que interesa es analizar si la estimación/predicción realizada se ajusta a los datos observados en los mercados financieros. Para analizar este ajuste, se pueden utilizar los tipos de interés o el precio de distintos activos derivados.

Este capítulo presenta y desarrolla un nuevo modelo endógeno de dos factores y desarrolla dos de sus posibles aplicaciones, en concreto, las relacionadas con la valoración de activos derivados y con el análisis de su comportamiento empírico.

Como comentaremos seguidamente, la mayoría de los modelos unifactoriales utilizan el tipo de interés a corto plazo como la única

variable de estado. Intentando una aproximación más realista, añadiremos el tipo de interés a largo plazo como la segunda variable que nos ayuda a explicar los movimientos experimentados por los tipos de interés.

Con estos dos factores, podremos explicar no sólo los cambios en los tramos corto y largo de la curva de tipos de interés sino también los movimientos intermedios que pueden darse en dicha curva utilizando la información que proporcionan los movimientos de sus extremos. Además, ambos factores permiten reflejar la evidencia empírica que afirma que, en general, los movimientos en los tipos de interés pueden interpretarse como una combinación de cambios paralelos y de cambios en la pendiente de la curva de tipos de interés ². Por tanto, éstas serán nuestras dos variables explicativas.

Esta pareja de factores ha sido también utilizada en Brennan and Schwartz (1979). En la línea de Schaefer and Schwartz (1984), redefinimos nuestras variables de estado y desarrollamos un modelo en el que suponemos que el precio de los bonos al descuento libres de riesgo viene determinado por el tiempo al vencimiento y por dos factores: el tipo de interés a largo plazo y el diferencial de tipos de interés (*spread*), diferencia entre el tipo de interés a largo plazo y el tipo de interés a corto plazo. Como la evidencia empírica sugiere que los tipos de interés presentan reversión a la media (los tipos de interés convergen a un valor a largo plazo), ambos factores son modelizados de modo que se refleje esta característica. Mediante condiciones de no arbitraje, derivamos una ecuación general para valorar bonos y obtenemos una expresión analítica para el precio de bonos cupon-cero con diferentes vencimientos. Dicha ecuación también sirve para valorar bonos que pagan cupones y para obtener el precio de distintos tipos de opciones.

El desarrollo de este capítulo es como sigue. La Sección 2 presenta una perspectiva general de los modelos endógenos en tiempo continuo que se han sugerido previamente en la literatura con el propósito de situar el modelo que aquí se propone en el contexto adecuado. En la Sección 3 se presenta este nuevo modelo endógeno bifactorial y se obtiene la ecuación básica de valoración que debe verificar el precio de los bonos al descuento para cualquier vencimiento. En la Sección 4 se resuelve esta ecuación y dicha solución proporciona la expresión analítica que

² Dicha evidencia se encuentra en trabajos como Jones (1991), Litterman and Scheinkinan (1991), Zhang (1993) y Knez, Litterman, and Scheinkinan (1994).

indica el precio de un bono cualquiera que sea su vencimiento. En la Sección 5 se extiende este resultado y se deriva una expresión cerrada para el precio de activos derivados en función de los dos factores propuestos. Aplicamos esta fórmula para valorar opciones sobre bonos al descuento y opciones sobre carteras de bonos al descuento. Además, se calcula el precio de otras opciones más complejas. La Sección 6 describe las características básicas de la aplicación empírica en la que comparamos las propiedades de nuestro modelo frente a las de un modelo alternativo. Finalmente, la Sección 7 resume las conclusiones más relevantes de este capítulo³.

2. Modelos endógenos en tiempo continuo

A partir de ahora nos centraremos en los modelos endógenos de los cuales ofrecemos una breve panorámica en esta sección. Dentro de estos modelos, la alternativa más simple consiste en suponer que los movimientos de la curva de tipos de interés están determinados por una única variable de estado (por ejemplo, el tipo de interés correspondiente a un determinado vencimiento), la cual dirige el movimiento de las restantes variables en estudio. Esta alternativa se lleva a la práctica mediante los modelos unifactoriales. Generalmente, se supone que esta única variable es el tipo de interés instantáneo libre de riesgo, el cual se modeliza como un proceso de difusión. Dicho proceso supone que los cambios en los tipos de interés se deben a dos componentes: la primera de ellas, llamada deriva del proceso, indica el cambio esperado en los tipos de interés y constituye la parte determinística de dicho cambio. La segunda componente, la difusión del proceso, refleja la variabilidad que pueden experimentar los tipos de interés alrededor del cambio esperado y constituye la parte aleatoria de la variación presente en los tipos de interés.

Matemáticamente, la forma general de este proceso viene dada por la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} dr &= k(\theta - r)dt + \sigma r^\tau dw \\ &= (a + br)dt + \sigma r^\tau dw \end{aligned} \quad (1)$$

³ Los detalles técnicos de las demostraciones teóricas y de la aplicación empírica realizada se encuentran en Moreno (1996). Otra aplicación del modelo aquí propuesto (no descrita en este capítulo) se relaciona con la gestión en tiempo continuo del riesgo derivado de cambios en los tipos de interés y está detallada en Moreno (1997).

donde el cambio en el tipo de interés instantáneo sin riesgo se denota por dr . k es el coeficiente de reversión a la media y refleja la velocidad a la que los tipos de interés tienden a largo plazo a un cierto valor, denotado por θ . σ es la desviación estándar de esta variable y τ es el coeficiente de elasticidad que refleja la relación entre la volatilidad y el nivel de los tipos de interés⁴. Finalmente, dt indica los cambios en el tiempo y dw representa una variable aleatoria que refleja la (única) fuente de incertidumbre que influye sobre los tipos de interés futuros.

Como esta variable aleatoria tiene un valor medio esperado igual a cero, se verifica que el cambio medio esperado en los tipos de interés depende solamente de la primera componente de esta expresión, la deriva del proceso. Por tanto, la segunda componente de esta expresión se relaciona con la volatilidad de la variable. Se tiene reversión a la media si el parámetro k toma valores positivos. Tal como indica Hull (1997), este rasgo de los tipos de interés tiene poderosos argumentos económicos a favor: cuando los tipos de interés son altos, hay menos demanda por parte de los prestatarios lo cual induce un descenso en el valor de dichos tipos de interés ocurriendo el caso contrario cuando los tipos de interés son bajos. Matemáticamente, la reversión a la media implica que los tipos de interés siguen una distribución estacionaria, consecuencia de su fluctuación alrededor del valor a largo plazo al cual tienden.

Podemos trabajar con el proceso general de difusión expresado en esta ecuación así como con diversos casos particulares (véase la Tabla I) que se obtienen imponiendo restricciones sobre los parámetros a , b y τ de dicho proceso.

Los modelos de Merton (1973) y Vasicek (1977) suponen varianza constante al imponer un valor nulo al parámetro τ . Como no realizan ninguna restricción sobre los parámetros de la deriva del proceso, Vasicek (1977), CIR (1985a) y Brennan and Schwartz (1980) introducen reversión a la media. CIR (1985a) supone que la volatilidad (reflejada por la varianza) de los cambios en los tipos de interés es proporcional al nivel de los tipos de interés. Por el contrario, Dothan (1978), Black and Scholes (1973) y Brennan and Schwartz (1980) suponen que la desviación estándar (no la varianza) es proporcional al nivel de los tipos de Interés. Finalmente, CIR (1980) sugieren que la volatilidad es muy sensible al nivel de los ti-

⁴ Generalmente, se suele suponer que una alta (baja) volatilidad en los tipos de interés está asociada a mayores (menores) valores en los niveles de los tipos de interés.

TABLA I
Casos particulares del proceso general de difusión

Modelo	a	b	τ
Merton (1973).....	-	0	0
Vasicek (1977).....	-	-	0
Cox, Ingersoll, and Ross (1985a).....	-	-	0,5
Dothan (1978).....	0	0	1
Black and Scholes (1973).....	0	-	1
Brennan and Schwartz (1980).....	-	-	1
Cox, Ingersoll, and Ross (1980).....	0	0	1,5
Cox (1975).....	0	-	-
Sin restricciones.....	-	-	-

Esta tabla incluye los diferentes modelos de difusión que reflejan la dinámica de los tipos de interés. Estos procesos se obtienen imponiendo restricciones sobre los parámetros a, b y τ en la ecuación que refleja el modelo general de difusión.

$$dr = (a + br)dt + \sigma r^{\tau}dw$$

pos de interés. Una comparación empírica del comportamiento de estos modelos puede verse en Chan *et al.* (1992).

Existen dos inconvenientes asociados a los modelos unifactoriales:

- Puesto que este tipo de modelos supone que una única variable afecta a todos los vencimientos, las rentabilidades instantáneas de bonos que solamente difieren en su vencimiento están perfectamente correlacionadas, lo cual contrasta con la evidencia empírica que presentan los tipos de interés.
- Aunque estos modelos suelen presentar cierta tratabilidad analítica ya que suelen proporcionar fórmulas cerradas para el precio de distintos activos derivados, puede suceder que una única variable explicativa no sea suficiente para explicar y caracterizar la variedad de movimientos que los tipos de interés pueden presentar en futuros períodos.

Para intentar solucionar estos inconvenientes, se han propuesto dos alternativas:

- Relajar el supuesto de evolución continua en el tiempo y permitir cambios discretos en los tipos de interés, lo cual nos lleva a los modelos en tiempo continuo con saltos.
- Aumentar el número de factores del modelo suponiendo que existe más de una variable que influye sobre los distintos movimientos de los tipos de interés, lo cual nos lleva a los modelos multifactoriales en tiempo continuo.

Con respecto a la primera alternativa, existen diversas circunstancias que hacen que la evolución continua en los tipos de interés sea

un supuesto cuestionable. Así, tenemos situaciones como las intervenciones de las autoridades monetarias que pueden tener una cierta influencia sobre los mercados nacionales interbancarios. Por tanto, estas intervenciones pueden inducir unos saltos en la evolución temporal de los tipos de interés. Otras razones que pueden provocar saltos en los tipos de interés son los shocks sobre la oferta o la demanda de dinero o la llegada de noticias económicas y/o políticas.

Para recoger esta posibilidad surgen los modelos unifactoriales con saltos. Su expresión general es similar a la del proceso general de difusión anteriormente presentado, a la cual añaden una componente discreta para indicar los saltos en la evolución de los tipos de interés

$$dr = k(\theta - r)dt + \sigma r^{\tau} dw + J(\mu, \gamma^2)d\pi(h)$$

La primera parte de esta expresión es el proceso de difusión (pura) anteriormente comentado mientras la segunda parte sirve para modelizar los saltos. El tamaño de estos saltos se indica mediante la variable aleatoria J que, en general, se distribuye según una variable normal con media μ y varianza γ^2 . Esta segunda componente también incluye una variable aleatoria discreta, $d\pi(h)$, que sigue un proceso de Poisson que depende de un parámetro constante h , que refleja la frecuencia de los saltos.

Diversos artículos han analizado modelos de este tipo. Así, Ahn and Thompson (1988) extienden el modelo CIR permitiendo efectos discretos en los tipos de interés aunque dichos efectos no cambian el valor a largo plazo al que tiende esta variable. Das (1994a) es el primer estudio empírico de un modelo de difusión con saltos para los tipos de interés. Trabajando con los modelos de Vasicek (1977) y CIR (1985a), se identifican los instantes en que se producen saltos y se parametriza tanto el tamaño como el signo de estos saltos. Posteriormente, Das (1994b) analiza el comportamiento del modelo de Vasicek (1977) con saltos estocásticos en el mercado de bonos. Das and Foresi (1996) analizan el modelo de Vasicek (1977) al cual incorporan saltos que afectan a los tipos de interés aunque no influyen sobre su tendencia. Asimismo, Moreno and Peña (1996) presentan un modelo unifactorial con saltos mediante el cual estudian la dinámica de los tipos de interés del mercado interbancario español y analizan cualitativamente la relación entre las intervenciones del Banco de España y los saltos presentes en una muestra de tipos de interés diarios.

Otra posibilidad es analizar la evolución temporal de los tipos de interés mediante los modelos multifactoriales, que suponen que es

necesaria más de una variable para explicar los movimientos en los tipos de interés. Desde el punto de vista práctico, se suele limitar el número de factores a dos. Las variables de estado empleadas suelen ser el tipo de interés instantáneo y una segunda variable como la tasa de inflación, el tipo de interés a largo plazo o la volatilidad. La mayoría de estos modelos son una extensión multifactorial del modelo presentado en CIR (1985a, b).

Este tipo de modelos ha sido desarrollado en diferentes estudios. Así, Richard (1978) y CIR (1985b) suponen que los movimientos de los tipos de interés dependen del tipo de interés real esperado a corto plazo y de la tasa de inflación anticipada a corto plazo. Brennan and Schwartz (1979) trabajan con los tipos de interés a corto y largo plazo y presentan el comportamiento empírico de su modelo aplicándolo a bonos canadienses. Schaefer and Schwartz (1984) utilizan el tipo de interés a largo plazo (asociado a un bono perpetuo) y el diferencial de tipos de interés. Longstaff and Schwartz (1992) desarrollan un modelo de equilibrio general donde los dos factores utilizados son el tipo de interés a corto plazo y su volatilidad. Ejemplos de modelos con dos factores y saltos se pueden encontrar en Naik and Lee (1995) y Das and Foresi (1996). Recientemente, Chen (1996) ha propuesto un modelo con tres factores en el que los tipos de interés (a corto plazo) futuros dependen de: (1) el tipo de interés (a corto plazo) actual (2) su media a corto plazo y (3) su volatilidad actual. Aunque este tipo de modelos está aún en una fase preliminar, los primeros resultados parecen prometedores.

3. La ecuación de valoración de bonos

En esta sección, se deriva la ecuación que deben verificar los precios de bonos con cualquier vencimiento. Esta ecuación expresa una relación de equilibrio entre las rentabilidades esperadas de una serie de bonos que difieren solamente en su vencimiento.

El principal supuesto que se realiza en el modelo multifactorial que se presenta en este capítulo es que el precio, en un cierto instante, de un bono cupón-cero libre de riesgo que paga una determinada cantidad en el momento en que vence depende exclusivamente de los valores actuales de un conjunto de variables de estado (que serán elegidas a continuación) y del tiempo que resta hasta el vencimiento de dicho bono. A partir de este supuesto, nuestro primer problema es seleccionar las variables que puedan ser relevantes para la determinación del precio de los diferentes bonos.

Puesto que se desea explicar los movimientos de los tipos de interés mediante dos variables, una posible alternativa sería utilizar el tipo de interés (instantáneo) a corto plazo y el tipo de interés a largo plazo como variables de estado. Utilizando la evidencia empírica según la cual los tipos de interés con vencimientos cercanos tienen una gran relación entre sí, con cada una de estas dos variables podemos explicar los cambios que se producen en el tramo corto y en el tramo largo de la curva de tipos de interés⁵. Más aún, también podemos explicar los movimientos intermedios de la curva de tipos mediante estos valores extremos, los correspondientes al mayor y al menor vencimiento.

Aunque la mayoría de los estudios multifactoriales emplean como una de sus variables de estado el tipo de interés a corto plazo, realizamos una redefinición de variables similar a la que realizan Schaefer and Schwartz (1984) y elegimos como variables de estado el tipo de interés a largo plazo, que denotaremos por L , y el diferencial de tipos de interés (*spread*), denotado por s , que es igual a la diferencia entre el tipo de interés a corto plazo, r , y el tipo de interés a largo plazo.

Aunque éstas son las dos variables con las que vamos a trabajar, existen otras dos parejas de factores que podrían ser utilizadas. La primera está formada por el tipo de interés a corto plazo y el *spread* mientras la segunda pareja incluye el tipo de interés a corto plazo y el tipo de interés a largo plazo. Puesto que cada una de estas tres parejas es simplemente una redefinición de cualquiera de las otras dos, parece razonable pensar que obtendremos información equivalente a partir de cualquiera de ellas. La elección de la pareja anteriormente mencionada responde a un criterio de tratabilidad analítica en el sentido que dicha pareja nos ayuda a simplificar los cálculos que debemos realizar para obtener una fórmula matemática que indique el precio de una serie de activos derivados como función de las variables de estado. Como se ha indicado previamente, dicha fórmula viene dada por la solución analítica de la ecuación fundamental que emplearemos para realizar la valoración de bonos.

Así, esta selección de variables nos permite utilizar el supuesto teórico de que ambas variables están incorrelacionadas. La evidencia empírica que apoya este supuesto se puede encontrar en trabajos como Ayres and Barry (1980), Schaefer (1980) y Nelson and

⁵ Así, por ejemplo, cambios en el tipo de interés a un día sirven para explicar la mayoría de las variaciones producidas en, por ejemplo, los tipos de interés a siete o quince días. Evidencia de estas interrelaciones para el caso español se puede encontrar en Moreno and Peña (1996) y Moreno (1996).

Schaefer (1983). Ayres and Barry (1980) proponen que la correlación entre los cambios de los tipos a largo plazo y los cambios en el diferencial de tipos de interés es cercana a cero y verifican empíricamente este supuesto utilizando datos de Salomon Brothers para el período comprendido entre enero de 1956 y agosto de 1978. Schaefer (1980) muestra que esta idea es consistente con los valores estimados por Brennan and Schwartz (1980). Finalmente, Nelson and Schaefer (1983) también han contrastado este supuesto utilizando datos del CRSP Government Bond Tape durante el período 1930-1979.

Una vez que hemos elegido las variables de estado, el siguiente paso consiste en proponer un proceso que pueda ayudar a modelizar su evolución en el tiempo. En primer lugar, supondremos que dicho modelo viene dado por la expresión genérica de los procesos de difusión en tiempo continuo y, posteriormente, particularizaremos esta expresión con el objetivo de obtener analíticamente el precio de los activos derivados. Por tanto, a partir de ahora, suponemos que la dinámica de ambos factores a lo largo del tiempo viene dada por el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} ds = \beta_1(s, L)dt + \sigma_1(s, L)dw_1 \\ dL = \beta_2(s, L)dt + \sigma_2(s, L)dw_2 \end{cases}$$

donde t denota el tiempo y donde dw_1 y dw_2 son las dos variables aleatorias que reflejan la incertidumbre de cada uno de nuestros factores. De modo análogo a lo comentado cuando se presentó el proceso general de difusión que siguen los tipos de interés (véase la ecuación (1)), se verifica que el cambio medio esperado en cada factor depende solamente de la deriva del proceso que modeliza dicho factor. El supuesto de ortogonalidad existente entre ambas variables implica que no existe relación lineal entre ellas⁶. $\beta_1(\cdot)$ y $\beta_2(\cdot)$ representan las tasas de cambio instantáneas esperadas en cada una de las variables y $\sigma_1^2(\cdot)$ y $\sigma_2^2(\cdot)$ denotan las varianzas instantáneas de los cambios en estas dos variables.

Estas expresiones indican que las dos variables siguen un proceso conjuntamente markoviano, es decir, los supuestos realizados hasta ahora implican que los valores esperados en el futuro de estas variables dependen exclusivamente de los valores que tengan en la actualidad. Por tanto, dichos valores y la información que se pueda extraer de ellos debería ser suficiente si queremos predecir los valores que esperamos en el futuro para los tipos de interés.

⁶ Analíticamente, dicho supuesto implica que la covarianza entre ellas es cero: $E[dw_1 dw_2] = 0$.

Sea $P(s, L, \tau, T) \equiv P(s, L, \tau)$ el precio, en el instante t , de un bono libre de riesgo que no paga cupones intermedios y que sólo tiene un pago final, consistente en una unidad monetaria en el momento de su vencimiento, $T = t + \tau$. Esta notación permite indicar explícitamente que el precio de este bono es función de las dos variables elegidas y , de modo implícito, se refleja la relación de este precio con el tiempo que resta hasta la fecha de vencimiento.

El cambio porcentual instantáneo en el precio de este bono puede expresarse en función de la rentabilidad esperada de antemano para dicho bono juntamente con los cambios no esperados a priori y que se derivan de las (dos) fuentes de incertidumbre que influyen sobre su precio. Por tanto, dicho cambio porcentual instantáneo puede expresarse como

$$\frac{dP(s, L, \tau, T)}{P(s, L, \tau, T)} = \mu(s, L, \tau, T)dt + s_1(s, L, \tau, T)dw_1 + s_2(s, L, \tau, T)dw_2$$

En esta expresión, $dP(\cdot)$ indica el cambio (absoluto) instantáneo en el precio del bono. La primera parte del cambio porcentual instantáneo es $\mu(\cdot)$ que indica la rentabilidad esperada del bono y representa la parte determinística de las variaciones (porcentuales) en el precio del bono. Por otro lado, $s_1(\cdot)$ y $s_2(\cdot)$ son las variaciones no esperadas en las rentabilidades de los bonos y que son debidas a los cambios aleatorios de las variables de estado.

Esquemáticamente, los pasos para obtener la ecuación de valoración de bonos son:

- Aplicación de diversas técnicas matemáticas
- Construcción de una cartera de cobertura
- Utilización de condiciones de no arbitraje

El primero de estos pasos nos permite descomponer el cambio (absoluto) en el precio del bono en una parte determinística, dependiente de la rentabilidad esperada del bono, y en dos componentes aleatorias, relacionadas con la incertidumbre asociada a cada factor.

Puesto que hay dos variables aleatorias que dirigen el precio de todos los bonos, podemos construir una cartera de cobertura, formada por tres bonos con distintos vencimientos, que carece (instantáneamente) de riesgo. Por tanto, consideramos la estrategia de

inversión que consiste en una cartera formada por tres bonos al descuento con vencimientos arbitrarios. El cambio porcentual instantáneo en el precio de esta cartera se obtiene como suma ponderada de los cambios porcentuales de los bonos incluidos en ella. Las ponderaciones utilizadas en dicha suma son las proporciones que invertimos en cada bono, valores que debemos calcular.

El cambio instantáneo de esta cartera se descompone, de modo análogo a lo realizado para cada uno de los bonos, en la tasa de rentabilidad esperada (parte determinística) y en dos componentes aleatorias, reflejo de la incertidumbre asociada al cambio producido en el precio de la cartera. A continuación, calculamos las proporciones invertidas en cada bono, de modo que la incertidumbre de la rentabilidad de esta cartera desaparezca.

Hasta este momento, hemos construido una cartera de cobertura mediante tres bonos. Para evitar oportunidades de arbitraje, la rentabilidad esperada de esta cartera debe coincidir con el tipo de interés instantáneo sin riesgo puesto que dicha cartera está libre de riesgo.

Como consecuencia de esta igualdad, se obtiene la prima de riesgo instantánea (diferencia entre la rentabilidad esperada del bono y el tipo de interés libre de riesgo) como combinación lineal de dos componentes que se derivan, una vez más, de las dos fuentes de incertidumbre presentes en el modelo. Por tanto, los coeficientes de esta combinación lineal pueden interpretarse como los precios de mercado del riesgo del diferencial de tipos de interés y del tipo de interés a largo plazo. Más aún, se cumple que ambos precios del riesgo son independientes del vencimiento porque hemos elegido arbitrariamente los vencimientos de los tres bonos incluidos en esta cartera. Por tanto, esta relación de equilibrio para la rentabilidad esperada del bono es válida para todos los vencimientos.

Finalmente, un poco de álgebra nos lleva a la ecuación que debe cumplir el precio de un bono cupón-cero libre de riesgo para cualquier vencimiento ⁷:

$$\frac{1}{2} [\sigma_1^2(\cdot)P_{ss} + \sigma_2^2(\cdot)P_{LL}] + [\beta_1(\cdot) - \lambda_1(\cdot)\sigma_1(\cdot)]P_s + [\beta_2(\cdot) - \lambda_2(\cdot)\sigma_2(\cdot)]P_L + P_t - rP = 0$$

⁷ En esta expresión, los subíndices indican derivadas parciales:

$$P_s = \frac{\partial P(\cdot)}{\partial s}, P_{ss} = \frac{\partial^2 P(\cdot)}{\partial s^2}$$

Dada la dinámica que hemos supuesto para las variables de estado, esta expresión es la ecuación de valoración de bonos al descuento libres de riesgo que dependen exclusivamente del diferencial de tipos de interés, del tipo de interés a largo plazo y del tiempo al vencimiento. En esta ecuación se incluyen los precios de mercado del riesgo, $\lambda_i(\cdot)$, porque nuestro modelo es válido para el precio de todos los bonos (independientemente de su vencimiento) y la única manera de relacionar los diferentes precios de estos bonos es mediante estos parámetros que no pueden ser calculados sino que deben ser explicitados de modo exógeno.

La solución de esta ecuación, sujeta a la condición terminal que indica el pago recibido al vencimiento del activo en cuestión, nos da el precio (analítico) de dicho activo. Esta solución se calcula para el caso de bonos cupon-cero en la próxima sección. Posteriormente, dicha solución será extendida al caso de otros activos derivados más complejos.

4. Valoración de bonos al descuento

En esta sección, se calcula la expresión analítica del precio de bonos al descuento libres de riesgo a partir de la ecuación fundamental de valoración que hemos obtenido en la sección anterior. Una vez que hayamos obtenido dicha expresión, se pueden analizar sus implicaciones sobre las propiedades de la estructura temporal de los tipos de interés⁸.

Los coeficientes de la ecuación de valoración de bonos son los precios de mercado del riesgo de las variables de estado, $\lambda_i(\cdot)$, y los parámetros del proceso que hemos supuesto para el diferencial de tipos de interés y el tipo de interés a largo plazo. Para hallar la solución de esta ecuación de valoración, necesitamos hacer algunos supuestos específicos sobre los precios de mercado del riesgo y sobre la dinámica de las variables de estado pues estos coeficientes son demasiado genéricos para proporcionar esta solución.

Supuesto 1. *El precio de mercado del riesgo de cada variable de estado es lineal en dicha variable, es decir*

$$\lambda_1(\cdot) = a + bs, \quad \lambda_2(\cdot) = c + dL$$

⁸ Dichas propiedades, demostradas y comentadas en Moreno (1997), se relacionan con a) la curva de los tipos de interés a plazo (*forward*) b) la curva de rentabilidades al vencimiento de los bonos y e) la prima de plazo instantánea.

Este primer supuesto establece una cierta variabilidad en los precios de mercado del riesgo e intenta reflejar que, bajo ciertas restricciones de positividad de los parámetros correspondientes, altos valores de nuestros factores están asociados con altos precios de riesgo. La principal motivación de este supuesto es que un precio de mercado del riesgo constante impone demasiadas restricciones sobre las preferencias de los inversores pues parece razonable que el precio de mercado del riesgo dependa del nivel de la variable de estado correspondiente.

En relación con la dinámica de ambos factores, realizamos el siguiente supuesto:

Supuesto 2. *Cada una de las variables de estado sigue un proceso de difusión*⁹

$$\begin{cases} ds = k_1(\mu_1 - s)dt + \sigma_1 dw_1 \\ dL = k_2(\mu_2 - L)dt + \sigma_2 dw_2 \end{cases}$$

Este proceso ha sido utilizado anteriormente por Vasicek (1977) y refleja reversión a la media y varianza constante en los tipos de interés. Para cada variable de estado, el valor $k_i > 0$ es el coeficiente de reversión a la media que refleja la velocidad de ajuste de la variable hacia su valor a largo plazo (μ_i), σ_i es la (constante) desviación estándar de cada variable y dw_i es la variable aleatoria que introduce la incertidumbre en cada uno de los factores.

Bajo los supuestos 1 y 2, se puede reescribir la ecuación de valoración de bonos de modo que ahora se pueda resolver analíticamente teniendo en cuenta que la solución de dicha ecuación debe cumplir la condición terminal, dada por el pago final de este bono. Suponiendo que dicho pago final es igual a una unidad monetaria, la solución de esta ecuación se obtiene mediante la siguiente proposición:

Proposición 1. *El precio en el instante t de un bono al descuento que paga una unidad monetaria en el instante de vencimiento T , $P(s, L, t, T) \equiv P(s, L, \tau)$, viene dado por*

$$P(s, L, \tau) = A(\tau) \exp \{-B(\tau)s - C(\tau)L\}$$

⁹ Una fórmula diferente de valoración de bonos se obtiene mediante un supuesto alternativo que establece que el tipo de interés a largo plazo sigue un proceso similar al propuesto en CIR (1985a). Los resultados y detalles técnicos son absolutamente análogos a los del caso aquí analizado y están a disposición del lector interesado.

donde $\tau = T - t$ y

$$\begin{aligned}
 A(\tau) &= A_1(\tau) A_2(\tau) \\
 A_1(\tau) &= \exp\left\{-\frac{\sigma_1^2}{4q_1} B^2(\tau) + s^* [B(\tau) - \tau]\right\} \\
 A_2(\tau) &= \exp\left\{-\frac{\sigma_2^2}{4q_2} C^2(\tau) + L^* [C(\tau) - \tau]\right\} \\
 B(\tau) &= (1 - e^{-q_1 \tau}) / q_1 \\
 C(\tau) &= (1 - e^{-q_2 \tau}) / q_2
 \end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned}
 q_1 &= k_1 + b\sigma_1, \quad s^* = \hat{\mu}_1 - \sigma_1^2 / (2q_1^2), \quad \hat{\mu}_1 = (k_1\mu_1 - a\sigma_1) / q_1 \\
 q_2 &= k_2 + b\sigma_2, \quad L^* = \hat{\mu}_2 - \sigma_2^2 / (2q_2^2), \quad \hat{\mu}_2 = (k_2\mu_2 - c\sigma_2) / q_2
 \end{aligned}$$

Esta proposición indica que el precio de este bono cupón-cero se puede expresar como el producto de dos términos. El primer término depende exclusivamente del tiempo al vencimiento mientras que el segundo depende conjuntamente de los dos factores y del tiempo al vencimiento. Las expresiones obtenidas en esta proposición reflejan que este precio depende de los parámetros del proceso de difusión y de otra serie de parámetros (incluidos en los precios de mercado del riesgo asociado a los dos factores) que deberemos estimar cuando analicemos el comportamiento empírico de esta fórmula.

En este momento, puede ser interesante señalar que posteriores desarrollos de este modelo indican que los coeficientes de la combinación lineal de los factores que aparecen en el exponente del segundo término, $B(\tau)$ y $C(\tau)$, pueden ser importantes a la hora de gestionar el riesgo derivado de cambios no esperados en la curva de tipos de interés.

La fórmula obtenida permite demostrar que el precio del bono cumple una serie de propiedades analíticas y económicas. Entre las primeras destacamos las siguientes:

- Es una función de descuento, es decir, para cualquier valor de sus argumentos, el precio del bono es siempre inferior a su pago final lo cual refleja el valor del dinero en el tiempo.
- Es una función decreciente y convexa en ambos factores. Esta convexidad implica que medidas tradicionalmente utilizadas para

la gestión de riesgos como la duración convencional pueden no ser adecuadas.

- Es una función decreciente en el tiempo al vencimiento. A mayor vencimiento se obtiene un menor precio con lo que se vuelve a reflejar el valor del dinero en el tiempo.

El precio del bono también verifica características muy realistas desde un punto de vista económico. Así, cuando cualquiera de las variables que influyen sobre el precio del bono (las variables de estado y/o el tiempo hasta el vencimiento) toma valores suficientemente grandes, el precio del bono se acerca (hasta converger) a cero.

5. Expresión analítica del precio de activos derivados

La ecuación de valoración de bonos obtenida en la Sección 3 nos permite obtener una expresión cerrada no sólo para el precio de un bono cupón-cero sino también para el precio de otros activos derivados. La idea básica es que, sustituyendo en la condición terminal el pago final de este bono por el pago terminal proporcionado por otro activo, la solución de la ecuación de valoración con esta nueva condición terminal nos dará el precio de dicho activo.

Así, el precio en un cierto instante t , $U(s, L, t, T) \equiv U(s, L, \tau)$, de un activo que paga una cantidad $g(s_T, L_T)$ en el instante de su vencimiento T , satisface la siguiente ecuación

$$\frac{1}{2}\sigma_1^2 U_{ss} + q_1(\hat{\mu}_1 - s)U_s + \frac{1}{2}\sigma_2^2 U_{LL} + q_2(\hat{\mu}_2 - L)U_L + U_t - (L + s)U = 0$$

sujeta a la condición terminal ¹⁰

$$U(s, L, T, T) = g(s_T, L_T)$$

y, de este modo, podemos utilizar la solución de esta ecuación [para una función particular $g(s, L)$] para obtener los precios de di-

¹⁰ Nótese que, si $g \equiv 1$, se obtiene la expresión analítica para el precio de bonos al descuento que se ha calculado en la Sección 4.

ferentes activos derivados. La solución de esta ecuación viene dada por la siguiente proposición:

Proposición 2. Dada la evolución temporal de los tipos de interés indicada en el supuesto 2, el precio en el instante t , $U(s, L, t, T) \equiv U(s, L, \tau)$, de un activo derivado que paga una cantidad $g(s_T, L_T)$ en el instante de su vencimiento T es

$$U(s, L, t, T) = P(s, L, t, T) E[g(s', L')]$$

donde

$$s' \approx N[m_s(s, t, T) - q_{sY}(t, T), v_s^2(t, T)]$$

$$L' \approx N[m_L(s, t, T) - q_{LY}(t, T), v_L^2(t, T)]$$

con

$$m_s(s, t, u) = e^{-q_1(\mu - \nu)} s + [1 - e^{-q_1(u-t)}] \hat{\mu}_1$$

$$q_{sY}(t, u) = \frac{\sigma_1^2 [1 - e^{-q_1(u-t)}]^2}{2q_1^2}$$

$$v_s^2(t, u) = \frac{\sigma_1^2}{2q_1} [1 - e^{-2q_1(u-t)}]$$

$$m_L(L, t, u) = e^{-q_2(\mu - \nu)} L + [1 - e^{-q_2(u-t)}] \hat{\mu}_2$$

$$q_{LY}(t, u) = \frac{\sigma_2^2 [1 - e^{-q_2(u-t)}]^2}{2q_2^2}$$

$$v_L^2(t, u) = \frac{\sigma_2^2}{2q_2} [1 - e^{-2q_2(u-t)}]$$

La fórmula obtenida en esta proposición indica que el precio de un activo derivado se puede expresar como el producto de dos términos. El primero de estos términos es igual al precio del bono cupón-cero obtenido en la Proposición 1 mientras el segundo expresa el valor esperado de una variable aleatoria. Esta variable aleatoria expresa el pago final del activo derivado que, en el instante actual, es desconocido pues depende de dos factores cuyos valores en el instante de vencimiento de este derivado son desconocidos.

Por tanto, la interpretación del resultado obtenido es que el precio de un activo derivado es igual al valor descontado de sus pagos futuros esperados donde la función de descuento utilizada para tras-

ladar el dinero del futuro al presente corresponde al precio de un bono cupón-cero. Esta interpretación es consistente con los resultados financieros que afirman que, para evitar oportunidades de arbitraje, el precio de un activo debe coincidir con el valor presente de los flujos esperados durante la vida de dicho activo.

A continuación, se puede utilizar la expresión analítica dada por esta proposición conjuntamente con el correspondiente pago recibido en el vencimiento para obtener los precios de diferentes activos derivados. Con propósitos de ilustración, se enumeran y comentan algunos de los activos a los que se puede aplicar este resultado:

- Opción europea sobre un bono cupón-cero.
- Opción europea sobre una cartera de bonos.
- *Cap* de tipos de interés.
- *Floor* de tipos de interés.
- Permuta (*swap*) de tipos de interés.
- Opción a la medida.

a) Una **opción europea de compra sobre un bono cupón-cero** es un contrato en el que el vendedor de dicha opción garantiza al comprador el derecho (aunque no la obligación) a comprar un activo subyacente (en este caso, un bono cupón-cero) en un instante predeterminado fijo (fecha de expiración o vencimiento de la opción). Sea K el precio de ejercicio de esta opción, es decir, el precio a que se compra el bono cupón-cero. Si se ejerce la opción en el instante en que expira, T_c , el poseedor de esta opción pagará una cantidad K y recibirá un bono al descuento que vence en el instante $T_b > T_c$. Este bono constituye el pago terminal de la opción. El precio de esta opción viene dado en el siguiente corolario:

Corolario I. El precio en el instante t de la opción europea de compra anteriormente descrita, $C(s, L, t, T_c; K, T_b)$, es

$$C(s, L, t, T_c; K, T_b) = P(s, L, t, T_b) \Phi(h + \sigma_{\tilde{P}}) - KP(s, L, t, T_c) \Phi(h)$$

donde

$$h = \frac{E[\ln(\tilde{P})] - \ln(K)}{\sigma_{\tilde{P}}}$$

$$\sigma_{\tilde{P}}^2 = \text{Var}[\ln(\tilde{P})]$$

$$\tilde{P} = P(s', L', T_c, T_b)$$

$P(\cdot)$ es la expresión del precio del bono cupon-cero obtenida en la Proposición 1 y $\Phi(\cdot)$ denota la función de distribución de una variable

aleatoria normal tipificada. Finalmente, s' , L' indican las variables aleatorias obtenidas en la Proposición 2.

Existe una gran similitud entre esta fórmula y la deducida por Black and Scholes (1973) para el precio de una opción cuyo activo subyacente es una acción. En ambas fórmulas, tenemos una variable aleatoria, \tilde{P} , que indica el precio del activo subyacente que se recibe cuando la opción vence y que sigue una distribución lognormal. También se verifica que el factor de descuento $P(s, L, t, T_c)$ y la varianza del logaritmo de \tilde{P} son análogos a dos de los términos incluidos en dicha fórmula.

Una vez valorada la opción europea de compra, los precios de las opciones europeas de venta (*put option*) se obtienen directamente utilizando la paridad «*call-put*», expresión que relaciona opciones de compra y de venta de iguales características.

b) Podemos extender la expresión obtenida en este corolario para calcular el precio de una **opción europea de compra sobre una cartera de bonos al descuento**. Esta extensión se realiza demostrando que esta opción es equivalente a una cartera de opciones de compra, con ciertos precios de ejercicio que han de ser calculados, sobre bonos cupon-cero. Más aún, puesto que un bono que paga cupones puede interpretarse como un caso particular de la cartera de bonos que hemos considerado hasta ahora, la expresión obtenida nos permite valorar cualquier opción sobre bonos con cupón. Este argumento también es válido para opciones de venta sobre una cartera de bonos al descuento.

c) Un **cap de tipos de interés** es un tipo de opción que establece un valor máximo sobre el pago de los intereses que se pagan en un préstamo a interés variable. Así, un *cap* garantiza que —en cualquier instante— el tipo de interés correspondiente a este préstamo será el menor de dos valores: el tipo de interés de ese instante y un cierto valor, conocido como el *tipo de interés cap*. Por tanto, este instrumento financiero nos protege frente a la subida del tipo de interés por encima del tipo de interés *cap*.

Mediante ciertos pasos algebraicos, se puede probar que la cantidad que debe pagar el emisor del *cap*, en un determinado instante, corresponde al pago de una opción de venta (llamada *caplet*) que vence en ese instante y cuyo activo subyacente es un bono que vence un período después. Puesto que un *cap* es una sucesión de este tipo de opciones, dicho activo se puede interpretar como una cartera de opciones europeas de venta sobre bonos al descuento.

d) Un **floor de tipos de interés** puede definirse de modo análogo al *cap*. Así, un *floor* establece un límite inferior sobre el tipo de interés a pagar y, por tanto, protege contra una bajada en los tipos de interés más allá de un cierto nivel (*tipo de interés floor*). De modo similar a los *caps*, un *floor* se puede interpretar como una cartera de opciones europeas de compra sobre bonos al descuento.

e) Un **swap** es un acuerdo privado entre dos compañías, A y B, para intercambiar un flujo de capitales en el futuro de acuerdo con una fórmula predeterminada. El tipo de permuta más común es el *swap de tipos de interés* en el que B acuerda hacerle a A una serie de pagos periódicos como intereses (a un tipo de interés fijo) correspondientes a una cantidad (llamada principal de la operación) durante una serie de períodos. Al mismo tiempo, B recibirá intereses (a tipo de interés variable) correspondientes al mismo principal y durante el mismo número de períodos. Los principales no se intercambian.

La operativa de este instrumento implica que esta permuta se puede interpretar como un acuerdo para intercambiar un bono a tipo de interés fijo por un bono a tipo de interés variable. Por tanto, el precio del *swap* es la diferencia entre el precio de estos dos bonos.

f) Una **opción a la medida** es una opción en la que su poseedor, en el instante de vencimiento de dicha opción, puede elegir que el activo subyacente sea una opción de compra o una de venta. Suponiendo que las opciones entre las que se puede elegir son europeas y que tienen el mismo precio de ejercicio y el mismo vencimiento, se puede demostrar que esta opción a la medida es una combinación de una opción de compra y una opción de venta. Por tanto, este tipo de opciones puede valorarse utilizando las fórmulas obtenidas para opciones sobre bonos al descuento. Por otro lado, si las opciones subyacentes difieren en el precio de ejercicio y/o en el vencimiento, una opción a la medida es similar a una opción compuesta (opción sobre una opción), cuyo precio también se puede obtener aplicando la Proposición 2.

6. Aplicación empírica

En esta sección se describen las características básicas de la aplicación empírica que se ha llevado a cabo. Los valores utilizados son diarios, corresponden a tipos de interés y a precios de bonos cupón-cero y fueron obtenidos gracias al Servicio de Estudios del

Banco de España¹¹. Los datos para los precios de los bonos cupón-cero comprenden desde el 2 de enero de 1991 hasta el 29 de diciembre de 1995. Consideramos diez vencimientos: 1, 7 y 15 días, 1, 3 y 6 meses y 1, 3, 5 y 10 años. Los tipos de interés están expresados en valores anualizados (compuestos continuamente) y comprenden el mismo período muestral, habiendo un total de 1.230 observaciones.

Mediante esta aplicación se comparan el comportamiento empírico del modelo presentado frente al comportamiento de un modelo alternativo. Dicha comparación se basa en la capacidad de ambos modelos para ajustarse a los datos observados y para predecir los datos futuros. Los períodos de estimación y predicción son 1991-1994 y el año 1995, respectivamente.

El diferencial de tipos de interés y el tipo de interés a largo plazo son las variables de estado de nuestro modelo de dos factores. El tipo de interés instantáneo sin riesgo y el tipo de interés a largo plazo son aproximados por los tipos de interés a 1 día y 10 años, respectivamente. Por tanto, el *spread* es la diferencia entre los tipos de interés correspondientes a estos dos vencimientos.

Los gráficos del diferencial de tipos de interés y de los tipos de interés así como de los cambios en dichas variables se incluyen en las Figuras 2 y 3. Las dos series de tipos de interés crecen en el período marzo-octubre de 1992 y desde junio de 1994 hasta marzo de 1995 y decrecen en el primer semestre de 1991, en el período junio-diciembre de 1993 (donde alcanzan su valor mínimo, cercano al 7 %) y en el segundo semestre de 1995. Los tipos de interés a corto plazo superan el 10 % hasta octubre de 1993 mientras los tipos de interés a largo plazo superan este nivel en todo el período muestral excepto desde junio de 1993 hasta junio de 1994.

Centrándonos en los cambios en las variables explicativas, la mayoría de los cambios en los tipos de interés a corto plazo son inferiores al 1 %. Los mayores cambios en esta variable (alrededor de un 4 %) corresponden a la segunda semana de mayo de 1993. Por el contrario, los cambios en los tipos de interés a largo plazo son mucho más suaves, se mueven en un intervalo mucho más estrecho y nunca superan los 80 puntos básicos. Por tanto, los cambios en el diferencial de tipos de interés son similares a los cambios en los tipos de interés a corto plazo. Así, el diferencial varía menos de un 1 % excepto en la segunda semana de mayo de 1993 cuando observamos los máximos cambios en esta variable, cercanos al 4 %.

¹¹ Véase Núñez (1995) para más detalles sobre estos datos y el método de estimación utilizados para su construcción.

FIGURA 2
Representación gráfica de las variables de estado

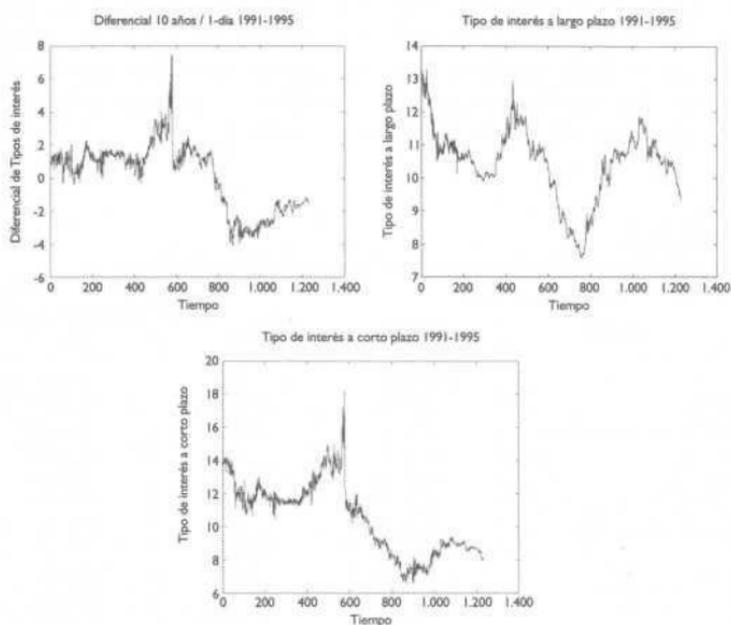
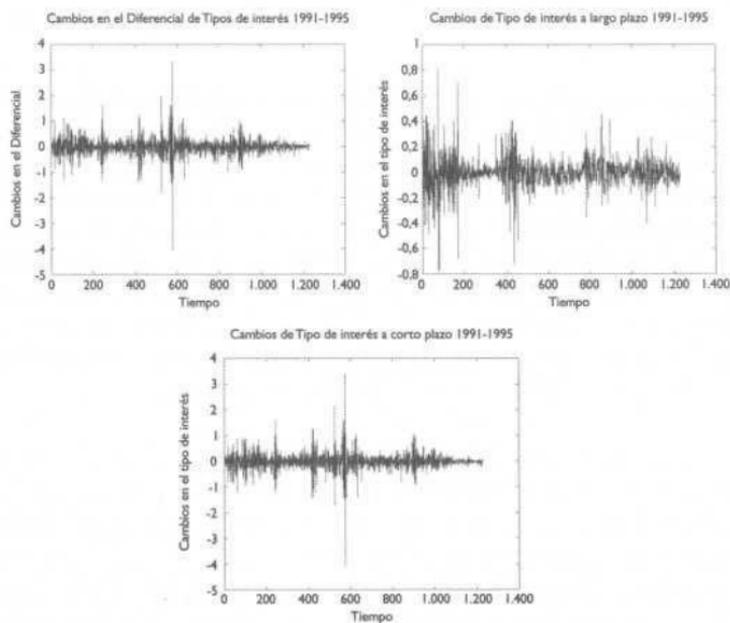


FIGURA 3
Representación gráfica de los cambios de las variables de estado



La tabla II incluye los estadísticos descriptivos y la estructura de autocorrelación de todas las variables de estado. En concreto, la mitad superior de esta tabla incluye la media aritmética, la varianza, los valores extremos y los coeficientes de asimetría y de exceso de curtosis de estas variables. Estas características numéricas relacionadas con la localización, dispersión y forma se calculan para nuestros datos durante todo el período muestral.

TABLA II
Estadísticos descriptivos de las variables de estado

Variable	Spread	Tipo de interés a l/p	Tipo de interés a c/p
n.....	1230	1230	1230
Media.....	0,0925	10,4467	10,5393
Desviación estándar....	1,9696	1,0884	2,1808
Mínimo.....	-4,078	7,5794	6,5306
Máximo.....	7,433	13,2838	18,2134
Coefficiente de asimetría.	-0,2713	-0,5503	0,1694
Exceso de curtosis.....	-0,5990	0,3995	-0,8461
ρ_1	0,9842	0,9919	0,9861
ρ_2	0,9758	0,9854	0,9786
ρ_3	0,9718	0,9780	0,9745
ρ_4	0,9667	0,9718	0,9693
ρ_5	0,9625	0,9655	0,9647
ρ_6	0,9590	0,9591	0,9608

Esta tabla incluye los estadísticos descriptivos y la estructura de autocorrelación de las variables de estado. La media aritmética, desviación estándar, los valores extremos, el coeficiente de asimetría, el exceso de curtosis y los coeficientes de autocorrelación de orden i , denotados por ρ_i , se calculan desde enero de 1991 hasta diciembre de 1995. Los datos están en términos porcentuales. n denota el número de observaciones.

Durante este período, el valor medio de los dos tipos de interés es superior al 10 %. El tipo de interés a corto plazo es más volátil y se mueve a lo largo de un intervalo de valores más amplio que el tipo de interés a largo plazo. Por otro lado, el diferencial de tipos de interés tiene un valor medio muy cercano a cero y toma valores entre -4 % y 8 %. Los tipos de interés a corto plazo alcanzan sus valores máximo (18,21 %) y mínimo (6,53 %) el 13 de mayo de 1993 y el 7 de junio de 1994, respectivamente. Análogamente, los valores extremos de los tipos de interés a largo plazo (13,28 % y 7,58 %) se dan el 6 de febrero de 1991 y el 1 de febrero de 1994, respectivamente.

Los coeficientes de autocorrelación de las variables de estado se incluyen en la mitad inferior de la tabla II. Dichos coeficientes son indicativos de la relación entre los valores de las variables correspondientes a diferentes instantes y, por tanto, informan sobre las propiedades de estacionariedad de dichas variables. Como estos valores son cercanos a la unidad y decaen muy lentamente, se de-

duce que la principal característica de nuestros datos es el alto grado de correlación serial que presentan todas las series.

Los rasgos más destacados en relación con los cambios sucedidos en nuestros factores explicativos se reflejan en la tabla III. Se observa que los cambios medios en los tipos de interés son negativos aunque bastante cercanos a cero. Por tanto, en este período muestral, se constata que se ha producido una pequeña bajada —en media— en los tipos de interés. Como este valor medio decrece con el vencimiento del tipo de interés, deducimos que los tipos de interés a largo plazo descienden menos que los tipos de interés a corto plazo. Como consecuencia, el valor medio de los cambios en el *spread* es negativo.

Los cambios en los tipos de interés a largo plazo están menos dispersos que los cambios en los tipos de interés a corto plazo. Las dos series de tipos de interés muestran un gran coeficiente de curtosis (indicativo de valores atípicos en la distribución de las variables) aunque este coeficiente decrece con el vencimiento.

La tabla III también muestra la estacionariedad de los cambios de las variables de estado. Los coeficientes de autocorrelación de estos cambios decaen más rápidamente (en comparación con las variables originales) y son prácticamente nulos para retardos suficientemente grandes. Como el coeficiente de autocorrelación de primer orden es negativo en todas las variables, deducimos que subidas en estas variables tenderán a ir seguidas por bajadas y, por tanto, el *spread* y los tipos de interés muestran evidencia de reversión a la media.

La tabla IV incluye los coeficientes de correlación entre las variables que reflejan los cambios de las variables de estado. Esta tabla muestra la escasa relación lineal que existe entre los cambios del *spread* y los cambios de los tipos de interés a largo plazo y, por tanto, sugiere que nuestro supuesto teórico sobre la ortogonalidad existente entre las variables de estado se corrobora empíricamente.

A continuación, comparamos el comportamiento empírico del modelo de dos factores frente a un modelo alternativo. Dicho modelo alternativo es unifactorial y supone que la única variable de estado relevante es el tipo de interés a corto plazo. Análogamente a lo realizado para las variables de estado del modelo de dos factores, debemos realizar ciertos supuestos sobre el precio de mercado del riesgo asociado a la variable de estado de este modelo y sobre el proceso que puede ayudar a explicar los movimientos que se producen en los tipos de interés a corto plazo. Una vez realizados estos supuestos, se obtiene una fórmula matemática para el precio de un bono cupon-cero cuando el precio de este activo de-

TABLA III
Estadísticos descriptivos de los cambios de las variables de estado

Variable	Spread	Tipo de interés a l/p	Tipo de interés a c/p
n.....	1229	1229	1229
Media.....	-0,00165	-0,00284	-0,00449
Desviación estándar....	0,34792	0,11608	0,3453
Mínimo.....	-4,0344	-0,7715	-4,0929
Máximo.....	3,3687	0,8188	3,417
Coefficiente de asimetría..	-0,4659	-0,12488	-0,45456
Exceso de curtosis.....	25,0356	8,70715	27,553
ρ_1	-0,2393	-0,1508	-0,2565
ρ_2	-0,1435	0,0356	-0,1415
ρ_3	0,0396	-0,0699	0,0451
ρ_4	-0,0312	-0,0099	-0,0289
ρ_5	-0,0261	0,0353	-0,0259
ρ_6	0,0693	-0,0577	0,0590

Esta tabla incluye los estadísticos descriptivos y la estructura de autocorrelación de los cambios de las variables de estado. La media aritmética, desviación estándar, los valores extremos, el coeficiente de asimetría, el exceso de curtosis y los coeficientes de autocorrelación de orden j , denotados por ρ_j , se calculan desde enero de 1991 hasta diciembre de 1995. Los datos originales están en términos porcentuales. n denota el número de observaciones.

TABLA IV
Matriz de correlaciones de los cambios de las variables de estado

Variable	Spread	Tipo de interés a l/p	Tipo de interés a c/p
Spread.....	1,0000		
Tipo de interés a l/p....	-0,1891	1,0000	
Tipo de interés a c/p....	0,9439	0,1456	1,0000

Esta tabla incluye los coeficientes de correlación entre los cambios de las variables de estado. Estos coeficientes se calculan desde enero de 1991 hasta diciembre de 1995. Los datos originales están en términos porcentuales.

pende de su vencimiento y de los valores del tipo de interés a corto plazo. Por tanto, realizamos los siguientes supuestos, análogos a los propuestos para el modelo bifactorial:

Supuesto 3. El precio de mercado del riesgo del tipo de interés a corto plazo es lineal en esta variable, es decir

$$\lambda_3(\cdot) = e + fr$$

Supuesto 4. El tipo de interés a corto plazo sigue el proceso de difusión

$$dr = k_3(\mu_3 - r) dt + \sigma_3 dw_3$$

Análogamente a los procesos supuestos para las variables del modelo bifactorial, el parámetro k_3 refleja la velocidad de ajuste del tipo de interés a corto plazo hacia su valor medio a largo plazo (μ_3), σ_3 es la desviación estándar (constante) de esta variable de estado y los posibles valores de dw_3 son los que originan los movimientos en el tipo de interés a corto plazo.

Utilizando este modelo, la expresión analítica del precio de un bono al descuento libre de riesgo es análoga a la obtenida para el modelo bifactorial en la Proposición 1:

$$P(r, t, T) = P(r, \tau) = A_3(\tau) \exp \{-D(\tau)r\}$$

donde

$$A_3(\tau) = \exp \left\{ -\frac{\sigma_3^2}{4q_3} D^2(\tau) + r^* [D(\tau) - \tau] \right\}$$

$$D(\tau) = (1 - e^{-q_3 \tau}) / q_3$$

con

$$q_3 = k_3 + f\sigma_3, \quad r^* = \hat{\mu}_3 - \sigma_3^2 / (2q_3^2), \quad \hat{\mu}_3 = (k_3\mu_3 - e\sigma_3) / q_3$$

Tal como se refleja en las fórmulas de valoración de bonos cupón-cero obtenidas en ambos modelos, el precio de estos bonos depende de una serie de parámetros. Dichos parámetros se estiman mediante un procedimiento que comprende dos etapas pues la estimación en una sola etapa es muy complicada desde un punto de vista computacional debido al gran número de parámetros que deben ser estimados y a la no linealidad de la fórmula obtenida. En la primera etapa se utilizan los datos correspondientes a los tipos de interés y se estiman los parámetros incluidos en los procesos de difusión propuestos para cada variable. Para realizar esta estimación se utiliza una aproximación en tiempo discreto al proceso de difusión.

Los resultados de esta primera etapa de estimación para el período completo 1991-1995 se incluyen en la tabla V y muestran que los parámetros de la especificación en tiempo discreto son diferentes de cero. Por tanto, los parámetros de difusión son también significativamente distintos de cero y, como consecuencia, existe evidencia de reversión a la media en los tipos de interés y en el diferencial de tipos de interés. Ambos tipos de interés tienden a un valor cercano al 10%. El *spread* tiende a un valor medio cercano a cero y es la variable de estado con mayor velocidad de reversión a la media.

TABLA V
Estimación de los parámetros de difusión

Variable	a	b	k	μ	σ
Spread.....	-2.08×10^{-4} (-0,0210)	-0,01544 (-3,0756)	0,01544 (3,0756)	-0,01347 (-0,021)	0,3467
Tipo de Interés a l/p....	0,0732 (2,2968)	-0,00728 (-2,3988)	0,00728 (2,3988)	10,05747 (20,881)	0,1159
Tipo de Interés a c/p....	0,13086 (2,6980)	-0,01284 (-2,8498)	0,01284 (2,8498)	10,19102 (13,155)	0,3443

Esta tabla incluye los valores estimados para los parámetros (con t-valores entre paréntesis) de los procesos Vasicek que siguen cada una de las variables de estado. El periodo muestral abarca desde enero de 1991 hasta diciembre de 1995. Los parámetros son estimados por el método de mínimos cuadrados ordinarios aplicado a las siguientes ecuaciones que reflejan la versión en tiempo discreto de los modelos en tiempo continuo propuestos para cada una de las variables de estado analizadas

$$\begin{aligned}
 s_t - s_{t-1} &= a_1 + b_1 s_{t-1} + \varepsilon_t^s, & \varepsilon_t^s &\approx \text{IID}(0, \sigma_1^2) \\
 L_t - L_{t-1} &= a_2 + b_2 L_{t-1} + \varepsilon_t^L, & \varepsilon_t^L &\approx \text{IID}(0, \sigma_2^2) \\
 r_t - r_{t-1} &= a_3 + b_3 r_{t-1} + \varepsilon_t^r, & \varepsilon_t^r &\approx \text{IID}(0, \sigma_3^2)
 \end{aligned}$$

Una vez que hemos estimado los parámetros de difusión, la segunda etapa de la estimación utiliza estos valores estimados para obtener los restantes parámetros de las expresiones de valoración obtenidas, incluidos en los precios de mercado del riesgo relacionados con las variables de estado de ambos modelos. La idea básica de esta segunda etapa es igualar, día a día, el precio teórico (dado por la fórmula de valoración obtenida) y el precio observado en el mercado. Así, siguiendo a Das (1994a), utilizamos las igualdades

$$P = P(q_1, q_2, s^*, L^* | k_1, k_2, \mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2; s, L, \tau) + \varepsilon$$

$$P = P(q_3, r^* | k_3, \mu_3, \sigma_3; r, \tau) + \varepsilon$$

donde P es el precio observado en cada día del bono al descuento, P(.) es la expresión teórica obtenida para el precio del bono en cada uno de los modelos y ε es un término de error. En ambas igualdades expresamos de modo explícito los parámetros (diarios) que queremos estimar aprovechando la información proporcionada por los parámetros estimados, para todo el periodo muestral, en la anterior etapa.

Los precios diarios de los bonos cupón-cero se incluyen en una matriz de datos con 1.230 filas y 10 columnas. Cada fila contiene los (diez) precios de que disponemos en cada día. Cada columna incluye los precios de bonos que corresponden a un cierto vencimiento: la primera columna contiene los precios de los bonos a 1 día, la segunda columna contiene los precios de los bonos a 7 días,..., y la última columna incluye los precios de los bonos que vencen dentro de diez años.

Estimamos los parámetros incluidos en ambas ecuaciones para cada uno de los días del período 1991-1995. Esta estimación, aplicada a la primera ecuación proporciona los parámetros del modelo de dos factores mientras que la estimación de la segunda igualdad proporciona los parámetros del modelo unifactorial. Los resultados de dicha estimación revelan que todos los parámetros son altamente significativos.

Llegados a este punto, podemos utilizar los valores estimados de todos los parámetros para obtener explícitamente los precios (diarios) de mercado del riesgo relacionado con cada una de las variables de estado. Para el período completo, se comprueba que dichos precios son positivos y significativamente diferentes de cero. El precio medio más alto corresponde al tipo de interés a largo plazo mientras el precio medio más bajo es el correspondiente al diferencial de tipos de interés.

Dividiendo este período por años, los parámetros también son significativamente diferentes de cero. Operando con el modelo de un factor, el valor medio del precio de mercado del riesgo es positivo en los tres primeros años y alcanza los máximos valores en 1993. El precio medio de mercado del riesgo del diferencial de tipos de interés es también negativo en los dos últimos años del período considerado. Por otro lado, el precio de mercado del riesgo de los tipos de interés a largo plazo tiene un valor (medio) positivo en 1993 (donde alcanza su máximo) y en 1995 siendo negativo en los restantes años.

Como parte final de la aplicación empírica, utilizamos todos los parámetros estimados para analizar la capacidad de ajuste a los datos observados y de predicción de los datos futuros del modelo de dos factores en comparación con el modelo unifactorial.

Así, utilizamos ambos modelos para estimar los precios de los bonos cupón-cero en el período 1991-1994 y para predecir estos precios en el año 1995. Cada día del período 1991-1994, los datos estimados se obtienen incluyendo en la fórmula de valoración obtenida los parámetros de difusión estimados en la primera etapa y los parámetros (diarios) estimados en la segunda fase. De este modo se calcula el precio teórico que, según cada modelo, deberíamos observar cada día en el mercado. Para generar predicciones *k*-pasos hacia adelante para estos precios, en ambos modelos, tomamos los coeficientes estimados en cada día como información previa necesaria para generar los precios correspondientes a *k* días después. Este procedimiento se continúa diariamente a lo largo del período de predicción hasta el último día de 1995.

Después de obtener los valores estimados y predichos, calculamos los errores de valoración (estimación o predicción) diarios de ambos

modelos para realizar la comparación entre ellos. Así, definimos, para el instante t , el error absoluto, e_t , y el error porcentual, EP_t , como

$$e_t = P_t - \hat{P}_t, \quad EP_t = \frac{P_t - \hat{P}_t}{P_t} 100$$

donde P_t y \hat{P}_t son, respectivamente, el precio observado y el teórico (estimado o predicho), en el instante t , del bono al descuento con un cierto vencimiento. Por tanto, el error absoluto es igual a la diferencia entre el precio teórico y el precio observado mientras que el error porcentual es igual al error absoluto dividido por el precio del bono observado en cada día.

Los errores absolutos de valoración para ambos modelos, en el período completo de estimación, están representados en la Figura 4. Considerando los tipos de interés a más corto plazo (vencimientos inferiores a un mes), ambos modelos muestran un gran error de valoración en la segunda semana de mayo de 1993. Este error coincide con un brusco cambio (mencionado anteriormente) en los tipos de interés a corto plazo y en el *spread* y también aparece en el resto de vencimientos cuando utilizamos el modelo de dos factores.

FIGURA 4
Errores absolutos de estimación de los modelos de uno y dos factores

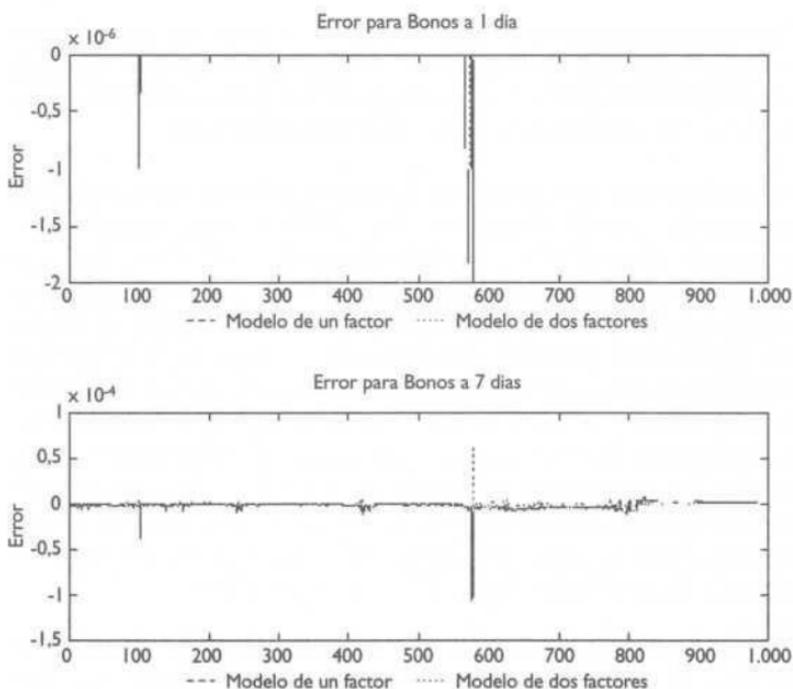


FIGURA 4 (cont.)
Errores absolutos de estimación de los modelos de uno y dos factores

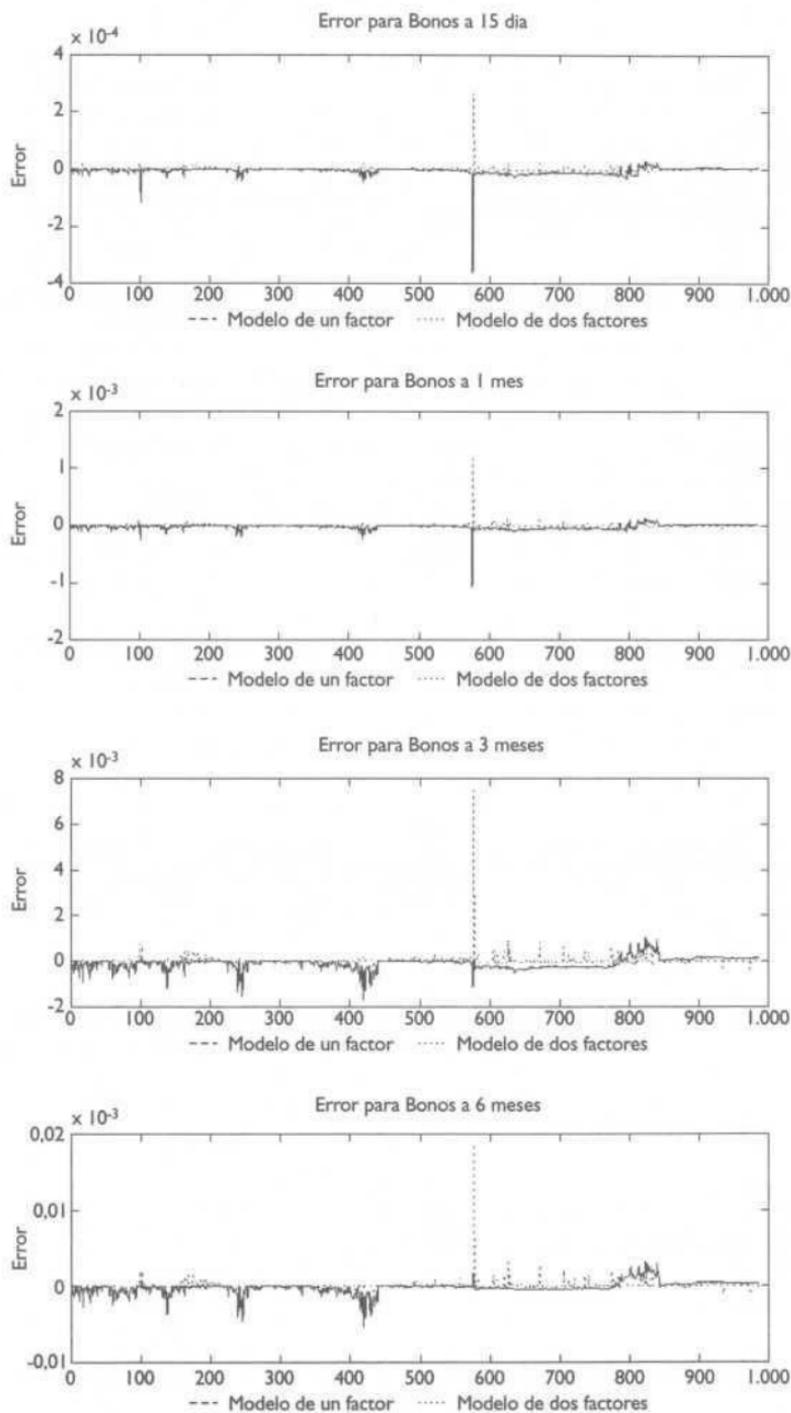
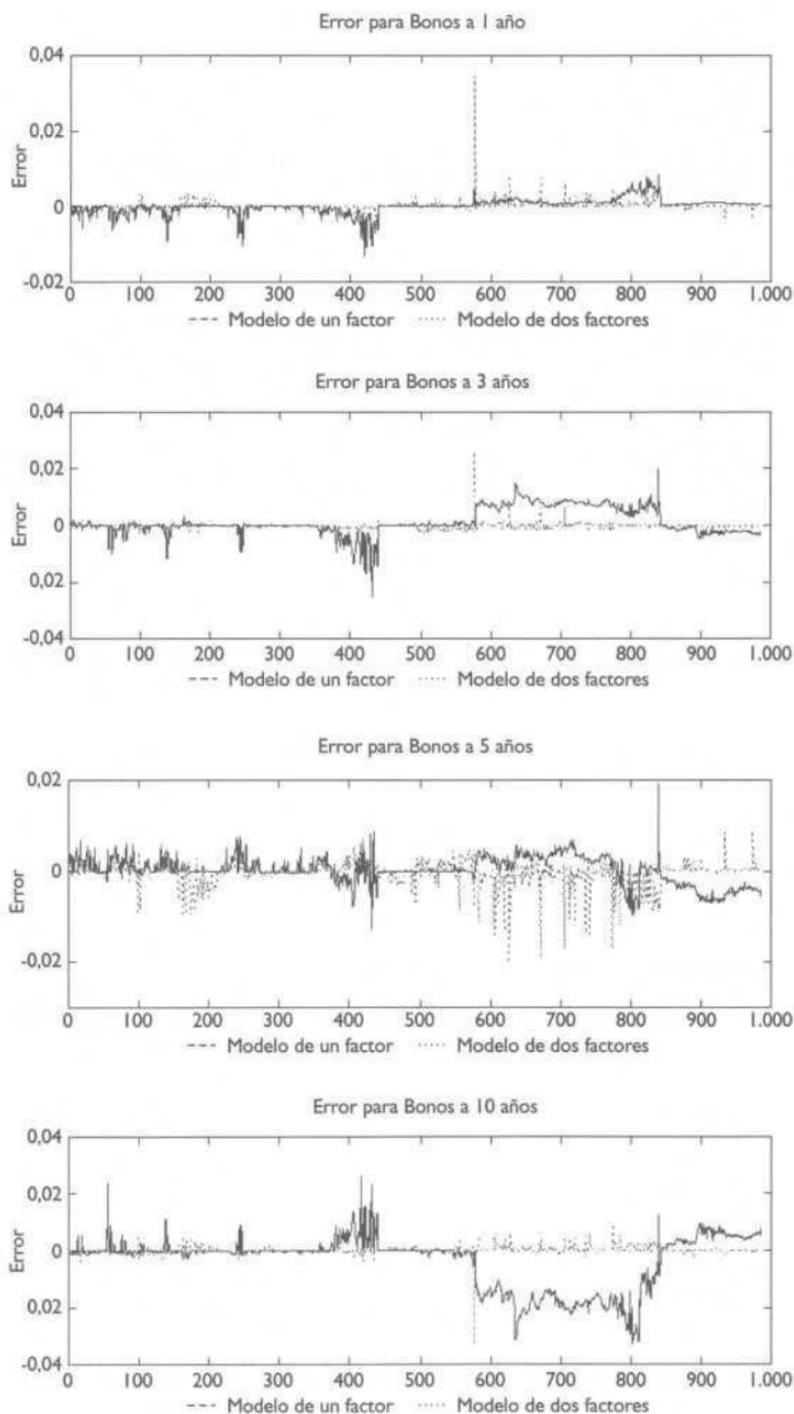


FIGURA 4 (cont.)
Errores absolutos de estimación de los modelos de uno y dos factores



El modelo de un factor, para vencimientos de 3 meses a 3 años, sobreestima el precio de los bonos en 1991 y 1992, período donde los tipos de interés a corto plazo superan el 10 %. En estos vencimientos, los mayores errores positivos, que indican infravaloración del precio de los bonos, se dan en el primer semestre de 1994, período en el que los tipos de interés a corto plazo fueron inferiores al 8 %. Para el mayor vencimiento analizado, 10 años, el modelo de un factor refleja el resultado opuesto: infravaloración en 1991-1992 y sobrevaloración desde enero de 1993 hasta junio de 1994. Finalmente, ninguna de las representaciones gráficas incluidas en esta figura sugiere que los errores del modelo de dos factores sigan un patrón de modo sistemático.

Para comparar más detalladamente el comportamiento empírico de ambos modelos, se calculan cinco medidas relacionadas con los errores de valoración. Estas medidas son las siguientes:

1. **Error Medio (EM).** Esta medida es la media aritmética de los errores y, por tanto, da igual peso a los errores de cada día. Si los errores son sumados, los valores positivos pueden cancelarse con los valores negativos y el error medio puede ser pequeño, aunque los errores diarios sean de gran tamaño.
2. **Error Absoluto Medio (EAM).** Esta medida es también conocida como desviación absoluta media y es igual a la media aritmética del valor absoluto de los errores. Al igual que el error medio, pondera igual a todos los errores diarios aunque ahora los valores positivos y negativos no se cancelan.
3. **Raíz Cuadrada del Error Cuadrático Medio (RECM).** Es una de las medidas de ajuste más empleadas y es igual a la raíz cuadrada de la media aritmética del cuadrado de los errores.
4. **Error Absoluto Medio Porcentual (EAMP).** Esta medida es similar al error absoluto medio pero pondera cada error mediante el precio del bono observado en el día. Por tanto, es igual a la media aritmética del valor absoluto de los errores porcentuales.
5. **Raíz Cuadrada del Error Cuadrático Medio Porcentual (RECMC).** Es similar a la raíz cuadrada del error cuadrático medio con la diferencia de que utiliza los errores diarios porcentuales.

Estas medidas, utilizando ambos modelos, se calculan para los períodos de estimación y de predicción así como para diferentes sub-

períodos. Así, los resultados para el período completo de estimación (1991-1994) se incluyen en la tabla VI. En este período, el modelo de un factor sobreestima los precios de los bonos con vencimiento inferior a 6 meses así como el precio de los bonos a 10 años. Por otro lado, el modelo de dos factores infravalora los bonos que vencen antes de un año así como los bonos a 10 años.

TABLA VI
Medidas de los Errores de Estimación. 1991-1994

Modelo de un factor					
Vencimiento	EM	EAM	RECM	EAMP	RECMP
1 día	-0,000000	0,000000	0,000000	0,000012	0,000020
7 días	-0,000002	0,000002	0,000005	0,000228	0,000463
15 días	-0,000005	0,000007	0,000016	0,000753	0,001570
1 mes	-0,000017	0,000028	0,000052	0,002849	0,005281
3 meses	-0,000078	0,000165	0,000256	0,016969	0,026337
6 meses	-0,000116	0,000424	0,000742	0,044640	0,078232
1 año	0,000106	0,001154	0,001969	0,127859	0,219042
3 años	0,001170	0,003030	0,004746	0,402362	0,632349
5 años	0,000208	0,002157	0,003050	0,358169	0,508367
10 años	-0,003633	0,006202	0,010055	1,587365	2,506414

Modelo de dos factores					
Vencimiento	EM	EAM	RECM	EAMP	RECMP
1 día	-0,000000	0,000000	0,000000	0,000010	0,000016
7 días	-0,000000	0,000001	0,000004	0,000106	0,000421
15 días	0,000000	0,000003	0,000015	0,000321	0,001519
1 mes	0,000003	0,000012	0,000053	0,001239	0,005413
3 meses	0,000034	0,000074	0,000273	0,007631	0,028254
6 meses	0,000109	0,000200	0,000712	0,021114	0,075686
1 año	0,000241	0,000480	0,001457	0,053265	0,162536
3 años	-0,000081	0,000517	0,001156	0,070541	0,159114
5 años	-0,000481	0,001547	0,002887	0,256526	0,467754
10 años	0,000157	0,000606	0,001535	0,167148	0,432554

Esta tabla contiene las medidas relacionadas con los errores de estimación de los modelos de uno y dos factores para el período 1991-1994. Consideramos bonos cupón cero con valor nominal igual a una unidad monetaria y vencimientos desde 1 día hasta 10 años. Hemos calculado cinco medidas: el error medio (EM), el error absoluto medio (EAM), la raíz cuadrada del error cuadrático medio (RECM), el error absoluto medio porcentual (EAMP) y la raíz cuadrada del error cuadrático medio porcentual (RECMP).

Puede verse que todas las medidas calculadas indican que ambos modelos se ajustan muy bien a los datos. Otra característica interesante es que, aunque dichas medidas crecen a medida que consideramos vencimientos superiores, el error absoluto medio porcentual del modelo de uno y dos factores nunca sobrepasa el 1,6 % y el 0,3 %, respectivamente.

Las dos medidas relacionadas con el valor absoluto de los errores (EAM, en términos absolutos y EAMP, en porcentuales), indican

que los valores estimados con el modelo de dos factores se ajustan mejor a los datos observados que los estimados con el modelo de un factor. Así, los valores estimados con el modelo bifactorial reducen las medidas de error del modelo de un factor en más de la mitad si consideramos los bonos que vencen antes de un año mientras que esta mejora se eleva a más del 80 % si examinamos los bonos a 3 y 10 años.

Esta tabla también refleja que, utilizando un criterio basado en el cuadrado de los errores (véanse las medidas RECM y RCMP), el modelo bifactorial genera unos valores estimados mucho más cercanos a los datos observados, especialmente en bonos a 3 y 10 años. Solamente en el caso de bonos a 1 y 3 meses, el modelo de un factor se comporta ligeramente mejor que el modelo de dos factores.

Para complementar la comparación realizada para todo el período de estimación, estas cinco medidas son calculadas para diferentes subperíodos. A continuación, comentamos los resultados obtenidos para todos los vencimientos en el año 1992 y para cada semestre del período de estimación cuando analizamos bonos que vencen dentro de 10 años ¹².

Centrándonos en el año 1992, se comprueba que el modelo de un factor produce una ligera sobrevaloración en todos los vencimientos, excepto en los bonos a 10 años. Al igual que en el período 1991-1994, el modelo de dos factores sobreestima ligeramente los precios de los bonos que vencen antes de seis meses.

En este año, todas las medidas muestran la superioridad en el ajuste del modelo de dos factores con respecto al modelo de un factor. En todos los vencimientos excepto 5 años, las medidas de los errores del modelo unifactorial triplican las correspondientes al modelo de dos factores. Análogamente a lo observado en el período total de estimación, las mayores mejoras en el ajuste a los datos observados se encuentran en los bonos a 3 y 10 años donde los valores calculados para los errores de estimación del modelo de dos factores son menos del 20 % de los obtenidos con el modelo de un factor.

Concluimos la comparación entre los errores de estimación con el análisis semestral de los bonos a 10 años. En este caso, el modelo de un factor se comporta bastante bien en los dos primeros años aunque su ajuste empeora desde junio de 1993 hasta junio de 1994. Por otro lado, el modelo bifactorial se muestra superior durante todo el período de estimación, ajusta especialmente bien en

¹² Otros subperíodos fueron analizados y las conclusiones no cambian cualitativamente.

el primer semestre de 1992 y en el segundo de 1994 y su superioridad sobre el modelo de un factor es especialmente notable en los tres últimos semestres.

El poder predictivo de ambos modelos es analizado mediante predicciones uno y cinco pasos adelante de los precios diarios de los bonos, durante el año 1995, para cada vencimiento. Dada la información disponible en un determinado momento, dichas predicciones indican los precios de los bonos cupón-cero que se esperan uno y cinco días después respectivamente. Los valores correspondientes a los errores de predicción se muestran en las tablas VII-VIII.

La tabla VII incluye los resultados para las predicciones un paso adelante para el año 1995 y muestra que el comportamiento predictivo de ambos modelos es razonablemente bueno aunque

TABLA VII
Predicciones un paso adelante. 1995

Modelo de un factor					
Vencimiento	EM	EAM	RECM	EAMP	RECMP
1 día	0,000000	0,000002	0,000004	0,000241	0,000353
7 días	0,000001	0,000016	0,000024	0,001648	0,002410
15 días	0,000003	0,000032	0,000047	0,003246	0,004740
1 mes	0,000011	0,000068	0,000098	0,006831	0,009912
3 meses	0,000074	0,000188	0,000264	0,019189	0,026946
6 meses	0,000213	0,000345	0,000472	0,036095	0,049372
1 año	0,000423	0,000592	0,000782	0,065144	0,086047
3 años	-0,000827	0,001647	0,002221	0,225719	0,306270
5 años	-0,001998	0,002710	0,003500	0,467543	0,609406
10 años	0,002731	0,003469	0,004322	1,035002	1,300559
Modelo de dos factores					
Vencimiento	EM	EAM	RECM	EAMP	RECMP
1 día	0,000000	0,000002	0,000004	0,000241	0,000353
7 días	0,000000	0,000016	0,000024	0,001648	0,002410
15 días	0,000000	0,000032	0,000047	0,003242	0,004738
1 mes	-0,000001	0,000067	0,000098	0,006781	0,009874
3 meses	-0,000016	0,000180	0,000255	0,018363	0,026064
6 meses	-0,000065	0,000321	0,000436	0,033589	0,045608
1 año	-0,000209	0,000580	0,000767	0,063822	0,084462
3 años	-0,000239	0,001320	0,001790	0,180321	0,245460
5 años	0,000961	0,002096	0,002760	0,357493	0,473140
10 años	0,000177	0,002174	0,002889	0,641176	0,857203

Esta tabla contiene las medidas relacionadas con los errores de predicción un paso adelante de los modelos de uno y dos factores para el año 1995. Consideramos bonos cupón cero con valor nominal igual a una unidad monetaria y vencimientos de 1 día a 10 años. Hemos calculado cinco medidas: el error medio (EM), el error absoluto medio (EAM), la raíz cuadrada del error cuadrático medio (RECM), el error absoluto medio porcentual (EAMP) y la raíz cuadrada del error cuadrático medio porcentual (RECMP).

empeora a medida que aumenta el vencimiento del bono analizado. Ambos modelos se comportan de modo similar en los vencimientos más cortos pero, cuando se incrementa el vencimiento del bono, el modelo bifactorial predice mejor que el modelo de un factor. Así, todas las medidas de los errores se reducen más de un 20 % cuando consideramos bonos que vencen después de tres años.

Análogamente a las estimaciones, calculamos las medidas asociadas a los errores de predicción para distintos subperíodos. Así, por ejemplo, analizando mensualmente los errores de predicción del precio de los bonos a 10 años, se constata que el modelo de un factor se comporta mejor en el segundo semestre del año 1995 siendo el valor del EAMP siempre inferior al 1 %. Análogamente, esta medida para el modelo de dos factores suele ser cercana al 0,5 %. El comportamiento de este modelo es especialmente bueno en el primer cuatrimestre de 1995 cuando se reducen los errores del modelo de un factor en más de un 40 %.

La tabla VIII muestra los resultados obtenidos, en ambos modelos, cuando se predice cinco días hacia adelante el precio de los bonos. En este caso, el poder predictivo es ligeramente inferior al de las predicciones anteriores y decrece con el tiempo hasta el vencimiento. En ambos modelos, los errores porcentuales de predicción son inferiores al 1 % en todos los vencimientos excepto en los bonos a 10 años. Análogamente a las predicciones a un día, ambos modelos se comportan de modo similar en los vencimientos inferiores a tres meses. La superioridad del modelo bifactorial es más débil que en las predicciones anteriores pero aún se consigue una mejora (10 %) en la predicción de los precios de los bonos a 10 años.

El estudio trimestral de los diferentes vencimientos corrobora la superioridad del modelo bifactorial. Analizando los bonos a 6 meses, el valor del EAMP es inferior al 0,11 % en todos los trimestres. Ambos modelos predicen mejor en el segundo semestre de 1995. El modelo de dos factores mejora la capacidad predictiva del modelo unifactorial en, al menos, un 10 % en todos los trimestres. Si consideramos bonos a 10 años, el EAMP toma valores entre el 1 % y el 2,5 %. Una vez más, el modelo de dos factores predice mejor y reduce los valores de los errores absolutos medios en un 20 % en el primer trimestre de este año. En los restantes trimestres, la mejora de predicción nunca supera el 11 %.

TABLA VIII
Predicciones cinco pasos adelante. 1995

Modelo de un factor					
Vencimiento	EM	EAM	RECM	EAMP	RECOMP
1 día	0,000000	0,000004	0,000006	0,000425	0,000599
7 días	0,000001	0,000029	0,000041	0,002912	0,004107
15 días	0,000003	0,000057	0,000081	0,005764	0,008117
1 mes	0,000013	0,000121	0,000170	0,012228	0,017145
3 meses	0,000089	0,000338	0,000469	0,034582	0,047975
6 meses	0,000265	0,000638	0,000871	0,066794	0,091163
1 año	0,000588	0,001208	0,001623	0,132807	0,178648
3 años	-0,000178	0,003421	0,004461	0,467336	0,613071
5 años	-0,001071	0,004838	0,006269	0,829320	1,085631
10 años	0,003801	0,006263	0,007752	1,843197	2,291128

Modelo de dos factores					
Vencimiento	EM	EAM	RECM	EAMP	RECOMP
1 día	0,000000	0,000004	0,000006	0,000425	0,000600
7 días	0,000000	0,000029	0,000041	0,002909	0,004112
15 días	0,000001	0,000057	0,000081	0,005751	0,008135
1 mes	0,000001	0,000120	0,000171	0,012137	0,017204
3 meses	-0,000003	0,000327	0,000469	0,033434	0,047936
6 meses	-0,000017	0,000590	0,000857	0,061792	0,089773
1 año	-0,000052	0,001140	0,001600	0,125428	0,176266
3 años	0,000457	0,003296	0,004247	0,449916	0,582409
5 años	0,001967	0,004852	0,006077	0,826338	1,039909
10 años	0,001142	0,005498	0,006991	1,617977	2,074195

Esta tabla contiene las medidas relacionadas con los errores de predicción cinco pasos adelante de los modelos de uno y dos factores para el año 1995. Consideramos bonos cupón cero con valor nominal igual a una unidad monetaria y vencimientos desde 1 día a 10 años. Hemos calculado cinco medidas: el error medio (EM), el error absoluto medio (EAM), la raíz cuadrada del error cuadrático medio (RECM), el error absoluto medio porcentual (EAMP) y la raíz cuadrada del error cuadrático medio porcentual (RECOMP).

7. Conclusiones

En este capítulo se ha presentado un nuevo modelo endógeno en tiempo continuo de dos factores que intenta explicar la evolución en el tiempo de los tipos de interés. El principal supuesto de este tipo de modelos es que los tipos de interés se mueven de modo continuo a lo largo del tiempo. Además, el modelo expuesto supone que el precio de los bonos cupón-cero libres de riesgo depende exclusivamente del tiempo al vencimiento de dicho bono y de dos variables de estado: el tipo de interés a largo plazo y el diferencial de tipos de interés.

En consonancia con la evidencia empírica, la modelización propuesta para estos factores refleja que ambos presentan reversión a la media, es decir, convergen, a largo plazo, a un valor constante. Exigiendo que no haya oportunidades de arbitraje, se obtiene una

ecuación general de valoración de bonos. Esta ecuación, resuelta bajo ciertos supuestos, proporciona una fórmula matemática para el precio de bonos cupón-cero con diferentes vencimientos.

Esta ecuación de valoración también sirve para valorar bonos que pagan cupones y para obtener el precio de distintos tipos de opciones. Así, las fórmulas obtenidas se han utilizado para valorar opciones europeas sobre bonos al descuento. Se ha mostrado la similitud entre el precio obtenido para este tipo de opciones y la expresión encontrada por Black-Scholes para el caso de opciones europeas sobre acciones. Además, se ha extendido esta fórmula a la valoración de opciones sobre carteras de bonos al descuento. Como consecuencia, podemos valorar cualquier opción europea sobre bonos que pagan cupones. También se ha ilustrado el empleo de esta fórmula para valorar analíticamente otros tipos de opciones más complejas.

Finalmente, se ha analizado el comportamiento empírico de este modelo en comparación con un modelo unifactorial cuyo principal supuesto es que la única variable de estado relevante es el tipo de interés a corto plazo. Este análisis requiere estimar una serie de parámetros incluidos en la fórmula de valoración obtenida. La primera etapa de estimación se centra en los parámetros de difusión y los resultados sugieren evidencia de reversión a la media en los tipos de interés así como en el diferencial de tipos de interés. Los restantes parámetros se han estimado en una segunda etapa que nos permite identificar los precios diarios de mercado del riesgo relacionados con cada una de las variables de estado. Para el período 1991-1995, se ha mostrado que estos precios son positivos y significativamente diferentes de cero.

La parte final de la aplicación empírica consiste en evaluar la capacidad de ambos modelos para estimar y predecir precios de bonos cupón-cero con diferentes vencimientos, siendo 1991-1994 y 1995 los períodos de estimación y predicción, respectivamente. Para analizar esta capacidad, se han calculado los errores de estimación y predicción de ambos modelos así como cinco medidas numéricas que se derivan de ambos conjuntos de errores. Estas medidas se han obtenido para los períodos de estimación y de predicción y para diferentes subperíodos y los resultados son similares en ambos casos.

Aunque los dos modelos se ajustan muy bien a los datos, todas las medidas calculadas a partir de los errores indican que los valores estimados mediante el modelo de dos factores se acercan mucho más a los precios observados que los valores estimados por el modelo unifactorial cuyos errores son reducidos en más de un 50 %

en todos los vencimientos analizados. Más aún, las mayores mejoras en el ajuste se encuentran en los bonos a 3 y 10 años en los que todas las medidas de error del modelo de un factor se reducen en más de un 75 %.

El poder predictivo de ambos modelos se ha analizado mediante las predicciones (uno y cinco días hacia adelante) de los precios diarios de estos bonos durante el año 1995, para cada vencimiento. Aunque la capacidad predictiva de ambos modelos es razonablemente buena, las medidas de los errores muestran que las predicciones para mañana del modelo bifactorial se acercan más a los precios observados de los bonos que las predicciones obtenidas con el modelo de un factor. Ambos modelos predicen de modo similar en los vencimientos más cortos pero, considerando bonos con vencimientos superiores, todas las medidas de los errores se reducen en más de un 20 % cuando se utiliza el modelo de dos factores.

La calidad de las predicciones a más largo plazo, cinco días hacia adelante, es inferior a la obtenida con las predicciones a un día aunque ambos modelos aún predicen bastante bien. Las predicciones empeoran con el tiempo al vencimiento pero los errores, en términos porcentuales, son inferiores al 1 % en la mayoría de los casos. Aunque la superioridad del modelo de dos factores sobre el modelo de un factor es más débil que en las predicciones anteriores, aún se obtiene una mejora del 10 % para los bonos de más largo vencimiento.

Por tanto, la conclusión principal de este análisis es que, independientemente de las medidas utilizadas, de los subperíodos analizados o de los vencimientos considerados, la evidencia empírica sugiere que el modelo de dos factores es más adecuado (tanto para estimar como para predecir precios de bonos cupón-cero) que el modelo unifactorial.

Referencias bibliográficas

Ahn, C. M. and Thompson, H. E. (1988): «Jump-Diffusion Processes and Term Structure of Interest Rates», *Journal of Finance*, 43, 1, 155-174.

Ayres, H. R. and Barry, J. Y. (1980): «A Theory of the U.S. Treasury Market Equilibrium», *Management Science*, 26, 6, 539-569.

- Black, F. and Scholes, M. (1973):** «The Pricing of Options and Corporate Liabilities», *Journal of Political Economy*, 81, 3, 637-654.
- Brennan, M. J. and Schwartz, E. S. (1979):** «A Continuous Time Approach to the Pricing of Bonds», *Journal of Banking and Finance*, 3, 133-155.
- (1980): «Analyzing Convertible Bonds», *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 15, 4, 907-929.
- Chan, K. C.; Karolyi, G. A.; Longstaff, F. A. and Sanders, A. B. (1992):** «An Empirical Comparison of Alternative Models of the Short-Term Interest Rate», *Journal of Finance*, 47, 3, 1209-1228.
- Chen, L. (1996):** *Interest Rate Dynamics, Derivatives Pricing, and Risk Management*, Springer-Verlag, Berlin.
- Cox, J. C. (1975):** «Notes on Option Pricing I: Constant Elasticity of Variance Diffusions», *Working Paper*, Stanford University.
- Cox, J. C., Ingersoll, J. E. and Ross, S. A. (1980):** «An Analysis of Variable Rate Loan Contracts», *Journal of Finance*, 35, 2, 389-403.
- (1985a): «An Intertemporal General Equilibrium Model of Asset Prices», *Econometrica*, 53, 2, 363-384.
- (1985b): «A Theory of the Term Structure of Interest Rates», *Econometrica*, 53, 2, 385-408.
- Das, S. R. (1994a):** «Jump-Hunting Interest Rates», *Working Paper*, Stern School of Business, New York University.
- (1994b): «Jump-Diffusion Processes and the Bond Markets», *Working Paper*, Stern School of Business, New York University.
- Das, S. R. and Foresi, S. (1996):** «Exact Solution for Bond and Option Prices with Systematic Jump Risk», *Review of Derivatives Research*, 1.
- Dothan, U. L. (1978):** «On the Term Structure of Interest Rates», *Journal of Financial Economics*, 6, 1, 59-69.
- Hansen, L. P. (1982):** «Large Sample Properties of Generalized Method of Moments Estimators», *Econometrica*, 50, 45 1029-1054.

- Heath, D., Jarrow, R. and Morton, A. (1992):** «Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates: A New Methodology for Contingent Claims Valuation», *Econometrica*, 605 1, 77-105.
- Hull, J. (1997):** *Options, Futures and other Derivative Securities*, Third Edition, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.
- Hull, J. and White, A. (1990):** «Pricing Interest- Rate- Derivative Securities», *Review of Financial Studies*, 3, 4, 573-592.
- Jones, F. J. (1991):** «Yield Curve Strategies», *Journal of Fixed Income*, 33-41.
- Knez, P. J., Litterman, R., It., and Scheinkman, J. (1994):** «Explorations Into Factor Explaining Money Market Returns», *Journal of Finance*, 49, 5, 1861-1882.
- Litterman, R. and Scheinkman, J. (1991):** «Common Factors Affecting Bond Returns», *Journal of Fixed Income*, 1, 1, 54-61.
- Longstaff, F. A. and Schwartz, E. S. (1992):** «Interest Rate Volatility and The Term Structure: A Two-Factor General Equilibrium Model», *Journal of Finance*, 47, 4, 1259-1282.
- Merton, R. C. (1973):** «Theory of Rational Option Pricing», *Bell Journal Of Economics and Management Science*, 4, 1, 141-183.
- Moraleda, J. M. (1997):** *Avances recientes en la valoración de activos derivados en renta fija*, Mimeo, Erasmus University Rotterdam, The Netherlands.
- Moreno, M. (1996):** «A Two-Mean Reverting- Factor Model of the Term Structure of Interest Rates», *Finance and Banking Discussion Papers Series*, núm. 23, Universitat Pompeu Fabra de Barcelona.
- Moreno, M. (1997):** «Risk Management under a Two-Factor Model of the Term Structure of Interest Rates», *Finance and Banking Discussion Papers Series*, núm. 36, Universitat Pompeu Fabra de Barcelona.
- Moreno, M. and Peña, J. I. (1996):** «On the Term Structure of Interbank Interest Rates: Jump-Diffusion Processes and Option Pricing», en *Forecasting Financial Markets*, ed. by Christian Dunis, John Wiley & Sons Ltd., Sussex, England.
- Naik, V. and Lee, M. (1990):** «General Equilibrium Pricing of Options on the Market Portfolio with Discontinuous Returns», *Review of Financial Studies*, 3, 4, 493-521.

- Nelson, J. and Schaefer, S. M. (1983):** «The Dynamics of the Term Structure and Alternative Portfolio Immunization Strategies», en *Innovations in Bond Portfolio Management: Duration Analysis and Immunization*, eds. G. O. Bierwag, G. G. Kaufman, and A. Toevs, Greenwich, CT: JAI Press.
- Núñez, S. (1995):** *Estimación de la estructura temporal de los tipos de interés en España: elección entre métodos alternativos*, Documento de Trabajo 9522, Banco de España.
- Richard, S. F. (1978):** «An Arbitrage Model of the Term Structure of Interest Rates», *Journal of Financial Economics*, 6, 1, 33-57.
- Schaefer, S. M. (1980):** «Discussion», *Journal of Finance*, 35, 2, 417-419.
- Schaefer, S. M. and Schwartz, E. S. (1984):** «A Two-Factor Model of the Term Structure: An Approximate Analytical Solution», *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 19, 4, 413-424.
- Vasicek, O. (1977):** «An Equilibrium Characterization of the Term Structure», *Journal of Financial Economics*, 5, 2, 177-188.
- Zhang, H. (1993):** «Treasury Yield Curves and Cointegration», *Applied Economics*, 25, 3, 361-367.

Agradecimientos

Agradezco a J. Ignacio Peña, Xavier Freixas, Gonzalo Rubio, Fernando Restoy, Pablo Fernández, Alejandro Balbás, Javier F. Navas y Ángel León, por sus valiosos comentarios y sugerencias. También doy las gracias a Soledad Núñez por haberme proporcionado los datos aquí utilizados. Muchos de los resultados presentados se han beneficiado de los comentarios recibidos en las presentaciones realizadas en las III Jornadas de Economía Financiera, XXI Simposio de Análisis Económico, 6th European Financial Management Association Meeting, 4th Banque Nationales de Paris-Imperial College Conference on «Forecasting Financial Markets», workshop sobre «Statistical Inference for Mathematical Finance» y en los seminarios celebrados en el Centro de Estudios Monetarios y Financieros (CEMFI), Instituto MEFF, Universidad Carlos III, Universitat Pompeu Fabra y Universidad de Vigo. Los posibles errores son de mi exclusiva responsabilidad.

**MODELOS PARA VALORAR
OPCIONES SOBRE TIPOS DE
INTERÉS: UNA COMPARACIÓN
EMPÍRICA**

Juan M. Moraleda

Santander Investment y Universidad Carlos III de Madrid

Resumen

La práctica generalizada del mercado es valorar caps/floors y swaptions según el modelo de Black (1976). Y ello a pesar de que este modelo fue originariamente concebido para valorar opciones sobre futuros de materia primas. De hecho, el uso de este modelo para valorar opciones sobre tipos de interés es limitado y no se puede usar para valorar opciones Americanas o Bermudas y, en general, cualquier derivado que esté expuesto a más de un plazo o en más de un momento determinado a la curva de tipos de interés. Este modelo no sirve para valorar, por ejemplo, *Bonos o Depósitos Multi-Callable*.

Esta necesidad de ir más allá del modelo de Black (1976) ha provocado un gran esfuerzo investigador que ha dado lugar a los conocidos como modelos de la estructura temporal de tipos de interés. El objeto del presente estudio es el análisis, desde un punto de vista empírico, de los más significativos modelos de tipos de interés que se han propuesto en los últimos años. Para ello, se utiliza una base de datos diaria de *caps* y *floors* en USD durante los años 1993 y 1994 y se analizan tres modelos de tipos de contado («*spot*») y tres modelos de tipos de interés a plazo («*forward*»). La conclusión es que los modelos de tipos de contado («*spot*») proporcionan un mejor ajuste a los datos de mercado. En concreto, el modelo log-normal de Black y Karasinski (1991) es el que mejor resultados proporciona de forma sistemática.

1. Introducción

Como es sabido, existen formas alternativas de expresar la estructura temporal de tipos de interés que es la función que caracteriza, en un día determinado, los tipos de interés como una función del tiempo. Una posibilidad son los tipos de interés «spot» o al contado y es la más habitual e intuitiva. Como alternativa, la estructura temporal de tipos de interés se puede representar mediante factores de descuento e incluso como tipos de interés «forward». Estos últimos representan los tipos de interés que en un momento determinado del tiempo rigen para períodos futuros del tiempo. En primer lugar, presentaremos los modelos de tipos de interés «spot» y «forward» que son los modelos en los que nos centraremos en este estudio por tratarse de las variables más frecuentemente utilizadas para modelizar la curva de tipos de interés. A continuación, presentaremos los resultados empíricos conocidos en la literatura y la contribución que se aporta en el estudio de Moraleda & Pelsser. En tercer lugar, explicaremos la base de datos que estos autores utilizan así como la metodología. Por último, se analizan los resultados y se concluye. El cuadro I sintetiza este índice.

CUADRO I

Índice:

1. Modelos de tipos de interés «spot»
2. Modelos de tipos de interés «forward»
3. Resultados empíricos conocidos y contribución
4. Data y metodología
5. Resultados
6. Conclusiones

2. Modelos de tipos de interés

Moraleda y Pelsser (1996) comparan modelos de tipos de interés que puedan ser utilizados en la práctica para valorar todo tipo de opciones sobre tipos de interés. Por tanto, se centran exclusivamente en modelos que puedan modelizar toda la estructura de vencimientos de la curva de tipos de interés y no sólo un vencimiento. Además, sólo se fijan en modelos que puedan reproducir la estructura temporal de tipos de interés tal y como se observa en el mercado en el momento de valoración de instrumentos derivados. Ésta es precisamente la característica que distingue a los modelos exógenos de la curva de tipos de interés. Finalmente, sólo nos ocuparemos de modelos «path-independent» o Markov que es

una propiedad que hace que la evolución futura de los tipos de interés sólo dependa de su nivel presente y no de su evolución pasada hasta alcanzar el nivel actual.

Otras dos características serían deseables en todo modelo de tipos de interés que, sin embargo, no todos los modelos de este estudio satisfacen. En primer lugar, no todos los modelos de este estudio tienen soluciones analíticas para el precio de bonos y opciones. En segundo lugar, no todos los modelos poseen una distribución de probabilidad conocida para el tipo de interés instantáneo al contado o «spot», r . Esta carencia es fundamentalmente acusada en la mayoría de los modelos de tipos de interés «forward». El cuadro II adjunto resume estas características de los modelos en este trabajo

CUADRO II

Características de los modelos en este estudio:

1. Modelos de la estructura temporal de tipos de interés [no incluye Black (1976)]
2. Modelos exógenos de la curva de tipos de interés
3. Modelos path-independent (respecto a 1 ó 2 variables)

Sin embargo:

- No todos los modelos tienen soluciones analíticas para los precios de bonos y opciones
- No todos los modelos tienen una distribución de probabilidad conocida para el tipo de interés «spot» instantáneo, r .

2.1. Modelos de tipo de interés «spot» o al contado

Para presentar los modelos de tipos de interés «spot», utilizamos una notación introducida por Hull and White (1994) tal como aparece en el cuadro III. En efecto, si asumimos un proceso Ornstein-Uhlenbeck para un variable subyacente x , el tipo de interés «spot» instantáneo no es más que una transformación del proceso x . Así si tomamos $g(x)=x$ obtenemos una extensión del modelo de Vasicek introducida por Hull y White (1994). Si hacemos $g(x) = x^2$, obtenemos un modelo del tipo de Cox, Ingersoll y Ross (1985) pues como demostraremos más adelante, este modelo tiene una volatilidad proporcional a la raíz cuadrada del tipo de interés. En concreto el modelo que estudiaremos aquí y que se muestra en el cuadro III se debe a Pelsser (1996). El último de los modelos de tipos de interés «spot» en este trabajo es una versión en tiempo continuo del modelo de Black, Derman y Toy (1990) que se debe a Black y Karasinski (1991) tal como aparece en el cuadro III. Este modelo se obtiene mediante la transformación $g(x) = e^x$.

CUADRO III

Modelos de tipos de interés «spot» (SP) en este estudio		
$\begin{cases} dx = [\theta(t) - \beta x] dt + \sigma dW \\ r = g(x) \end{cases}$		
Casos particulares que estudiaremos		Notación
1. $g(x) = x$	\Rightarrow Hull y White (1994)	HW
2. $g(x) = x^2$	\Rightarrow Pelsser (1996)	SG
3. $g(x) = e^x$	\Rightarrow Black y Karasinski (1991)	BK

Una característica de todos los modelos del cuadro III, es que tienen reversion a la media en la medida en que su varianza decrece con el tiempo. En efecto, el proceso Ornstein-Uhlenbeck para x tiene una distribución de probabilidad estable en el tiempo con varianza

$$\frac{\sigma^2}{2\beta} (1 - e^{-2\beta t})$$

2.2. Modelos de tipo de interés «forward»

Una alternativa a la modelización de tipos de interés «spot» es la utilización de tipos de interés «forward». Esta técnica fue introducida por Heath, Jarrow y Morton en 1992 y puede entenderse como la extensión natural de Black y Scholes (1973) a la valoración de activos derivados en renta fija.

El principal problema de la clase de modelos de Heath, Jarrow y Morton (1992) es que, en su forma general, se trata de unos modelos que no son Markov. Esto quiere decir que un movimiento alcista de los tipos de interés seguido de un movimiento bajista no conducen al mismo punto que un movimiento bajista seguido de uno alcista. En terminología de árboles binomiales, se dice que el tipo de árbol que exigen estos modelos no recombinan o son «path-dependent». Y esto supone que los árboles crecen exponencialmente. Así, un árbol de estas características con 10 intervalos temporales tendría un total de 1,024 nudos finales, pero si aumentamos el número de intervalos temporales a 20, el número de nodos finales crece a más de un millón. Es claro, pues, que, dado el actual desarrollo de la ciencia informática, estos modelos son muy ineficientes pues obtener precios o estrategias de cobertura con ellos cuesta mucho tiempo. Mucho más tiempo, sin lugar a duda, que el razonable en una Mesa de Tesorería.

Recientemente, sin embargo, Ritchken y Sankarasubramanian (1995) han identificado una clase de modelos dentro del marco de HJM para los que es posible desarrollar árboles binomiales que recombinan, eso sí, respecto a dos variables. Este subconjunto identificado por Ritchken y Sankarasubramanian (1995), además, incluye casos particulares de relevancia económica como se ilustra en el cuadro IV.

CUADRO IV

Modelos de tipos de interés «forward»

- Heath, Jarrow y Morton (1992)

$$df(t, T) = \alpha(t, T) dt + \sigma(t, T) dW$$

- Ritchken y Sankarasubramanian (1995)

$$\sigma_{RS}(t, T) = \sigma_s(t) \exp\left(\int_t^T k(x) dx\right)$$

- Ejemplos

$$\sigma_{RS}(t, T) = \sigma [r(t)]^p e^{-K(T-t)}$$

$$\sigma_{RS}(t, T) = \sigma e^{-K(T-t)}$$

Los modelos de tipos de interés «forward» que estudiamos en este estudio (cuadro V) pertenecen a la clase de modelos identificada por Ritchken y Sankarasubramanian (1995) pues juzgamos fundamental disponer de un modelo de valoración que sea lo suficientemente rápido en valorar opciones como para que se pueda utilizar en una Tesorería. Y dado el actual desarrollo de la tecnología de los ordenadores, esto sólo es posible si el modelo se puede implementar en árboles binomiales que recombinan como los de Ritchken y Sankarasubramanian (1995).

CUADRO V

Modelos de tipos de interés FORWARD (FW)

- Modelos de tipos de interés FW en este estudio

$$\sigma_{RS}(t, T) = \sigma [r(t)]^p e^{-K(T-t)}$$

- $p = 0$ \Rightarrow Hull y White
- $p = 0.5$ \Rightarrow Squared Root
- $p = 1$ \Rightarrow Proportional

Notación

HW
RS-SqRt
RS-Prop

3. Repaso de los principales resultados empíricos en la literatura y contribución del estudio de Moraleda & Pelsser

Mientras la literatura teórica sobre valoración de opciones en tipos de interés ha sido bastante prolífica, los aspectos empíricos de estos modelos no han sido apenas explorados. En el cuadro V presentamos los trabajos más interesantes que han estudiado el comportamiento empírico de estos modelos, entre los cuales destaca el trabajo de Chan *et al.* (1992). Estos autores utilizan una base de datos de rentabilidades mensuales de Letras del Tesoro de EEUU durante el período 1969-1992 y consideran el modelo

$$dr = (a - br) dt + \sigma r^\gamma dW$$

Chan *et al.* (1992) utilizan el Método de los Momentos Generalizados (GMM) para estimar el modelo anterior. Además, imponiendo restricciones a los parámetros del modelo general, estos autores también estiman modelos muy conocidos en la literatura tales como Vasicek (1977), Cox, Ingersoll & Rox (1985) y otros. El principal resultado del estudio de Chan *et al.* (1992) es que los modelos pueden clasificarse según el parámetro γ : el ajuste del modelo es mejor mientras mayor es el valor de γ . En concreto, valores de γ en el entorno de 1.5 proporcionan el mejor ajuste¹.

Uno de los estudios empíricos más relevante acerca los modelos de tipos de interés «forward» lo han realizado Amin & Morton (1994). Estos autores estiman volatilidades implícitas de seis modelos de Heath, Jarrow & Morton (1992) usando una base de datos de opciones sobre futuros del Eurodollar durante los años 1987 a 1992. El modelo que proporciona un mejor ajuste a los datos de mercado tiene una estructura de volatilidad proporcional al nivel de los tipos de interés «forward». En concreto, la estructura de volatilidad de este modelo es de la forma $\sigma f(t, T)$.

Por lo tanto, vemos que todos estos autores encuentran funciones de volatilidad muy sensibles al nivel de los tipos de interés.

La contribución del estudio de Moraleda & Pelsser a la literatura es doble. Por un lado, estima y estudia empíricamente por primera vez en la literatura la clase de modelos de Ritchken & Sankarasu-

¹ Estos resultados deben interpretarse con cuidado pues, como ha puesto de manifiesto Rogers (1995), no está nada claro que el proceso estocástico quede bien definido para valores de $\gamma > 1$.

CUADRO VI**Resultados empíricos en la literatura**

- Modelos de tipos de interés SPOT
Estudio de series temporales (Chan et al. 92)
- Modelos de tipos de interés FORWARD
Volatilidades implícitas de modelos HJM (Amin y Morton 94)

CUADRO VII**Contribución**

- Test de los modelos de RS (95) usando precios de mercado de opciones
- Comparación de modelos SPOT y FORWARD

bramanian (1995) utilizando precios de opciones (Caps y Floors)² y, en segundo lugar, compara empíricamente los modelos de tipos de interés «spot» y «forward» más significativos.

4. Base de datos y metodología

Usamos dos bases de datos cuyo contenido se resume en el cuadro VIII. La primera base de datos contiene tipos de interés de mercado y se ha obtenido de *Data-stream*. En concreto, para cada día de negociación de la muestra se toman los tipos de interés del *USD dollar* del mercado monetario a un día, 1, 3, 6 y 12 meses, y los tipos fijos de los *USD dollar SWAP* a 2, 3, 4, 5, 7 y 10 años. Con esta información se utiliza la metodología estándar de *bootstrapping* para calcular 11 tipos cupón cero continuamente compuestos. El resto de los tipos cupón cero de la curva se calculan mediante interpolación log-linear en los factores de descuento.

La segunda base de datos contiene precios (*bid* y *offer*) de *caps* y *floors* de tipos de interés en *USD dollars* (con *caplets* de 3 meses) cotizados por *Intercapital Brokers* a las 5,30 p.m. hora de Londres. En concreto, cada día obtenemos cotizaciones de *caps* y *floors* para 3 precios de ejercicio diferentes (que varían en función del nivel de los tipos de interés) y 6 vencimientos diferentes (1, 2, 3, 4, 5 y 10 años). En total tenemos precios de 36 *caps* y *floors* cada día. Como

² La clase de modelos de Ritchken & Sankarasubramanian (1995) ya había sido examinada empíricamente por Bliss & Ritchken (1996) pero sólo utilizando una base de tipos de interés del Tesoro americano.

CUADRO VIII

Data

- Período muestral: 1/1/93-31/12/94 (508 días de negociación).
- Bases de datos:
 1. Curva de tipos de interés: US-dollar Money-Market rates y swap rates
 2. 36 opciones diarias: US-dollar 3-months caps y floors (I. B.) de
 - 6 vencimientos (1, 2, 3, 4, 5, 7 y 10 años)
 - 3 strikes (out, at y in-the-money)

se disponen de precios de ofertas y demanda de los *caps* y *floors*, se calculan los precios de mercado y es a éstos a los que se ajustan las calibraciones de los modelos.

El período muestral comprende dos años enteros: del 1 de enero de 1993 al 30 de diciembre de 1994 e incluye un total de 508 días hábiles de negociación.

La metodología para calibrar los modelos que utilizamos en este estudio consiste en que, para cada día de negociación, los modelos se ajustan a los precios de mercado de todos los vencimientos y precios de ejercicio de los *caps* y *floors*. En terminología econométrica esto significa que se hace una estimación diaria de los parámetros de los modelos utilizando para ello datos de secciones cruzadas de opciones (*caps* y *floors* de distintos vencimientos y *strikes* para un mismo día). Este método de estimación de los parámetros de los modelos es el procedimiento estándar de mercado y se conoce como estimación implícita de los parámetros (volatilidad).

Los precios de las opciones de los modelos que se han presentado en la sección 2 no son lineales en σ y en β (o κ) de tal forma lo apropiado es utilizar rutinas de optimización no-lineales. Para los modelos de Hull-White y «*Squared Gaussian*» existen fórmulas cerradas de precios de *caps* y *floors*. Para el resto de los modelos no existen fórmulas, pero los precios de *caps* y *floors* se pueden calcular numéricamente³.

Como se ha explicado más arriba, para estimar los parámetros hemos utilizado precios de 36 opciones cada día. Dado que los modelos tienen dos parámetros que estimar, es obvio que no existen

³ En concreto, nosotros hemos utilizado un árbol trinomial para el modelo de Black y Karasinski (1991) y árboles binomiales bi-dimensionales para los modelos de Ritchken y Sankarasubramanian (1996). Referencias para estos métodos numéricos son Hull y White (1996) y Li, Ritchken y Sankarasubramanian (1997).

grados de libertad suficiente como para que el ajuste de los modelos sea perfecto. Por lo tanto, nuestra rutina de optimización del ajuste de los modelos trata de minimizar la suma de las diferencias al cuadrado entre los precios de mercado y los precios teóricos en términos logarítmicos. Es decir, para un día concreto, calculamos la diferencia entre el valor de mercado y el teórico de un *cap* o *floor* dado y tomamos el logaritmo de esa diferencia. Hacemos lo mismo para todos los *caps* y *floors* de ese día concreto y la suma de todos los logaritmos de esas diferencias es nuestra función objetivo. Existen dos razones para utilizar los logaritmos. Una razón es que tomar el logaritmo de la diferencia entre precios es aproximadamente igual a tomar la diferencia entre precios en términos relativos y esto es muy conveniente, sobre todo si uno está utilizando opciones con plazos y precios de ejercicio diferentes. Nótese, de hecho, que los precios de los *caps* y *floors* en nuestra base de datos pueden variar entre 1 y 999 puntos básicos lo que supone casi 4 órdenes de magnitud. La segunda razón es puramente econométrica: una minimización de errores en términos logarítmicos tiene la ventaja de reducir la heterocedasticidad de los errores.

CUADRO IX

Metodología econométrica

- Estimación de volatilidades implícitas
 - Mínimos cuadrados no lineales
 - Función objetivo: minimización de la suma de diferencias al cuadrado en términos logarítmicos

$$\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln\left(1 + \frac{x-y}{y}\right) = \frac{x-y}{y}$$

Otro asunto importante cuando uno está comparando modelos es la elección del criterio de selección. Y este asunto es todavía más peliagudo si los modelos que uno compara no son lineales ni unos generalizan a otros. De hecho, no existe un acuerdo general en la literatura científica sobre qué criterio utilizar. En nuestro estudio, y dado que todos los modelos tienen el mismo número de parámetros, nos hemos inclinado por un criterio sencillo e intuitivo: criterios de bondad del ajuste basado en errores estándares de las regresiones de los modelos. La ventaja de este criterio es que es muy intuitivo: el modelo cuyo ajuste sea mejor será aquel cuya suma de errores sea menor (y esto medido a través de los errores estándares de las regresiones); el inconveniente de este criterio es que resulta difícil saber cuanto mejor es un modelo de otro, es decir, si

un modelo es «significativamente» mejor que otro, o incluso si todos ellos proporcionan un mal ajuste a los datos de mercado.

Para paliar en alguna medida esta carencia, en este estudio se analizan no sólo los errores estándares de las regresiones sino también los errores de los modelos en términos relativos respecto a los precios de mercado. Es decir, precios de mercado, menos precios de los modelos, dividido todo ello por precios de mercado.

Por último, se analizan los modelos fuera de la muestra. Para un día dado, se toman los parámetros estimados del día precedente y se comparan los precios de los *caps/floors* producidos por los modelos con aquellos del mercado de ese día. Este ejercicio mide la habilidad de predicción de los modelos y, además, imita prácticas muy generalizadas en el mercado. En efecto, lo típico es que una cartera de opciones se cubra dinámicamente usando los parámetros de los modelos estimados un día concreto, y estos parámetros no se revisen hasta el día siguiente. Para mimetizar este comportamiento para nuestros datos disponibles, nosotros calibramos los modelos con datos de las 5,30 p.m. hora de Londres (que son los datos de los que disponemos) y usamos estos estimadores con las curvas de mercado de tipos de interés del día siguiente para volver a calcular los precios de las opciones. A este ejercicio le llamamos Test de 1 día fuera de la muestra o habilidad de los modelos para predecir precios 1 día adelante.

CUADRO X

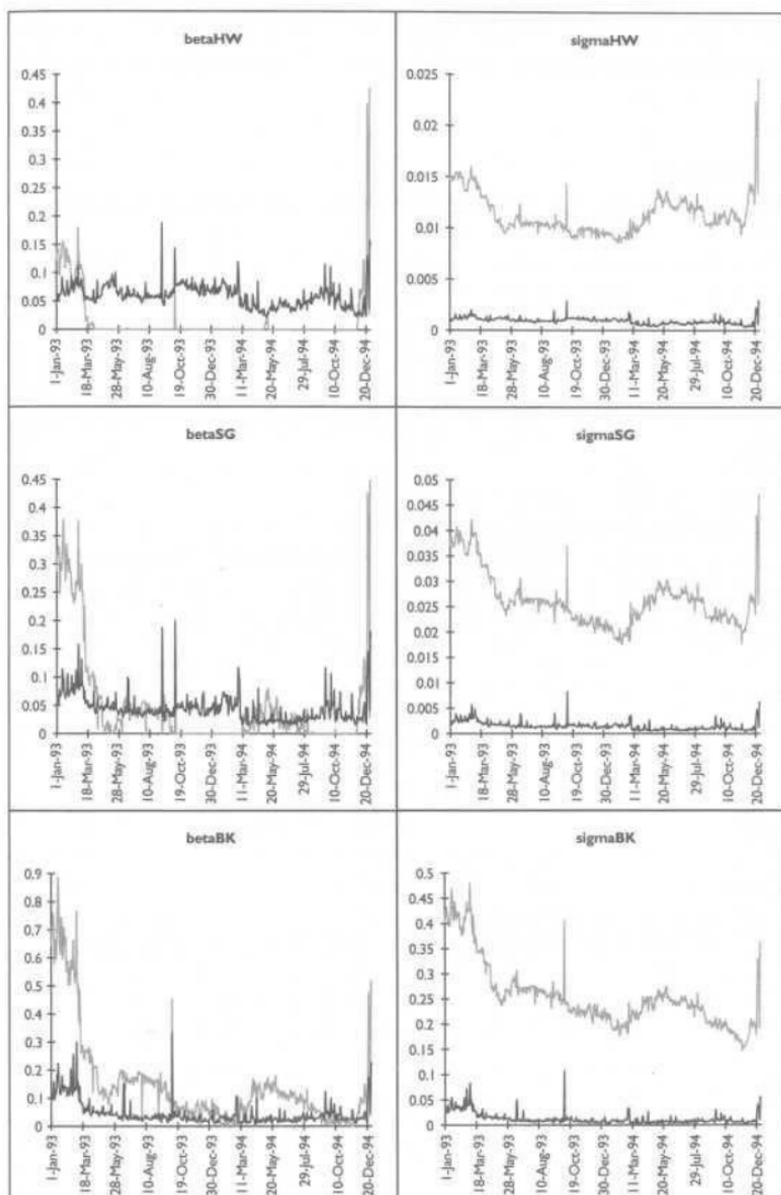
Criterio de selección de modelos

- Bondad del ajuste (errores estándar de las regresiones)
- Desventajas
 - Es difícil saber si un modelo significativamente mejor que otro
 - Es difícil saber si el ajuste de todos los modelos es malo
- Errores relativos $[(\text{Modelo} - \text{Mercado}) / \text{Mercado}]$
- Tests fuera de la muestra: 1 día

5. Resultados empíricos

Como hemos explicado en la sección anterior, para cada uno de los días hacemos una regresión (no lineal) utilizando precios de 36 opciones (distintos vencimientos y precios de ejercicio de *caps* y *floors*). Es decir, cada día reestimamos los parámetros de los modelos de acuerdo a los precios de mercado de las opciones. En la figura 1 y 2 mostramos los parámetros estimados para cada día de la muestra. La figura 1 muestra los estimadores de los parámetros

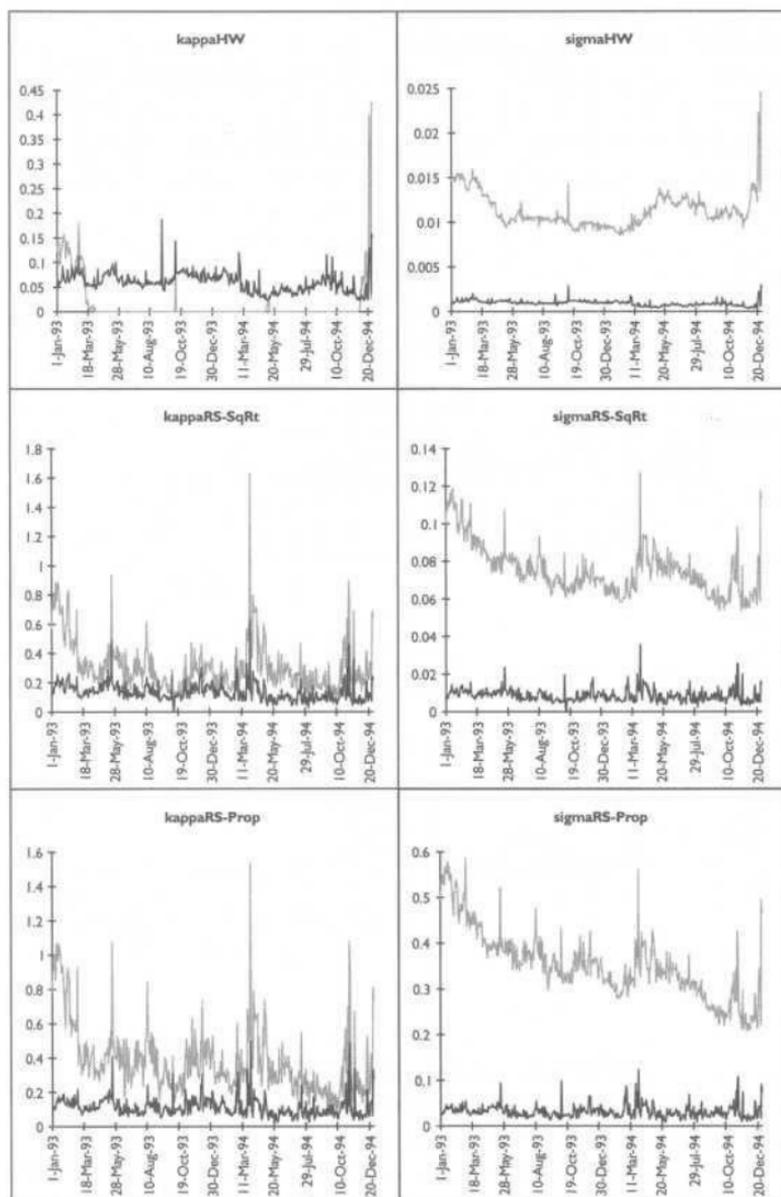
FIGURA I
Parámetros de los modelos de tipos de interés spot



de los tres modelos de tipos de interés de contado. La línea más gruesa de estos gráficos corresponde a los estimadores de los parámetros propiamente dichos mientras que la línea más fina corresponde al nivel crítico de significatividad estadística al 95 % de que el parámetro en cuestión sea diferente de cero. Es decir, esti-

madores de los parámetros menores que la línea fina indican que el estimador en cuestión para ese día no es significativamente (al 95 % de probabilidad) distinto de cero. La figura 2 muestra los parámetros y los niveles de confianza de los mismos (al 95 % de significatividad) para los modelos de tipos de interés «forward». Para

FIGURA 2
Parámetros de los modelos de tipos de interés forward



comparar los estimadores de los parámetros en ambos marcos es muy útil utilizar como referencia los estimadores del modelo de Hull & White que aparecen en las figuras 1 y 2.

Los estimadores de σ para todos los modelos son significativamente distintos de cero, muy estables para todos los modelos y su evolución para todos los modelos es muy parecida aunque la escala sea distinta. Respecto a los parámetros de reversión a la media β (o κ), sin embargo, las cosas no son tan claras. De hecho, el parámetro β no es significativamente distinto de cero para la mayor parte de los días de la muestra bajo los modelos de Hull y White y bajo el modelo «Squared Gaussian». Para el modelo de Black y Karasinski, β toma valores próximos a cero para algunos períodos en la muestra. Por contra, los estimadores del parámetro de reversión a la media de los modelos de tipos de interés *forward*, κ , son significativamente positivos para toda la muestra.

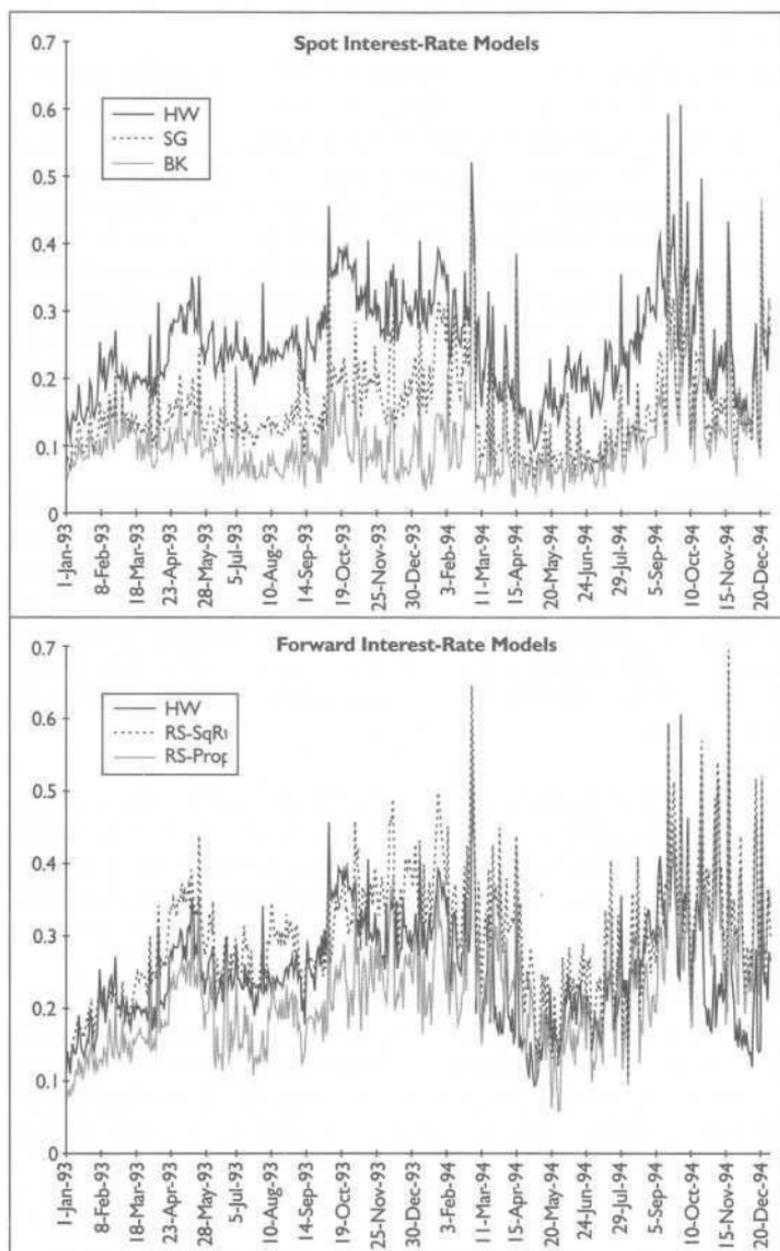
Las figuras 3 y 4 recogen información acerca de los errores de los modelos. La figura 3 muestra los errores estándar de las regresiones para los 3 modelos de tipos de interés de contado y los tres modelos de tipos de interés *forward*. Analizando el primer gráfico de la figura 3, queda claro que el modelo de Black y Karasinski mejora al modelo *Squared Gaussian* en la minimización de errores estándar de las regresiones y que este último supera al modelo de Hull y White.

Respecto a los modelos de tipos de interés *forward*, las cosas no son tan claras. La figura 3 muestra que el peor ajuste a los precios de mercado se da para el modelo *RS-Square Root* y que no existe demasiada diferencia entre el modelo de Hull y White y el modelo *RS-Proportional*⁴.

La figura 4 compara los modelos según la media de los errores relativos de valoración. En concreto, definimos como error relativo de valoración el valor absoluto del precio del modelo menos el precio de mercado de las opciones dividido por el precio de mercado. En el gráfico superior de la figura 4 se compara el modelo *Squared Gaussian* de tipos de interés de contado y el modelo de tipos de interés *forward RS-Square Root*. En el gráfico inferior de la misma figura 4 se compara el modelo de Black y Karasinski y el modelo *RS-Proportional*. Esta comparación cruzada de modelos de tipos de interés de contado y *forward* nos permite concluir que los

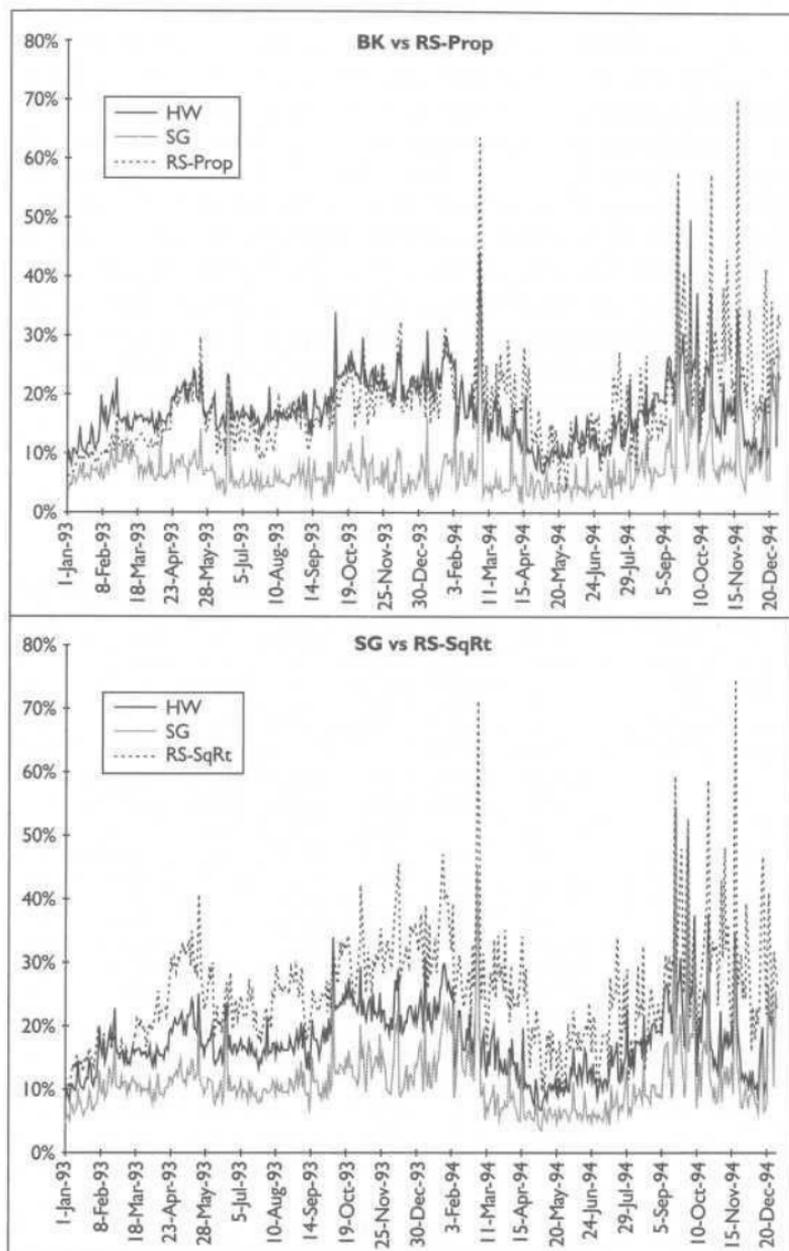
⁴ Los resultados que obtenemos para los modelos de tipos de interés *forward* pueden parecer sorprendentes. Sin embargo, están en línea con los resultados obtenidos por Amin y Morton (1994) como se explica detalladamente en Moraleda y Pelsser (1996).

FIGURA 3
Errores estándar de las regresiones



primeros son capaces de ajustar los datos de mercado mucho mejor que los modelos de tipos *forward*. Nótese que en ambos gráficos de la figura 4 hemos representado también los errores relativos de valoración para el modelo de Hull y White. La razón es que

FIGURA 4
Errores relativos medios (en valor absoluto)



este modelo es exactamente igual en ambos marcos (de tipos de contado y *forward*) y resulta muy útil como referencia para la comparación entre modelos.

El último aspecto de nuestro estudio trata de la capacidad de predicción de los modelos, o dicho de otra forma, de test fuera de la muestra. Para cada uno de los días en la muestra, usamos la curva de tipos de interés de ese día pero los estimadores de los parámetros de los modelos estimados para el día anterior. En la tabla 2 se recogen los resultados de este ejercicio de predicción. En concreto, esta tabla muestra estadísticos de los errores de valoración y los errores relativos de valoración de todos los modelos. Lo realmente interesante de este ejercicio es que si comparamos los errores de valoración de las tablas 1 y 2 (dentro y fuera de la muestra, respectivamente), vemos que los errores de valoración fuera de la muestra son mayores, como era sin duda de esperar, pero la diferencia con los errores de valoración dentro de la muestra no es demasiado grande. Este resultado es muy importante a la hora de replicar dinámicamente opciones.

TABLA 1
Estadísticos de los estimadores de los parámetros

		Media	Desv. Est	Min.	Q1	Mediana	Q3	Máx
HW	beta	0,017	0,052	0,000	0,000	0,000	0,000	0,425
	sigma	0,011	0,002	0,009	0,010	0,011	0,012	0,025
	sig-LS	0,250	0,077	0,093	0,196	0,241	0,295	0,607
	PE(bp)	24,26	8,98	7,35	18,62	23,58	28,53	131,49
	RPE(%)	17,52%	5,69%	6,72%	13,88%	16,82%	20,64%	54,51%
SG	beta	0,050	0,089	0,000	0,000	0,015	0,046	0,450
	sigma	0,026	0,005	0,018	0,023	0,026	0,028	0,047
	sig-LS	0,154	0,070	0,049	0,111	0,136	0,181	0,551
	PE(bp)	14,49	7,87	4,41	10,49	12,94	16,39	123,36
	RPE(%)	11,19%	5,30%	3,51%	8,03%	10,13%	12,86%	49,46%
BK	beta	0,149	0,168	0,000	0,052	0,103	0,160	0,887
	sigma	0,254	0,065	0,147	0,212	0,242	0,268	0,480
	sig-LS	0,108	0,067	0,023	0,067	0,091	0,122	0,548
	PE(bp)	10,35	8,53	1,54	6,46	8,59	12,06	139,00
	RPE(%)	7,47%	5,02%	1,51%	4,71%	6,27%	8,39%	54,28%
RS-SqRt	beta	0,311	0,172	0,046	0,198	0,265	0,365	1,635
	sigma	0,075	0,013	0,053	0,066	0,072	0,081	0,127
	sig-LS	0,298	0,086	0,102	0,238	0,292	0,348	0,696
	PE(bp)	29,54	9,91	9,60	23,90	29,20	33,97	129,98
	RPE(%)	25,26%	8,55%	6,66%	19,26%	24,44%	29,72%	75,02%
RS-Prop	beta	0,383	0,197	0,063	0,252	0,337	0,450	1,536
	sigma	0,353	0,076	0,208	0,309	0,345	0,391	0,585
	sig-LS	0,222	0,086	0,058	0,162	0,211	0,263	0,666
	PE(bp)	21,34	9,24	4,64	15,62	20,22	25,20	130,25
	RPE(%)	18,14%	7,98%	4,05%	12,48%	17,10%	21,63%	70,44%

TABLA 2
Estadísticos para errores de valoración un-día
fuera de la muestra

		Media	Desv. Est.	Min.	Q1	Mediana	Q3	Máx.
HW	PE(bp)	24,32	9,17	6,55	18,56	23,68	28,66	142,81
	RPE(%)	17,99%	6,13%	6,75%	14,42%	16,98%	21,00%	64,72%
SG	PE(bp)	14,63	7,94	5,12	10,64	13,06	16,46	125,86
	RPE(%)	11,86%	6,02%	3,60%	8,59%	10,56%	13,36%	66,19%
BK	PE(bp)	10,75	8,09	2,04	6,76	9,06	12,43	124,95
	RPE(%)	8,39%	6,14%	2,41%	5,30%	7,04%	9,18%	71,39%
RS-SqRt	PE(bp)	30,55	10,54	11,38	24,48	29,98	35,24	137,29
	RPE(%)	26,70%	10,59%	9,29%	19,74%	25,34%	30,77%	126,76%
RS-Prop	PE(bp)	22,29	9,44	4,63	16,11	21,04	26,43	125,37
	RPE(%)	19,57%	10,17%	4,19%	13,26%	17,80%	22,66%	120,29%

6. Conclusiones

Usando una base de datos de caps y floors con diferentes vencimientos y strikes, se comparan tres modelos de tipos de interés de contado [Hull y White (1994); Pelsser (1997) y Black y Karasinski (1991)] y tres modelos de tipos de interés forward [un modelo normal idéntico al de Hull y White (1994), otro modelo de raíz-cuadrada y un último proporcional, todos ellos de Ritchken y Sankarasubramanian (1995)]. La conclusión a la que hemos llegado es que los modelos de tipos de interés de contado de Black y Karasinski (1991), Pelsser (1997) y Hull y White (1994) pueden clasificarse en este orden tanto si el criterio de clasificación es datos de la muestra o de fuera de ella. Sin embargo, para los modelos de tipos de interés *forward* los resultados son más dispares. De hecho los modelos de Hull y White (1994) y el modelo proporcional de Ritchken y Sankarasubramanian (1995) ajustan los datos de mercado de manera muy parecida, mientras el ajuste del modelo de raíz cuadrada de Ritchken y Sankarasubramanian (1995) es mucho peor.

Además, hemos concluido que todos los modelos de tipos de interés de contado ajustan mejor los datos de mercado que sus modelos equivalentes en tipos de interés *forward*. En vista de los estos resultados cabe cuestionarse seriamente la supuesta similitud (muchas veces proclamada en la literatura académica) entre los modelos de tipos de interés de contado y la clase de modelos de Ritchken y Sankarasubramanian (1995).

* Este texto es un resumen divulgativo de la presentación que el autor hizo en las «Jornadas de Economía Financiera» (Bilbao 18 y 19 de junio 1988) del trabajo, «*Forward vs Spot Interest-Rate Models of the Term Structure: An Empirical Comparison*», cuyos autores son Juan M. Moraleda (Santander Investment y Universidad Carlos III de Madrid) y Antoon Pelsser (ABN-Amro Bank y Erasmus University Rotterdam).

El autor de este trabajo quiere aprovechar estas líneas para agradecer al profesor Gonzalo Rubio y al Departamento de Economía Financiera de la Universidad del País Vasco en general la excelente organización de las Jornadas y el alto nivel académico de las mismas. Este agradecimiento se hace extensivo a la Fundación BBV por el patrocinio de las Jornadas.

Bibliografía

- Amin, K. I. and Morton, A. J. (1994):** «Implied Volatility Functions in Arbitrage-Free Term Structure Models», *Journal of Financial Economics*, 35: 141-180.
- Amin, K. I. and Ng, V. K. (1995):** *Heath, Jarrow and Morton Implied Volatility Functions and Conditional Heteroskedasticity Models: Information in Eurodollar Futures Options*, working paper, Lehman Brothers, New York.
- Black, F. (1976):** «The pricing of Commodity Contracts», *Journal of Financial Economics*, 3: 167-179.
- Black, F. and Karasinski, P. (1991):** «Bond and Option Pricing when Short Rates are Lognormal», *Financial Analysts Journal*, 47: 52-59.
- Bliss, R. and Ritchken P. (1996):** *Empirical Tests of Two State-Variable Heath, Jarrow and Morton Models*, Forthcoming in *Journal of Money, Credit and Banking*.
- Buhler, W.; Uhrig, M.; Walter, U. and Weber, Th. (1995):** «An Empirical Comparison of Alternative Models for Valuing Interest Rate Options», working paper, University of Mannheim.
- Brown, R. H. and Dybvig, P. H. (1986):** «The Empirical Implications of the Cox-Ingersoll-Ross Theory of the Term Structure of Interest Rates», *Journal of Finance*, 41: 617-630.
- Chan, K. C.; Karolyi, G. A.; Longstaff, F. A. and Sanders, A. B. (1992):** «An Empirical Comparison of Alternative Models of the Short-Term Interest Rate», *Journal of Finance*, 47: 1209-1227.
- Cheyette, O. (1992):** «Term Structure Dynamics and Mortgage Valuation», *Journal of Fixed Income*, 1: 28-41.
- Flesaker, B. (1993):** «Testing the Heath-Jarrow-Morton/Ho-Lee Model of Interest Rate Contingent Claims Pricing», *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 28: 483-495.
- Heath, D.; Jarrow, R. and Morton, A. J. (1992):** «Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates: a New Methodology for Contingent Claims Valuation», *Econometrica*, 60: 77-105.

- Hull, J. and White, A. (1994):** «Numerical Procedures for Implementing Term Structure Models I: Single-Factor Models», *Journal of Derivatives*, Fall 1994, 7-16.
- Judge, G.; Hill, C.; Griffiths, W; Lutkepohl, H. and Lee, T-C. (1982):** *Introduction to the Theory and Practice of Econometrics*, John Wiley & Sons, New York.
- Li, A.; Ritchken, P. y Sankarasubramanian, L. (1995):** «Lattice Models for Pricing American Interest Rate Claims», *Journal of Finance*, 1: 719-737.
- Mercurio, F. y Moraleda, J. M. (1999):** «An analytically tractable interest rate model with humped volatility», *Forthcoming in European Journal of Operation Research*.
- Moraleda, J. M. (1997a):** *On the Pricing of Interest-Rate Options*, Ph. D. Dissertation, Erasmus University Rotterdam, Holanda.
- Moraleda, J. M. (1997b):** «Avances Recientes en la Valoración de Activos Derivados en Renta Fija», *Información Comercial Española*, n.º 764, 29-40.
- Moraleda, J. M. y Pelsser, A. A. J. (1996):** *Forward vs Spot Interest-Rate Models of the Term Structure: An Empirical Comparison*, working paper, Erasmus University Rotterdam, Holanda.
- Moraleda, J. M. and Vorst, A. C. F. (1997a):** «Pricing American Interest Rate Claims with Humped Volatility Models», *Journal of Banking and Finance*, 21, 1131-1157.
- Moraleda, J. M. and Vorst, A. C. F. (1997b):** «Empirical Behavior of Interest-Rate Models», in *System Dynamics in Economic and Financial Models*, John Wiley & Sons, Amsterdam.
- De Munnik, J. and Schotman, P. (1994):** «Cross Sectional versus Time Series Estimation of Term Structure Models: Evidence for the Dutch Bond Market», *Journal of Banking and Finance*, 18: 997-1025.
- Pelsser, A. A. J. (1996):** *Efficient Methods for Valuing and Managing Interest Rate and other Derivative Securities*, Ph. D. Dissertation, Erasmus University Rotterdam.
- Pelsser, A. A. J. (1997):** «A Tractable Yield-Curve Model that Guarantees Positive Interest Rates», *Review of Derivatives Research*, 1: 269-284.

Ritchken, P. and Sankarasubramanian, L. (1995): «Volatility Structures of Forward Rates and the Dynamics of the Term Structure», *Mathematical Finance*, 5: 55-72.

Rogers, L. G. C. (1995): «Which Model of Term-Structure of Interest Rates Should One Use?», en M. Davis, D. Duffie, W. Fleming and S. Shreve (eds.), *Mathematical Finance, IMA*, Vol. Math. Appl. Vol. 65, New York: Springer Verlag.

VALORACIÓN DE LOS STRIPS DE DEUDA PÚBLICA EN ESPAÑA

Inmaculada Gómez

Profesora del Departamento de Economía Aplicada
de la Universidad de Huelva

Jorge Sicilia

Subdirector de Estudios Económicos y Monetarios en Argentina

Resumen

En este trabajo se estudia la formación de precios en el mercado español de strips sobre deuda pública en el primer semestre de 1998, período inicial de su desarrollo. Para ello, se ha procedido en varias etapas. En primer lugar se ha generado una referencia teórica para su valoración mediante la estimación de la Estructura temporal de tipos de interés (ETTI) a partir de los precios de los activos con riesgo Tesoro que cotizan en el mercado español; utilizando tres modelos de uso común, la estimación a través de la metodología de McCulloch, Nelson & Siegel y Svensson. Optando por la segunda de ellas para continuar el estudio, se ha realizado una comparación de esta curva teórica con la curva de strips cotizada por el mercado, con el fin de estudiar el patrón de comportamiento de los diferenciales entre estas curvas. En conjunto se encuentra evidencia de una correcta valoración de los strips en el mercado español de deuda pública, al observarse diferenciales entre ambas curvas alternativamente positivos y negativos a lo largo de los distintos plazos de maduración, lo que no permite posibilidades de arbitraje al no estar los strips consistentemente caros o baratos en ningún plazo. Por otra parte, se encuentra evidencia de que el signo de los diferenciales entre la valoración teórica y de mercado se explica por la concentración de demanda de strips en determinados tramos de la curva —los tramos cortos, por la acción de los fondos garantizados—, así como de la forma de la ETTI en ese período. El único aspecto de la formación del precio de los strips que resulta menos lógico es la valoración de los strips de principal respecto a los strips de cupón del mismo plazo de maduración. A diferencia de lo que cabría esperar, teniendo en cuenta la menor sustituibilidad de los strips de principal y su consiguiente es-

casez, estos últimos se están cotizando más baratos que los strips de cupón. La regulación que afectaba a los fondos garantizados en ese período de la muestra podría estar detrás de esta diferencia. Salvando este aspecto, podemos concluir que la valoración que ha efectuado el mercado de los strips de deuda pública en ese período ha sido correcta en términos generales.

I. Introducción

Los strips (siglas de la denominación inglesa *Separately Traded Registered of Interest and Principal*) de deuda pública son los valores obtenidos de la segregación de los pagos por interés y principal de un instrumento de deuda pública con rendimiento explícito, de manera que se puedan negociar de forma independiente al instrumento del que proceden. De esta forma, se permite la existencia de bonos cupón cero con la calidad crediticia de los activos del Tesoro Público sin necesidad de que sean emitidos directamente por éste. La segregación de los flujos (cupones y principal) de una referencia de deuda con cupones explícitos supone simplemente la transformación —por parte de entidades calificadas al efecto— de las referencias con cupones emitidas por el Tesoro en instrumentos de cupón cero.

El motivo que justifica el desarrollo de un mercado de strips no es otro que el enriquecimiento de la gama de instrumentos de inversión en deuda pública, ya que por las peculiares características financieras de los bonos cupón cero, se ven ampliadas las posibilidades de gestión de carteras tanto de renta fija como de renta variable. En este sentido, el mercado de strips se ha regulado de forma que sean los propios agentes del mercado quienes determinen el importe segregado de referencias de deuda pública (siempre que el Tesoro las haya regulado como segregables). Para ello, normalmente, el proceso de segregación suele llevar asociada la autorización —así ha sido desde el primer momento en el caso español— para que las entidades autorizadas por el Tesoro las referencias segregables puedan proceder a reconstituir el bono original a partir de los correspondientes cupones y principal segregados. De esta forma, son las propias necesidades del mercado las que pueden ajustar la oferta a la demanda de títulos cupón cero a distintos plazos.

Los antecedentes de la negociación separada de los flujos de referencias de deuda con cupones se sitúan en 1982 en EE.UU., donde empresas privadas desarrollaron procesos de segregación sobre deuda no pública. Sin embargo, la institucionalización de un programa de strips sobre referencias de deuda pública no tiene lugar en este país hasta 1985. Por su parte, la iniciativa del desarrollo en Eu-

ropa de este mercado correspondió a Francia, que autorizó en mayo de 1991 la segregación de su referencia de deuda pública más larga —una obligación a 30 años—, aunque amplió la base de activos segregables con posterioridad. Después de la creación en Francia de un mercado de strips se han desarrollado programas similares también en otros países —como Bélgica (en octubre de 1992), Holanda (en febrero de 1993), sobre deuda pública francesa denominada en ecus (en enero 1994), así como en Canadá (1993)—. Las referencias más recientes sobre la institucionalización de la negociación de strips sobre deuda pública se encuentran en Alemania, Gran Bretaña y España.

La autorización en España de un programa sobre strips de deuda pública ha requerido la adaptación de la normativa fiscal sobre activos financieros, —únicamente ha tenido lugar en el Impuesto de Sociedades (IS)—, básicamente por el deseo de impulsar el desarrollo de este mercado, que habría estado restringido por la normativa originaria, que determinaba la retención sobre los incrementos de patrimonio generados en cada transmisión de cupones cero. Esta situación hubiera generado un incentivo a mantener los instrumentos hasta el vencimiento, con los consiguientes efectos de detrimento sobre su liquidez. Tras la adaptación de la normativa, el tratamiento fiscal de los cupones segregados (CS) y los principales segregados (PS), así como de las referencias segregables, se dibujó distinto al de las referencias de deuda no segregables, al haberse eliminado las retenciones.

Este elemento de diferenciación fiscal, junto a sus peculiares condiciones de negociación, genera implicaciones muy importantes para la valoración específica de los strips y de las referencias de deuda con cupones, tanto las segregables (en strips) como las no segregables.

Transcurrido en nuestro mercado un breve período desde el inicio de la negociación de los strips de deuda pública, desde enero de 1998, este artículo se centra en el análisis de la formación de precios en el mercado de strips entre esta fecha y principios de mayo de 1998. Más que una descripción de la evolución del mercado, el análisis pretende desarrollar una metodología para la valoración de los strips de deuda pública. Para ello, el artículo trata varios puntos. En primer lugar se determina una referencia teórica para su valoración utilizando la estimación de la curva cupón cero a partir de los precios de la deuda (frente a la alternativa de usar la curva cupón cero con riesgo interbancario). Para ello, no sólo deben analizarse los métodos de estimación posibles, sino la conveniencia de introducir distintas referencias en la estimación (principalmente la obligación a 30 años), y tener en cuenta las diferencias fiscales de

la deuda viva. En segundo lugar, se lleva a cabo una comparación entre la curva teórica estimada y la curva de strips que variarán no sólo según la aproximación teórica, sino también de acuerdo a la presión de la demanda. Para completar el análisis, se comparan los strips de principal y de cupón de idéntico plazo de maduración. Por último, se analizan las posibilidades de arbitraje, que en última instancia constituirán un límite entre la estimación teórica y la cotización de los strips.

A tal efecto, el trabajo se encuentra estructurado del siguiente modo: en la **primera sección** se describen los aspectos formales del mercado español de strips sobre deuda pública y especialmente la legislación actualizada sobre fiscalidad de los activos de deuda pública. En la **segunda sección** se aborda la descripción del proceso de *stripping*, de las propiedades fundamentales de los instrumentos cupón cero y las principales aplicaciones de los strips a la gestión de carteras. En la **tercera sección** se estima la Estructura temporal de tipos de interés (ETTI) bajo las condiciones específicas de fiscalidad de las referencias de deuda del mercado. Esta estimación se lleva a cabo bajo diversas metodologías y se comparan dichas estimaciones con la curva cotizada de strips. En la **sección cuarta** se compara la curva cotizada de strips con la curva teórica estimada de tipos cupón cero, analizándose los signos de los diferenciales observados de acuerdo a la presión de la demanda. En la **sección quinta** se estudia la relación entre los strips de principal y de cupón de igual plazo de maduración. Por último, y antes de la conclusión, en la **sexta sección** se estudia si se están produciendo o no posibilidades de arbitraje. En suma, con este estudio se pretende analizar si el mercado está cotizando de forma correcta los strips sobre deuda pública.

2. Características del mercado español de strips sobre deuda pública y fiscalidad de los activos de deuda pública

Las operaciones de segregación sobre valores de Deuda del Estado y su reconstitución han sido reguladas a través de la Orden Ministerial de 19 de junio de 1997. Posteriormente, el Real Decreto 2813/1998, de 23 de noviembre de 1998, ha modificado ciertos aspectos técnicos para adaptar su funcionamiento a euros.

En la primera norma se define la segregación como la operación por la que se da de baja en la Central de Anotaciones un bono u obligación segregable, registrándose en su lugar (con fecha valor el día hábil siguiente) nuevos valores con rendimiento implícito, procedentes de los cupones y principal de dicho bono, y definiéndose

la reconstitución como la operación inversa a la anterior. En esta regulación se determina que las referencias segregables serán únicamente aquellas señaladas al efecto por la Dirección General del Tesoro, pudiendo éste, además, imponer determinados requisitos en relación a la existencia de un nominal mínimo emitido de los mismos antes de permitir las operaciones de segregación. Las referencias sobre las que se ha iniciado el desarrollo de strips en el mercado español fueron inicialmente cuatro emisiones a tres, cinco, diez y quince años —emitidas a partir de julio de 1997—, cuyos cupones respectivos son del 5,00 %, 5,25 %, 6,00 % y 6,15 %, y cuya fecha de pago de cupón anual es para todas ellas el 31 de enero desde 1999. Posteriormente, se han definido tres nuevas referencias de deuda como segregables a plazos de tres, cinco, diez y quince años, emitidas desde finales de 1998, cuyos cupones respectivos son del 4,25 %, 4,50 %, 5,15 % y 4,75 % y cuya fecha de pago de cupón es para todas ellas el 30 de julio a partir del año 2000.

La segregación de las cuatro primeras referencias se inició el 8 de enero de 1998, cuando estas superaron el billón de pesetas de saldo vivo (menos la referencia a 15 años, que comenzó con un saldo vivo inferior). La referencia a 30 años, de cupón 6,00 % y con fechas de pago de cupón los 31 de enero desde el año 2000, fue calificada también como segregable, aunque su segregación no se produjo hasta mayo de 1998, cuando alcanzó un saldo vivo de poco más de 700 mm, tras la celebración de dos subastas de obligaciones a 30 años.

La coincidencia de fechas de pago de cupón tiene el propósito de permitir que sean fungibles entre sí los CS de igual fecha de maduración, con independencia de la referencia de la que procedan. Sin embargo, a efectos de evitar que por procesos de reconstitución se genere un importe del bono original superior al emitido, no son fungibles los CS con PS con igual fecha de maduración, ni tampoco entre sí los PS de distintas referencias (caso de que coincidan en algún momento).

Las operaciones de segregación sólo pueden ser llevadas a cabo por las entidades autorizadas por la Dirección General del Tesoro, siendo inicialmente el importe mínimo segregable sobre una referencia de 50 millones de pesetas, con importes adicionales múltiples de 10 millones. A partir de enero de 1999 el importe mínimo segregable de una referencia se establece en 500.000 euros, con importes adicionales múltiples de 100.000 euros. Sobre el volumen negociable, se estableció un mínimo para operaciones entre titulares —50 millones de pesetas antes de la entrada en el euro—, así como para operaciones con terceros: 10 millones para la negociación de PS y 1 millón para la negociación de CS. Desde enero de

1999 los importes mínimos de negociación son de 100.000 euros para los PS y de 1.000 euros para los CS. El conocimiento de todas estas características específicas sobre el proceso de segregación y reconstitución es importante de cara a ponderar los factores que pueden influir en la valoración de los strips y referencias segregables en relación a los bonos no segregables.

Para hacer operativo el mercado de strips se ha llevado a cabo una adaptación de la regulación fiscal, con el fin de que estas no soportaran retención a cuenta por cada transmisión de los PS o CS y no se generara, por tanto, un incentivo fiscal a mantener los activos hasta su vencimiento, reduciendo la liquidez del mercado. De este modo, el Reglamento del nuevo IS (RD 537/1997 de 14 de abril) excluyó la retención sobre los incrementos de patrimonio generados por la transmisión o reembolso de los CS y PS, si bien se seguirá aplicando la retención a los sujetos pasivos del IRPF.

Por otra parte, para no premiar fiscalmente la tenencia de strips frente a los bonos segregables ha sido necesario eliminar también la retención a cuenta sobre el cupón nominal pagado por los bonos segregables no segregados, a fin de equiparar las condiciones fiscales de los strips y los flujos de los bonos segregables. Esto ha sido necesario dado que si se hubiera mantenido la retención sobre los cupones nominales de los bonos originales y se hubiera eliminado la retención en las transmisiones o reembolsos de los PS y CS se habría generado un incentivo a segregar el mayor volumen posible, bloqueando el proceso de reconstitución posterior de los strips en el bono original. De este modo, el Reglamento del IS excluye en su artículo 57 la obligación de retener sobre los cupones de títulos segregables y sobre los rendimientos procedentes de la transmisión o reembolso de CS y PS. Tras el nuevo Reglamento del IS, el mercado de Deuda del Estado se puede considerar segmentado de acuerdo a su tratamiento fiscal en dos categorías. Por una parte los activos que sufren retención a cuenta, como son los bonos de naturaleza explícita no segregables, y por otra, aquellos que no sufren dicha retención, como son los intereses explícitos de los bonos segregables y los rendimientos que originen los incrementos de patrimonio por amortización o transmisión de los CS y los PS, así como las letras del Tesoro.

Dado que los no residentes están exonerados de soportar la retención a cuenta sobre los cupones pagados de las referencias de deuda, se ha generado una operativa, conocida con el nombre de «lavado de cupón», mediante la cual los residentes evitan la mayor parte del coste de la retención, y que consiste en vender temporal-

mente los activos a los no residentes antes de su pago de cupón¹. La venta temporal de títulos entre residentes y no residentes está liberalizada, aunque sometida a una regulación específica en el caso en que se produzca con menos de un mes de antelación al pago del cupón (véase RD 753/1992 de 26 de junio). Lo normal es que los residentes efectúen la transmisión a no residentes a través de las Entidades Gestoras de Deuda Pública dentro de los 30 días previos al pago de cupón, en la mayoría de los casos 1 ó 2 días antes a dicha fecha. Precisamente el coste de estas operaciones parece la forma más adecuada en la que considerar la fiscalidad de los activos de deuda pública sujetos a retención, toda vez que al tratarse de una operativa generalizada entre todos los agentes de mercado, permite una homogeneización natural de las condiciones fiscales.

3. Proceso de segregación y propiedades financieras de los instrumentos cupón cero

La segregación de un título de deuda pública con cupones explícitos —proceso de *stripping*— permite a partir de un solo bono con n cupones y un principal al vencimiento generar $n+1$ títulos cupones cero (n CS y 1 PS) cuyos períodos de maduración coinciden con los vencimientos de los flujos del bono original.

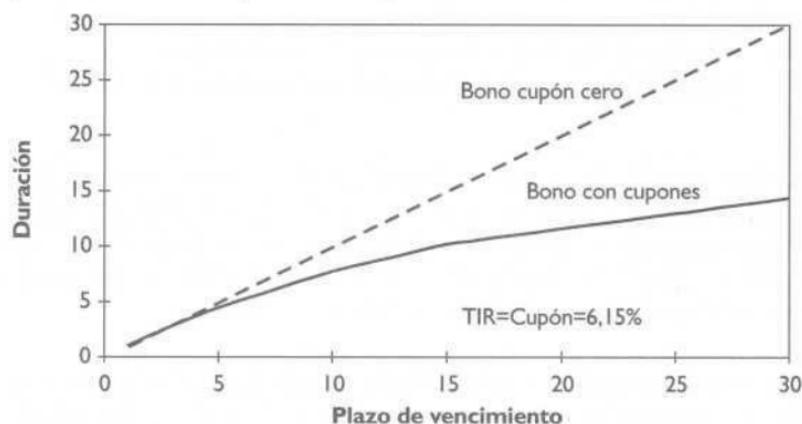
La ventaja de los strips como instrumentos de gestión de carteras radica en el hecho de que al mismo tiempo son activos que permiten diseñar estrategias de cobertura ante el riesgo de movimiento de los tipos de interés y estrategias activas de toma de posiciones de riesgo. La cobertura viene dada por la ausencia de riesgo de reinversión de los cupones, lo que permite garantizar un rendimiento cierto hasta el vencimiento del activo. Por esta ausencia de riesgo de reinversión, su uso facilita la constitución de fondos de renta fija garantizados —que comprometen un rendimiento mínimo a un horizonte determinado—, así como de fondos de pensiones, que al tener definido un horizonte de gestión muy largo sufren especialmente el problema de reinversión de los bonos normales con cupones. Los strips de deuda pública pueden ser también empleados para la constitución de fondos de renta variable garantizados, del tipo que aseguran la devolución del capital invertido al final de un determinado horizonte, así como parte de la revalorización de un índice bursátil. La cobertura puede hacerse con la compra de bonos cupón cero con vencimiento el horizonte de gestión y de

¹ Una explicación detallada de la operativa del lavado de cupón puede encontrarse en la Guía del Sistema Financiero Español (1996) elaborada por Analistas Financieros Internacionales.

nominal el importe de las participaciones a asegurar, y la inversión en opciones call sobre el índice bursátil por la diferencia entre el nominal del cupón cero y su valor actual.

La posición agresiva ante el riesgo se deriva de las propiedades asociadas a los activos cupón cero respecto a los instrumentos con cupón: duración, convexidad y apalancamiento, que también explican las posibilidades de cobertura. Al mismo plazo, la duración de un bono cupón cero es superior a la de un bono con cupones.

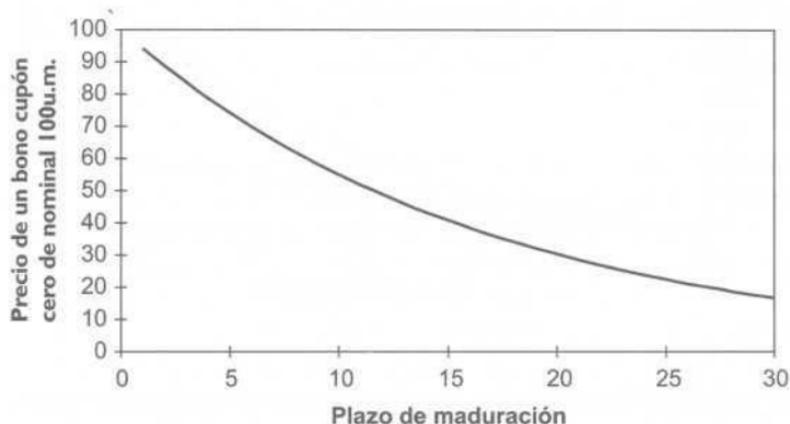
FIGURA I
Relación duración/plazo en un bono cupón cero y un bono con cupones de igual vencimiento



De este modo, con bonos cupón cero es posible generar una cartera de renta fija con duración notablemente superior a la que se conseguiría con bonos de cupón periódico de igual plazo. Esta propiedad de los bonos cupón cero resulta de especial interés de cara a la gestión de carteras de renta fija con vocación de cobertura, cuyos horizontes de gestión sean dilatados, como son los fondos de pensiones. Este tipo de fondos se enfrentan al problema del diseño de estrategias de inmunización con bonos normales, debido a que con éstos no se pueden generar las duraciones requeridas para la inmunización. Este problema se ha visto moderado tras la emisión de referencias de deuda del Estado a plazo a 30 años desde enero de 1998. Otro matiz asociado a la mayor duración de los bonos cupón cero frente a bonos con cupón periódico de igual plazo, es la mayor sensibilidad del valor de las inversiones formadas a partir de cupones cero a las variaciones de los tipos de interés. De esta forma, los strips resultan también atractivos para aquellos inversores que deseen especular apostando por descensos de los tipos de interés superiores a la expectativa contemplada por el mercado.

La segunda característica financiera relevante de los strips que los hace atractivos frente a los bonos con cupones periódicos es su elevado *apalancamiento*. El alto grado de apalancamiento de un bono cupón cero se constata en el hecho de que su adquisición requiere un desembolso bastante menor que la de un bono con cupones de similar plazo, siendo más acentuada esta característica cuanto mayor sea su plazo.

FIGURA 2
Valor actual de bonos cupón cero con distintos plazos de maduración
(ETI plana a nivel 6,15 %)

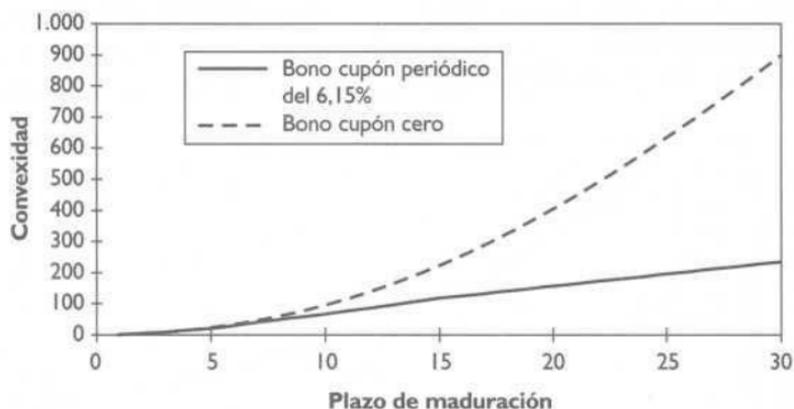


Esta característica determina que los strips sean por una parte atractivos para inversores minoristas (no profesionales) que deseen asegurar una rentabilidad a un horizonte lejano con un desembolso reducido. Aparte de este aprovechamiento de su carácter apalancado en la construcción de carteras inmunizadas, esta propiedad también resulta atractiva para inversores especuladores no residentes que deseen minimizar su exposición al riesgo de cambio.

Por último, los activos cupón cero presentan una convexidad distinta que la de los bonos con cupones. La convexidad de un activo de renta fija resulta positivamente dependiente de la duración, así como del grado de dispersión de sus flujos en torno a dicha duración. Dado que los bonos cupón cero tienen un grado de dispersión nulo de sus flujos en torno a su duración, su convexidad es menor que la de un bono con cupones de idéntica duración. Adicionalmente, ya que la duración de un cupón cero a un determinado plazo es mayor que la del bono original de igual plazo, para un

determinado plazo la convexidad de un bono cupón cero es mayor que la del bono original. Estas propiedades de convexidad de los bonos cupón cero deben ser consideradas de forma adecuada en la construcción de carteras de renta fija, ya que el grado de convexidad de una cartera influye de forma decisiva en su exposición a las alteraciones de la ETTI.

FIGURA 3
Relación plazo-convexidad



En suma, los bonos cupón cero tienen unas propiedades específicas de duración, apalancamiento y convexidad que convenientemente aplicadas sirven para gestionar carteras construidas con vocaciones muy distintas, tanto de cobertura como de especulación, ampliando las posibilidades de gestión que se ofrecían de forma exclusiva con los bonos de cupón periódico.

4. Valoración de los strips de Deuda Pública

Aunque la propia cotización de strips ya muestre la ETTI —o la curva cupón cero—, sigue resultando interesante su cálculo a través de otros procedimientos. No sólo porque la propia curva de strips no genera información en todos los tramos de la curva, sino porque una estimación alternativa proporciona un benchmark para la valoración de la propia curva de strips, que no tiene por qué adecuarse en todo momento y con exactitud a su valoración teórica, según ha demostrado la experiencia internacional en otros mercados ².

² Véase Clermont-Tonnerre (1993).

La curva de tipos cupón cero estimada a partir de los precios de los bonos con cupones constituye una referencia adecuada a la valoración teórica de los strips. Haciendo uso de la ley de unicidad de precio el precio de un bono con cupones se puede expresar como suma de los valores actuales de la «cesta» de bonos cupón cero en que se puede descomponer el activo.

$$P = \sum_{i=1}^n C_i \cdot d(t_i) = \sum_{i=1}^n C_i \cdot e^{-\int_0^{t_i} r(t) \cdot dt} = \sum_{i=1}^n C_i \cdot e^{-R(0, t_i) \cdot t_i} \quad (1)$$

donde n denota el número de flujos del activo financiero, C_i el flujo monetario del activo financiero en $t=i$, y $d(t_i)$ el valor actual de una unidad monetaria en $t=i$. Como se puede ver en (1), resulta equivalente expresar la ETTI bien a partir de la función de descuento, $d(t_i)$, bien a partir de la senda de tipos implícitos o de los tipos cupón cero.

La mayoría de los modelos que estiman la ETTI se basan en la imposición de una forma funcional a la estructura de tipos a estimar. Ello es necesario ya que el número de bonos que observamos es inferior al número total de fechas en que estos bonos pagan sus cupones y amortizan su principal, lo que genera problemas de falta de grados de libertad. Los modelos desarrollados pueden ser clasificados en tres categorías: a) modelos basados en una aproximación polinómica de la curva de tipos cupón cero (Chambers, Carleton y Waldman 1984); b) modelos basados en una aproximación de la función de descuento a través de splines, bien polinómicos (McCulloch, 1971 y 1975) ó exponenciales (Vasiceck y Fong 1982) y c) modelos basados en la especificación de una forma funcional de los tipos de interés implícitos instantáneos (Nelson y Siegel, 1987 y Svensson, 1994).

En este estudio no pretendemos llevar a cabo una comparación de los distintos modelos de estimación de la ETTI³, sino únicamente analizar cuál de ellos puede ser más adecuado para la valoración de strips y emplearlos posteriormente para analizar las desviaciones entre la curva estimada y la real. En primer lugar llevamos a cabo una descripción del análisis histórico de la estimación de la ETTI de acuerdo a distintos modelos desde enero de 1994 hasta mayo de 1998. En segundo lugar, utilizando el período entre enero y mayo de 1998, analizamos el ajuste de las distintas estimaciones a la curva de strips observada. Hemos estimado la ETTI a través de los

³ Esta labor ha sido desarrollada en nuestro mercado en otras investigaciones -Núñez (1995), Urrutia, Carranceja y Fernández (1997) y Gómez (1998).

modelos de McCulloch, Nelson & Siegel y Svensson⁴. Los resultados históricos de la estimación bajo estos tres modelos aparece recogida en la tabla I.

TABLA I
Resultados de la estimación de la ETTI

	Fechas						
	9/01/96	11/07/96	4/12/96	16/01/98	24/01/94	2/03/95	7/05/98
	McCulloch						
N.º Parámetros.....	4	5	5	5	5	6	6
N.º Observaciones (L)	20	22	22	26	25	32	32
SSR	1,6198	0,1470	0,1256	0,2745	1,3732	0,1322	0,1405
SSR/L	0,0810	0,0067	0,0057	0,0106	0,0549	0,0041	0,0044
MEAP	0,2227	0,0655	0,0552	0,0787	0,1970	0,0492	0,0481
	Nelson y Siegel						
N.º Parámetros.....	4	4	4	4	4	4	4
N.º Observaciones (L)	20	22	22	26	25	32	32
SSR	1,0064	0,1911	0,1350	2,2805	1,6282	0,2054	0,2584
SSR/L	0,0503	0,0087	0,0061	0,0877	0,0651	0,0064	0,0081
MEAP	0,1678	0,0773	0,0593	0,2070	0,2124	0,0658	0,0689
	Svensson						
N.º Parámetros.....	6	6	6	6	6	6	6
N.º Observaciones (L)	20	22	22	26	26	32	32
SSR	0,9204	0,1904	0,1218	0,3760	0,9059	0,1684	0,1604
SSR/L	0,0460	0,0087	0,0055	0,0145	0,0348	0,0053	0,0050
MEAP	0,1576	0,0780	0,0529	0,1015	0,1511	0,0533	0,0515

Nota: SSR: suma cuadrática residual = suma de los cuadrados de los errores de precio.

MEAP: media del valor absoluto de los errores de precio.

Las estimaciones los días 16/01/98 y 7/05/98 se han efectuado considerando la fiscalidad en la estimación e incluyendo todas las referencias de deuda segregables.

El principal problema al que nos enfrentamos en la estimación de la ETTI en el último período de la muestra es el de la incorporación de referencias segregables que tienen diferentes características fiscales al resto. Si introducimos todas las referencias de la muestra sin tener en cuenta su fiscalidad, parte de los errores de la estimación se derivarán de consideraciones fiscales, por la ausencia de homogeneidad fiscal. Esta idea se expone en los resultados que recogemos en las tablas 2 y 3 relativos a la estimación de la curva con el modelo de Nelson y Siegel para dos días del período efectuadas con distintas posibilidades en cuanto a fiscalidad.

La conclusión más relevante que obtenemos es la necesidad de considerar la fiscalidad de las referencias si simultáneamente se in-

⁴ En el Apéndice exponemos una descripción de los modelos empleados para la estimación de la ETTI.

TABLA 2
Comparación de la estimación de la ETTI con y sin la consideración de la fiscalidad, bajo el modelo de Nelson y Siegel (estimación para el 16-1-98)

	Resultados de la estimación de la ETTI bajo la consideración de la fiscalidad	
	Sin incluir referencias segregables (*)	Incluyendo referencias segregables
N.º Parámetros	4	4
N.º Observaciones (L)	27	31
SSR	0,1129	0,1882
SSR/L	0,0042	0,0061
MEAP	0,0472	0,0602
	Resultados de la estimación de la ETTI sin la consideración de la fiscalidad	
	Sin incluir referencias segregables	Incluyendo referencias segregables
N.º Parámetros	4	4
N.º Observaciones (L)	27	31
SSR	0,1389	0,5636
SSR/L	0,0051	0,0182
MEAP	0,0551	0,0902

(*) Las referencias segregables son los B-5.00, B-5.25, O-6.00 y O-6.15, de plazos respectivos 3, 5, 10 y 15 años.

TABLA 3
Comparación de la estimación de la ETTI con y sin la consideración de la fiscalidad, bajo el modelo de Nelson y Siegel (estimación para el 7-5-98)

	Resultados de la estimación de la ETTI bajo la consideración de la fiscalidad	
	Sin incluir referencias segregables (*)	Incluyendo referencias segregables
N.º Parámetros	4	4
N.º Observaciones (L)	27	32
SSR	0,1066	0,2584
SSR/L	0,0039	0,0081
MEAP	0,0481	0,0689
	Resultados de la estimación de la ETTI sin la consideración de la fiscalidad	
	Sin incluir referencias segregables	Incluyendo referencias segregables
N.º Parámetros	4	4
N.º Observaciones (L)	27	32
SSR	0,1332	0,4040
SSR/L	0,0049	0,0126
MEAP	0,0533	0,0871

(*) Las referencias segregables son los B-5.00, B-25, O-6.00, O-6.15, y O-6.00 de plazos respectivos 3, 5, 10, 15 y 30 años.

roducen en la estimación referencias de deuda segregables y no segregables. Esto resulta vital si el objetivo es la valoración de los strips de deuda pública.

En el caso de que las referencias de deuda segregables no se incluyan en la estimación, la no consideración de los aspectos fiscales no deteriora significativamente la calidad del ajuste en relación a la estimación que sí los considera, ya que, en dicho caso, todos los activos serían homogéneos fiscalmente. Sin embargo, la opción de no introducir las nuevas referencias segregables presenta problemas aún más graves, ya que no se introduciría información relevante en la estimación (las propias referencias segregables desde donde se extraen los strips).

La mejor opción es estimar considerando simultáneamente a los bonos con cupones no segregables, las referencias segregables así como a las operaciones simultáneas y letras del Tesoro; es decir toda la información que cotiza con riesgo Tesoro en el mercado español, pero introduciendo su específico tratamiento fiscal. En el caso de las referencias no sujetas a retención, como son las segregables y las operaciones simultáneas y letras del Tesoro, la ecuación de formación de precios responde a la expresión recogida en (1), es decir el valor actualizado del importe íntegro de todos los flujos futuros. Sin embargo, en el caso de referencias cuyos cupones nominales están sometidos a retención la ecuación de su formación de precios debe alterarse, minorando los flujos en la cuantía del coste del lavado de cupón:

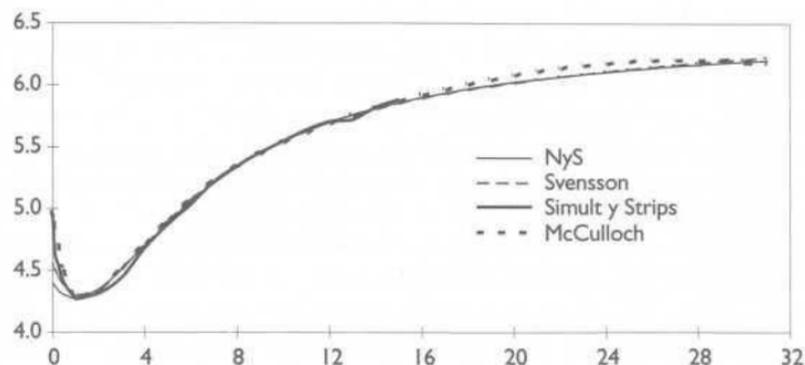
$$P = \sum_{i=1}^n (C_i - x) \cdot d(t_i) = \sum_{i=1}^n (C_i - x) \cdot e^{-\int_0^{t_i} r(t) \cdot dt} = \sum_{i=1}^n (C_i - x) \cdot e^{-R(0, t_i) \cdot t_i} \quad (2)$$

donde x denota el coste del lavado de cupón, que expresamos como un porcentaje del cupón nominal, más que como un parámetro fijo, con el objetivo de permitir un coste de lavado de cupón mayor cuanto más elevado sea el cupón, y por tanto mayor el coste de oportunidad de no proceder al lavado. Esta proporción es compatible con información sobre el coste de lavado de cupón recogida en operadores del mercado, y que en el período estudiado se ha situado en torno al 0,6 % del cupón nominal. Los resultados de la estimación de la ETTI con este coste de lavado se exponen en las figuras 4 y 5.

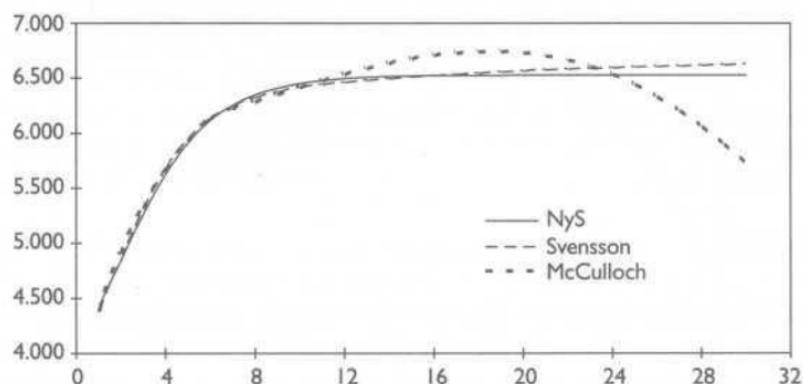
El análisis de dichas figuras, así como de los resultados que recogimos en la tabla I muestran que el ajuste de los tres modelos es suficientemente bueno y que además las tres curvas teóricas de cu-

FIGURA 4

Curva de tipos cupón cero estimadas con corrección de fiscalidad e introduciendo la referencia a 30 años en la estimación (16-1-98)



Senda de tipos de interés implícitos a 1 año estimada el 16-1-98



Errores de precio de la estimación = precio teórico-precio real (16-1-98)

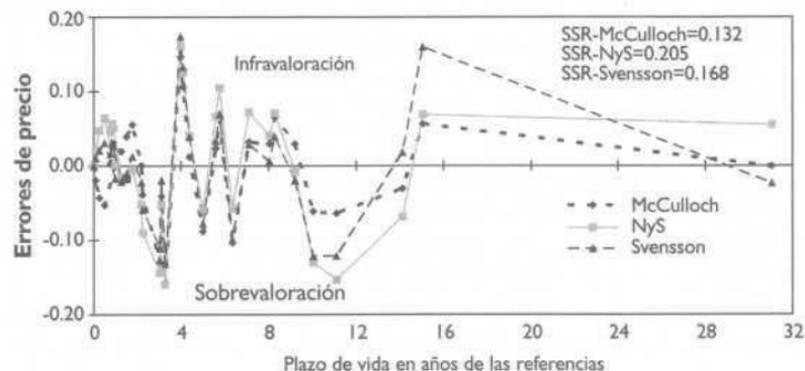
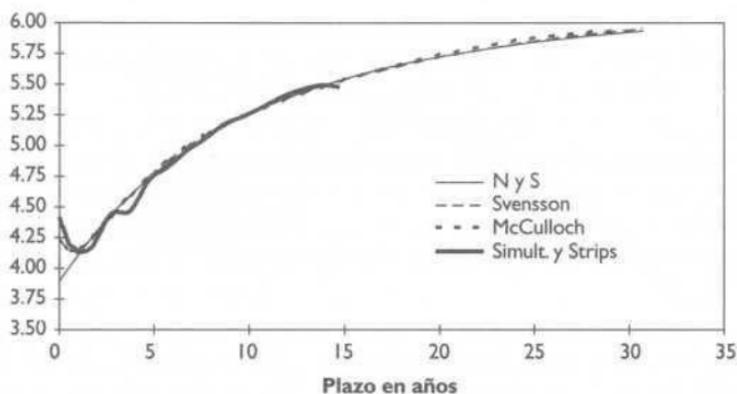
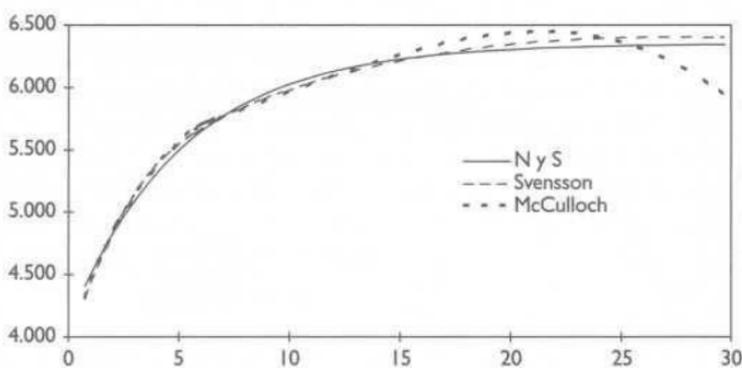


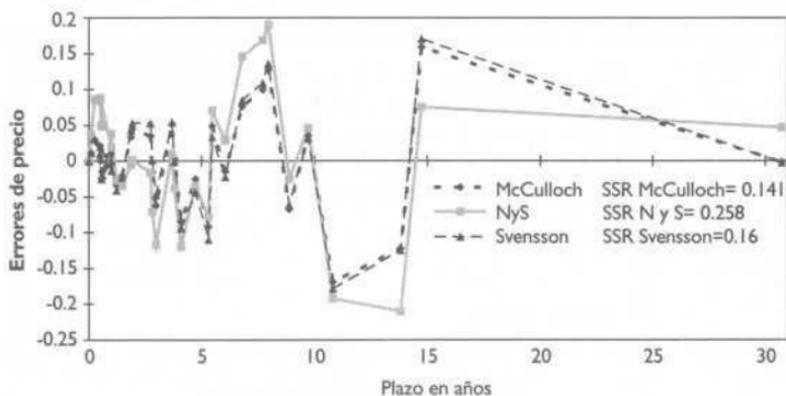
FIGURA 5
Curvas de tipos cupón cero estimadas con corrección de fiscalidad e introduciendo la referencia a 30 años en la estimación (7-5-98)



Senda de tipos de interés implícitos a 1 año estimada el 7-5-98



Errores de precio de la estimación = Precio teórico-Precio real (7-5-98)



pón cero se adaptan suficientemente a la curva de tipos cupón cero realmente cotizada.

Atendiendo al menor número de parámetros (cuatro) que contiene la especificación del modelo de Nelson y Siegel el ajuste de este modelo es menos satisfactorio que el de los modelos de McCulloch y Svensson, especialmente en el extremo largo de la curva (véanse figuras 4 y 5), como consecuencia, además, de la convergencia que impone de los tipos de interés implícitos en el largo plazo. Asimismo, el ajuste en tipos de interés en el tramo corto también es menos satisfactorio bajo el modelo de Nelson y Siegel. En todo caso, el problema del peor ajuste en la zona corta de la curva es genérico para todos los modelos, como consecuencia de haber estimado con el criterio de minimización de errores en precios, en lugar de en tipos de interés. Por el contrario, el modelo que proporciona normalmente mejor ajuste, McCulloch, genera estructuras de tipos de interés implícitos con formas poco razonables en el largo plazo. El modelo de Svensson es el que suele reunir simultáneamente propiedades de buen ajuste y de generación de estructuras de tipos implícitos convergentes en el extremo largo de la curva. Sin embargo, la estimación de este modelo resulta muy costosa, ya que el elevado número de parámetros que requiere estimar y la elevada multicolinealidad que existe entre éstos, dificulta la convergencia hacia una solución que sea verdaderamente un mínimo absoluto de la función objetivo (la suma cuadrática de los errores de precio).

Más allá de esta rápida visión descriptiva de la evolución de la curva en distintos momentos del tiempo, conviene pasar a comparar la curva estimada con la curva real cotizada de strips, análisis con el que trataremos de decidir cuál de estos modelos resulta más razonable para valorar los strips. En las tablas 4 y 5 y en las figuras 6 y 7 comparamos la curva teórica de tipos cupón cero estimada con los distintos modelos con la curva real de los strips, tanto la generada por los cupones segregados como por los principales. En el primer día de los que presentamos (16-1-98), la nueva referencia de deuda a 30 años todavía no estaba segregada, por lo que hemos estudiado la conveniencia de introducirla en la estimación de la curva de tipos cupón cero a fin de valorar los strips.

La comparación de las curvas teóricas estimadas con la curva de strips nos permite analizar qué modelo de estimación se ajusta mejor a la valoración de strips y, al mismo tiempo, extraer información sobre el signo de los diferenciales de tipos de interés entre dichas curvas. Este último aspecto es estudiado, no obstante, de forma más sistemática en la sección siguiente con toda la muestra disponible desde el inicio de cotización de los strips.

TABLA 4 (cont.)
Comparación entre la curva cupón cero estimada a partir de los precios de los bonos y la curva de tipos cupón cero real cotizada a través de los Strips, Letras del Tesoro y Simultáneas (16-1-98)

Plazo	Diferencias entre la curva de Strips de cupón y la curva cupón cero estimada													
	Curvas cupón cero teóricas					Nelson y Siegel								
	Curva Strips Principal	Nelson y Siegel		Svensson		McCulloch		Nelson y Siegel		McCulloch				
(1) (*)	sin 30 A	con 30 A	sin 30 A	con 30 A	sin 30 A	con 30 A	sin 30 A	con 30 A	(1)-(2)	(1)-(3)	(1)-(4)	(1)-(5)	(1)-(6)	(1)-(7)
3,03	4,4450	4,5096	4,5166	4,5007	4,5045	4,5035	4,5123	4,5123	-0,065	-0,072	-0,056	-0,059	-0,058	-0,067
5,03	4,8887	4,8916	4,8896	4,9050	4,8951	4,8997	4,8976	4,8976	-0,003	-0,001	-0,016	-0,006	-0,011	-0,009
10,03	5,5510	5,5455	5,5452	5,5332	5,5428	5,5271	5,5333	5,5333	0,006	0,006	0,018	0,008	0,024	0,018
15,04	5,8850	5,8479	5,8589	5,8623	5,8462	5,8714	5,8635	5,8635	0,037	0,026	0,023	0,039	0,014	0,022

(*) La ETTI real está generada en el tramo corto (hasta el plazo de 1 año) por los tipos de interés de las operaciones simultáneas y Letras del Tesoro, y por los tipos de interés de los Strips de deuda del Tesoro a partir del plazo a 1 año.

(**) Estimación de la ETTI sin la referencia de deuda a 30 años.

Nota. Todos los tipos de interés se encuentran expresados en forma compuesta con base 365 días.

TABLA 5
Comparación entre curvas cupón cero estimadas a partir de precios de los bonos y tipos cupón cero cotizados a través de los Strips (7-5-98)

		Curvas cupón cero teóricas			Diferencias entre la curva de Strips de Cupón y curva cupón cero estimada		
Plazo	Curva Strips Cupón	N y S	Svensson	Mc-Culloch	N y S	Svensson	Mc-Culloch
	(1)	(2)	(3)	(4)	(1)-(2)	(1)-(3)	(1)-(4)
0,00	4,4188	3,8921	4,2479	4,2493	0,527	0,171	0,169
0,08	4,3686	3,9114	4,2222	4,2267	0,457	0,146	0,142
0,25	4,3109	3,9499	4,1824	4,1877	0,361	0,128	0,123
0,50	4,1951	4,0053	4,1492	4,1482	0,190	0,046	0,047
0,72	4,1740	4,0542	4,1395	4,1312	0,120	0,035	0,043
1,00	4,1318	4,1121	4,1474	4,1358	0,020	-0,016	-0,004
1,72	4,1785	4,2563	4,2317	4,2346	-0,078	-0,053	-0,056
2,73	4,4415	4,4353	4,4064	4,4137	0,006	0,035	0,028
3,73	4,4685	4,5934	4,5820	4,5814	-0,125	-0,113	-0,113
4,73	4,7210	4,7336	4,7371	4,7320	-0,013	-0,016	-0,011
5,73	4,8295	4,8582	4,8693	4,8664	-0,029	-0,040	-0,037
6,73	4,9620	4,9696	4,9822	4,9835	-0,008	-0,020	-0,021
7,73	5,0645	5,0687	5,0790	5,0812	-0,004	-0,014	-0,017
8,73	5,1770	5,1575	5,1635	5,1646	0,019	0,014	0,012
9,73	5,2415	5,2371	5,2383	5,2378	0,004	0,003	0,004
10,73	5,3165	5,3089	5,3055	5,3039	0,008	0,011	0,013
11,73	5,3990	5,3734	5,3661	5,3641	0,026	0,033	0,035
12,73	5,4565	5,4317	5,4214	5,4199	0,025	0,035	0,037
13,73	5,4950	5,4845	5,4722	5,4720	0,010	0,023	0,023
14,73	5,4775	5,5326	5,5191	5,5210	-0,055	-0,042	-0,044

		Curvas cupón cero teóricas			Diferencias entre la curva de Strips de Principal y curva cupón cero estimada		
Plazo	Curva Strips Principal	N y S	Svensson	Mc-Culloch	N y S	Svensson	Mc-Culloch
	(1)	(2)	(3)	(4)	(1)-(2)	(1)-(3)	(1)-(4)
2,73	4,4315	4,4353	4,4064	4,4137	-0,004	0,025	0,018
4,73	4,7355	4,7336	4,7371	4,7320	0,002	-0,002	0,003
9,73	5,2340	5,2371	5,2383	5,2378	-0,003	-0,004	-0,004
14,73	5,5255	5,5326	5,5191	5,5210	-0,007	0,006	0,004

Nota: Tipos de interés compuestos en base 365.

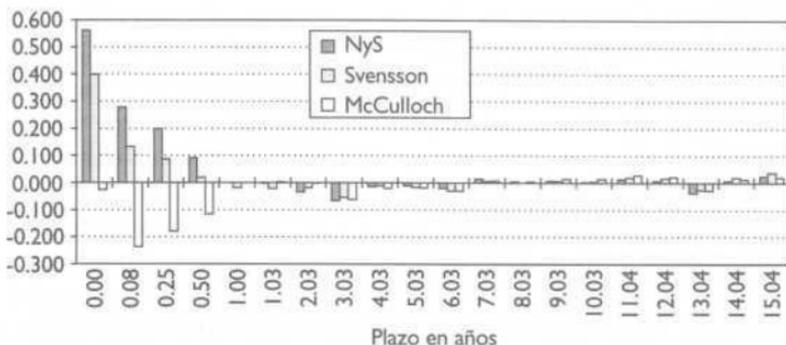
Todas las curvas cupón cero teóricas han sido estimadas considerando la fiscalidad e incluyendo todas las referencias segregables en la estimación.

Observamos que a partir del plazo de un año los tres modelos proporcionan un ajuste a la curva real suficientemente bueno, destacando el hecho de que el modelo de Nelson y Siegel ajusta mejor a los strips que otros modelos, especialmente si los diferenciales son calculados con la curva de strips de principal.

Nos parece reseñable el resultado del ajuste de los distintos modelos el día 7-5-98 al Strip de principal en el plazo a 3 años (véase la

FIGURA 6

Diferenciales de tipos de interés entre la curva de Strips de Cupón y la curva cupón cero estimada bajo distintos modelos (16-1-98)



Diferenciales de tipos de interés entre la curva de Strips de Principal y la curva cupón cero estimada bajo distintos modelos (16-1-98)

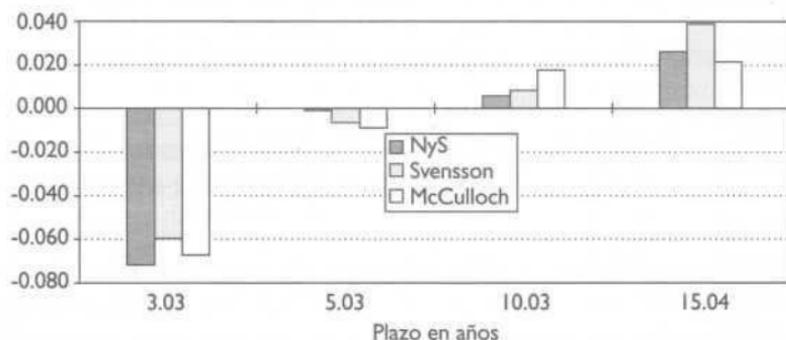
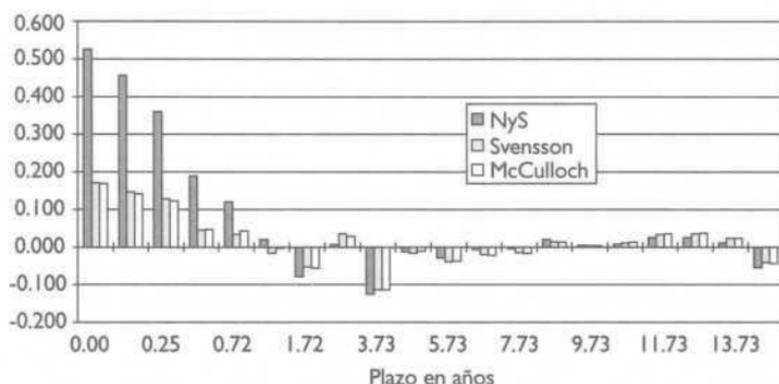


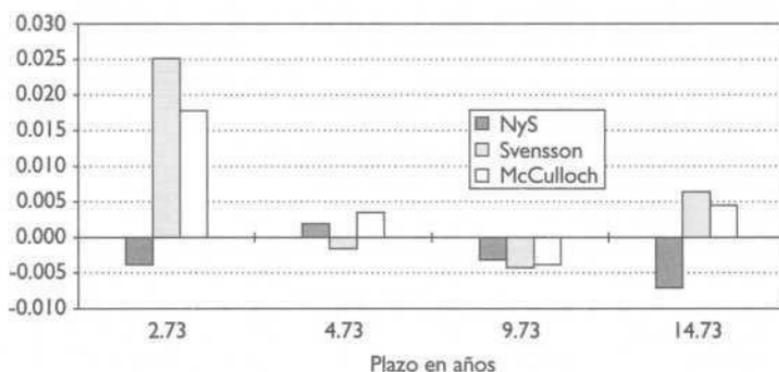
figura 7): el ajuste de los modelos de McCulloch y Svensson es sustancialmente peor que el obtenido bajo el modelo de Nelson y Siegel. Precisamente, éste es uno de los tramos de la curva de strips en los que es más importante la valoración ya que, por la adaptación de este plazo al horizonte medio de los fondos de inversión, es uno de los plazos en el que se produce una mayor negociación.

Como conclusión general, no obstante, no se puede considerar que uno de estos modelos valore mejor que el resto los strips en todas las zonas de la curva. Lo importante es que en los plazos a partir de un año todos los modelos parecen satisfactorios y los signos de los diferenciales entre las curvas teóricas obtenidas con los

FIGURA 7
Diferenciales de tipos de interés entre la curva de Strips de Cupón y la curva cupón cero estimada con distintos modelos (7-5-98)



Diferenciales entre la curva de Strips de Principal y la curva cupón cero estimada con distintos modelos (7-5-98)



distintos modelos y los strips resultan bastante homogéneos a lo largo de todos los plazos. Puede destacarse como conclusión fundamental que los diferenciales de tipos de interés entre la curva real de strips y la teórica han sido negativos en los plazos cortos-medios (hasta el 6-7 años) y positivos en el resto. Por ello, no parece que la elección de un modelo concreto sea determinante de cara a evaluar si los strips resultan, en relación a la curva teórica, caros o baratos.

De todas formas, debemos elegir un modelo para generar de forma sistemática una referencia teórica para la valoración de los

strips, a fin de estudiar patrones de comportamiento de los diferenciales de tipos de interés entre dicha referencia teórica y la curva cotizada. De acuerdo a los resultados obtenidos, consideramos que el modelo de Nelson y Siegel puede ser uno de los más apropiados para la valoración de los strips en este período muestral.

Por tanto, este modelo es el que hemos empleado en este artículo para la estimación diaria de la curva de tipos cupón cero a partir de enero de 1998 y su posterior comparación con la curva de cotización de los strips.

Respecto a la conveniencia de introducir o no la referencia a 30 años en la estimación de la curva, observamos que el ajuste obtenido el día 16-1-98 a la curva de strips resulta mejor en la mayoría de las zonas cuando se introduce dicha referencia en la estimación. Una vez que desde mediados de mayo se está segregando la referencia a 30 años, creemos que es incuestionable la necesidad de estimar la curva teórica con dicha referencia. Por tanto, la muestra teórica de estimaciones de la curva de tipos que hemos reproducido diariamente desde enero de 1998 con el modelo de Nelson y Siegel ha incluido siempre dicha referencia. El mejor ajuste con esta referencia se produce no sólo en la estimación a través de Nelson y Siegel, sino también con las otras metodologías.

5. Diferenciales entre la cotización de strips y la curva teórica de tipos cupón cero

Tras estimar la estructura temporal de tipos de interés, y con independencia del método finalmente escogido —a partir de este momento Nelson y Siegel—, conviene valorar el grado de aproximación entre la valoración teórica de los strips y su cotización. La cotización del Strip no tiene por qué adecuarse a su valoración teórica; o, desde el punto de vista del mercado, esta valoración teórica no tiene por qué recoger estrictamente las condiciones de liquidez, fiscalidad, presión de la demanda, etc., en las cotizaciones de los strips. Así, por ejemplo, el atractivo de los tipos cupón cero a plazos largos en contextos bajistas de tipos, debido a sus elevadas duraciones y alto apalancamiento ha determinado que en EE.UU. y en Francia los tipos de interés de los strips de largo plazo, a un plazo de 30 años, se situaran de forma casi ininterrumpida por debajo de la curva teórica estimada. Algo similar puede ocurrir en los tramos más cortos en algunos países, en los que la existencia de un amplio número de fondos garantizados (tanto de rentabilidad garantizada como de seguimiento de un índice bursátil) a horizontes cortos generara una fuerte demanda de cupones cero.

Estos comportamientos diferenciales se han producido también en el mercado de strips en España, de acuerdo a la presión de la demanda en los distintos tramos de la curva. De acuerdo a estas presiones, es razonable que la cotización de los strips se aleje de su valoración teórica en distintos tramos. Sin embargo, conviene tener en cuenta que existe una limitación a las diferencias de precio entre los strips teóricos y los strips de mercado, toda vez que se debe cumplir en todo momento el requisito de equivalencia financiera entre el valor de un bono segregable y la cartera equivalente de strips.

La curva teórica de tipos de interés cupón cero estimada a partir de los precios de la deuda del Tesoro es únicamente una referencia para la valoración de la curva de strips. Esto significa, como ya se ha señalado, que no cabe esperar que la curva teórica deba reproducir exactamente la curva de strips, ya que la demanda de uno y otro instrumento —bonos con cupones y activos cupón cero, respectivamente— es distinta y, consiguientemente las rentabilidades exigidas en uno y otro mercado. Precisamente, los diferenciales de tipos de interés que se observen entre una curva y otra deberán estar explicados por la importancia de la demanda de estos activos en cada zona de la curva. Así, por ejemplo, situaciones en las que la curva real de strips se sitúe por debajo de la curva teórica (en tipos de interés) podrían estar asociadas a una elevada demanda de strips en dichos plazos. A su vez, cuando los diferenciales entre la curva de strips y la curva teórica sean positivos, habría un indicio de que en dichas zonas tiene lugar un exceso de oferta de strips.

En todo caso, para que no existan posibilidades de arbitraje entre las carteras de strips y los correspondientes bonos subyacentes, es necesario que se mantenga en todo momento la equivalencia de valor entre una y otra, para lo cual es obligado que si existen diferenciales negativos entre la curva de strips y la teórica en algunas zonas de la curva éstos sean compensados por diferenciales positivos en otros tramos. Si la curva de tipos de los strips estuviese consistentemente por encima de la curva teórica en todas las zonas, sería una señal de que los strips podrían estar «baratos» en todos los plazos, y consiguientemente podría existir arbitraje a través de la compra de strips con lo que reconstituir el correspondiente bono subyacente y su venta a un precio más elevado. Si bien esto último no tendría por qué ocurrir si al mismo tiempo la deuda segregable estuviese excesivamente barata respecto al resto de bonos y obligaciones, esta divergencia podría permitir la generación de bonos sintéticos con los que aprovechar la diferente valoración. Otro arbitraje, en sentido inverso, también sería posible, si la curva de strips se situara por debajo de la curva teórica en todos los tramos, ya que la compra de un bono segregable se reali-

zaría a un valor más bajo que el valor que se obtendría al segregar el bono y vender los strips de cupón y principal correspondientes.

En el período muestral escogido (enero-mayo 1998) se han observado patrones de comportamiento de los diferenciales entre la curva de strips y la curva teórica estimada que son reseñables, y que guardan una relación lógica con los segmentos en los que se localiza la mayor demanda de strips (los tramos cortos de la curva). Al mismo tiempo se comprueba como los tramos largos de la curva no han tenido en estos primeros meses una demanda lo suficientemente estable.

La primera idea a destacar es que la curva de strips no se ha situado en ningún momento por encima o por debajo de la curva teórica de modo uniforme en todos sus plazos, lo que habría sido signo de posibilidades de arbitraje (ver la sección sobre posibilidades de arbitraje) y de defectos en la formación del precio de los strips, que hubiesen abierto la puerta a la generación de bonos sintéticos a partir de los strips en caso de que estos estuviesen baratos. Lo que se ha observado han sido diferenciales alternativamente positivos y negativos a lo largo de distintas zonas de la curva, con algún patrón común que conviene señalar. Estos diferenciales han sido mayoritariamente negativos en los plazos cortos (zona sobrevalorada), especialmente hasta el tramo cinco años, y positivos en las zonas largas de la curva, evidencia que parece asociada a un exceso de demanda de strips en los tramos cortos y un exceso de oferta en los plazos largos, o un ajuste en estos últimos tramos para adaptarse a la sobrevaloración de los tramos cortos. Estos argumentos vienen avalados no sólo por la proporción de CS y PS en manos de terceros en los tramos cortos de la curva frente a los tramos largos (principalmente fondos de inversión garantizados y la más que tímida entrada de los seguros y los fondos de pensiones), sino porque la corrección de los errores de cotización de los strips en este tramo de la curva ha venido más de la mano de una apreciación de los bonos en el tramo corto de la curva que por un abaratamiento de los strips. Las figuras 8 y 9 muestran la radiografía de la segregación y la posesión de strips de principal, con una demanda más estable que los cupones segregables, en manos de terceros.

En la tabla 6 puede observarse que los diferenciales entre la cotización de la curva de strips (tanto CS como PS) y su valoración teórica en los plazos a 2, 3, 4 años han sido negativos en más de un 70 % de la muestra observada. Conviene destacar además, que en las ocasiones en que han sido positivos dichos diferenciales no han resultado significativos. Por su parte, los tramos de la curva en los que se ha concentrado una mayor proporción de diferenciales positivos han sido los plazos largos de la curva de strips. Similarmen-

FIGURA 8
Proporción segregada de strips sobre el volumen potencial

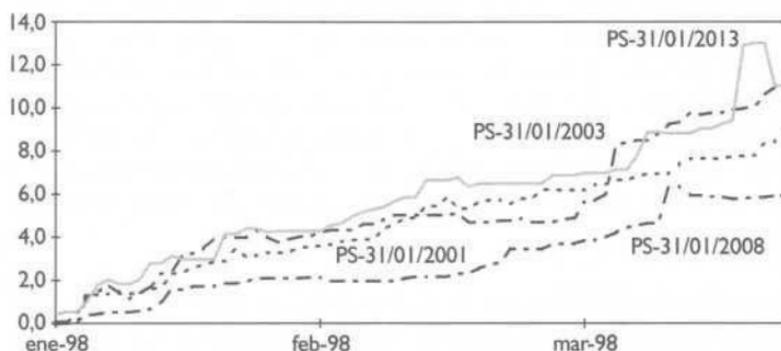
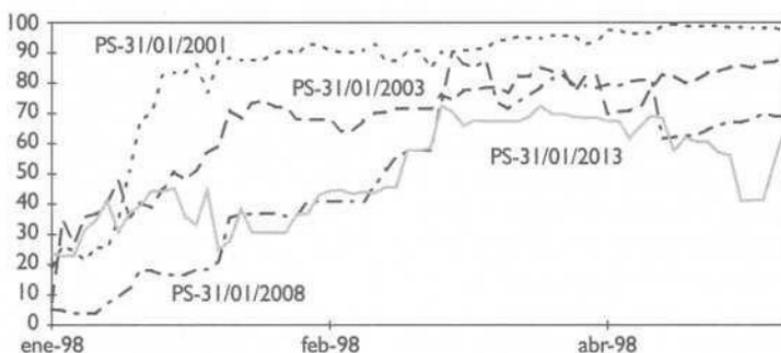


FIGURA 9
Proporción de terceros sobre segregado



te, la media de diferenciales negativos observados en algunos días de la muestra en estas zonas de la curva no han resultado significativos.

La demanda de los strips de corto plazo, especialmente en los tramos a 2 y 4 años —donde no sólo la concentración de la demanda es elevada, sino que la liquidez es reducida al no haber ningún cupón de principal en estos tramos— resulta fácilmente comprensible a la luz de la existencia de fondos garantizados a estos plazos. El uso de los strips a estos plazos, junto con combinaciones de estos strips y los bonos segregables son alternativas claras de cobertura para los fondos garantizados. La demanda de este tipo de instrumentos es lo suficientemente elevada como para que se hayan observado estas sobrevaloraciones en los tramos cortos de la curva. Sobre todo si se tiene en cuenta que los demandantes potenciales

TABLA 6
Diferencial Curva de Strips-Curva Teórica de tipos Cupón Cero estimada con N y S (Período 8-1-98/8-5-98)

	Tipos Cupones Segregados-Curva Teórica															Tipos Prim.Seg. - C.Teorica				
	Plazos															Plazos				
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	3	5	10	15	
Media	-0,001	-0,064	-0,019	-0,064	-0,013	-0,007	-0,003	-0,001	0,013	0,008	0,019	0,023	0,004	0,018	-0,001	-0,023	0,006	0,003		
Desv. Tipica	0,034	0,044	0,023	0,041	0,033	0,034	0,023	0,027	0,031	0,020	0,023	0,026	0,034	0,022	0,036	0,020	0,018	0,021		
Diferenciales positivos																				
%	48 %	5 %	29 %	5 %	50 %	43 %	48 %	55 %	75 %	73 %	84 %	76 %	63 %	84 %	54 %	14 %	7,713 %	66 %		
Media	0,028	0,024	0,012	0,031	0,012	0,026	0,016	0,018	0,029	0,016	0,027	0,035	0,026	0,025	0,025	0,004	0,015	0,014		
Desv. Tipica	0,021	0,021	0,011	0,027	0,010	0,013	0,015	0,012	0,015	0,013	0,014	0,015	0,016	0,015	0,015	0,010	0,010	0,012		
Diferenciales Negativos																				
%	53 %	95 %	71 %	95 %	50 %	58 %	53 %	45 %	25 %	28 %	16 %	24 %	38 %	16 %	46 %	86 %	29 %	34 %		
Media	-0,026	-0,068	-0,031	-0,069	-0,038	-0,032	-0,020	-0,025	-0,033	-0,013	-0,021	-0,017	-0,034	-0,014	-0,030	-0,028	-0,016	-0,018		
Desv. Tipica	0,019	0,040	0,013	0,036	0,028	0,021	0,015	0,020	0,016	0,021	0,018	0,009	0,018	0,020	0,030	0,017	0,017	0,021		

* Diferencial significativo al nivel de confianza del 95 %.

de estos activos cupón cero no son sólo los nuevos fondos con un horizonte de inversión a ese plazo, sino que los fondos ya formados que tengan asegurado un valor liquidativo a plazos en los que existen strips, pueden optar a deshacer parcialmente su cartera y a garantizarse el valor final asegurado con un Strip.

Como muestra de esta demanda potencial, y utilizando datos de finales del primer semestre de 1997 —con datos oficiales disponibles por Inverco y la CNMV antes de que comenzara el mercado de strips—, se puede comprobar (véase la tabla 7) cómo la demanda potencial de strips en los tramos cortos de la curva superaba claramente no sólo la oferta esperada, sino la que finalmente existió desde que comenzó el mercado de strips en enero de 1998⁵. Analizando los datos de los fondos garantizados registrados se pudo comprobar cómo los vencimientos de las garantías de estos fondos se concentraban en el tramo más corto de la curva: desde 1999 hasta el año 2002, con dos puntos de demanda importantes para los strips, en el año 2000 y en el año 2002. Los datos de la demanda de strips en la cobertura de los fondos de inversión garantizados existentes a mediados de 1997, reflejados en la tabla 7 suponen que se realiza una inversión en una cartera de dos strips que coincide en duración con el plazo de vencimiento de la garantía de cada uno de los fondos. En la segunda estimación, se ha tenido en cuenta el límite del 30 % de inversión en una sola referencia. Entre estos dos supuestos se podía acotar de forma razonable el mínimo de la demanda potencial de strips en estos primeros meses de negociación. El hecho de que sea mínimo se explica no sólo por la generación de nuevos fondos en el segundo semestre de 1997 (no contemplado en los datos), sino por que no incorpora la demanda de nuevos fondos garantizados generados ya con los strips funcionando.

La estructura de los vencimientos de las garantías de los fondos permite apreciar una concentración de la demanda en los vencimientos que van desde el 2000 hasta el 2004, con dos puntos críticos claros en los años 2000 y 2002, donde la demanda potencial supera claramente la oferta máxima potencial en una cuantía elevada. Esta estructura permite explicar el encarecimiento posterior de los cupones segregados en los estos plazos.

La ausencia de presión compradora en estos primeros meses de negociación en los tramos largos se puede explicar tanto por la no entrada de los demandantes estables potenciales en estos plazos (seguros y fondos de pensiones), que se animarán algo más

⁵ Véase Izaguirre (1997).

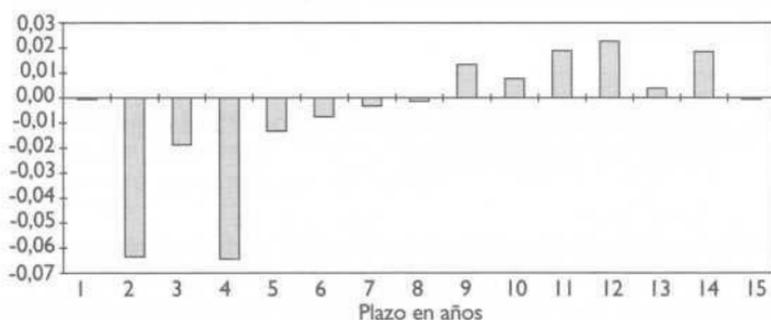
TABLA 7
Demanda de strips en la cobertura de fondos de inversión garantizados existentes

Vencimiento	Demanda potencial total	Demanda potencial límite 30 %	Oferta potencial (enero 1998)		Porcentaje total	Porcentaje límite 30 %
			CS	PS		
	(1)	(2)	(3)	(4)	(1)/[(3)+(4)]	(2)/[(3)+(4)]
31/01/99	319,95	178,78	294,53		108,63	60,70
31/01/00	706,31	345,79	294,53		239,81	117,40
31/01/01	531,58	445,43	294,53	1436,18	30,71	25,74
31/01/02	410,74	224,74	222,72		184,42	100,91
31/01/03	184,65	171,71	222,72	1146,46	13,49	12,54
31/01/04	73,30	27,04	162,53		45,10	16,63
31/01/05	44,07	21,84	162,53		27,11	13,44
31/01/06	39,79	22,68	162,53		24,48	13,95
31/01/07	14,25	10,46	162,53		8,77	6,44
31/01/08	10,61	6,91	162,53	1482,44	0,64	0,42

Unidad: mm. pesetas.

Límite 30 %: limitación CNMV para invertir más de un 30 % en un sólo activo.

FIGURA 10
Diferenciales de tipos de interés entre la curva de Strips de Cupón y la curva cupón cero estimada con Nelson y Siegel (media del período 8-1-98 a 8-5-98)



con la aparición de los cupones cero a 30 años, como por las escasas alternativas de trading a estos niveles (que parecían) tan reducidos de tipos de interés.

Este comportamiento conjunto puede ser explicado tanto a la luz del horizonte medio del inversor tradicional, como por la forma de la curva de tipos de interés en estos momentos. Por una parte, el inversor tradicional se caracteriza por su preferencia por horizontes de inversión generalmente a plazos medios-cortos, plazos a los

cuales han proliferado numerosos fondos de inversión de renta fija garantizados. Por otra parte, la ETTI se situaba en esos momentos en lo que se consideraba que eran niveles históricamente reducidos. La convergencia con los tipos de interés alemanes era prácticamente total en los plazos largos, y no se esperaban reducciones en los tipos de interés significativas en estos tramos. De este modo, una de las principales aplicaciones de los strips en la gestión de carteras de renta fija, como es la generación de duraciones elevadas, a fin de posicionar a las carteras para obtener plusvalías vías descensos esperados de los tipos de interés, resultaba arriesgada en contexto de tipos en el que se llevó a cabo el estudio. Este hecho es especialmente reseñable ya que por este motivo el patrón de diferenciales entre la curva de strips y la curva teórica en España en el tramo largo de la curva ha sido distinto al que se observó en Francia en 1991⁶, momento de inicio del programa de strips sobre deuda pública en aquel país. El entorno de tipos de interés elevados, acompañado de expectativas de descensos, propició entonces una elevada demanda de strips en los largos plazos, lo que determinó que los diferenciales entre la curva de strips y la curva teórica fuesen negativos desde el quince años en adelante, al contrario de lo que sucedió en el mercado español en los primeros días de negociación de los strips a 30 años. Además, los potenciales demandantes de strips en esta zona, seguros y fondos de pensiones, sólo habían comenzado tímidamente su apuesta por estos instrumentos, acercándose algo más a las referencias a 30 años, y potencialmente hacia los recién estrenados cupones y principales segregados en estos tramos.

6. Diferenciales entre los CS y los PS de igual plazo de maduración

De la fungibilidad distinta para los CS y PS, se derivarán previsiblemente efectos de diferencias de cotización de precio entre los cupones y PS de igual plazo, como ya ha ocurrido en otros mercados de strips. Precisamente, Daves y Ehrhardt (1993) han encontrado en un estudio sobre el mercado de strips estadounidense que el factor más significativo para explicar este fenómeno es el menor grado de sustituibilidad de los PS frente a los CS, ya que al determinar una escasez relativa sobre los primeros genera un encarecimiento de los strips de principal en relación a los de cupón de igual plazo de maduración. Es razonable encontrar que este efecto es más acusado en los plazos más largos, donde la diferencia entre saldos vivos de principales y cupones es mayor.

⁶ Véase Clermont-Tonnerre (1993).

Un elemento de estudio en la formación de precios en el mercado de strips es el comportamiento de los diferenciales de los tipos de interés de PS y CS de igual plazo de maduración. Dado que según la regulación no son fungibles los PS con los CS, aun cuando provengan de la misma referencia, y que el importe mínimo de negociación entre titulares y terceros es mucho mayor en los PS que para los CS, es directo advertir que los strips de cupón y principal del mismo plazo tienen distintas características de liquidez y de sustituibilidad que pueden generar la formación de tipos de interés distintos en uno y otro activo. La evidencia de otros mercados de strips, como el norteamericano, con similares características de regulación que el nuestro, ha mostrado que efectivamente no cotizan igual los cupones y PS del mismo plazo: en este mercado los PS cotizan a tipos de interés más bajos que los de CS del mismo plazo. La regularidad empírica de este comportamiento se puede encontrar también en los mercados europeos.

Cabe preguntarnos, por tanto, si nuestro mercado ha generado en el período muestral analizado similares comportamientos. En la tabla 8 recogemos los diferenciales bid y ask entre los tipos de interés de PS y CS del mismo plazo. Se observa que en los plazos a 5 y 15 años los tipos de interés de los PS se han situado por encima de forma significativa de los de los CS, mientras que a los plazos de 3 y 10 años los diferenciales son positivos. Este comportamiento se reproduce tanto con los diferenciales calculados a partir de los tipos de interés bid como ask.

TABLA 8
Tipos de interés de Strips Principal-Cupón a idénticos
plazos de maduración. (Período 8-1-98 / 8-5-98)

	Diferencial tipos bid				Diferencial tipos ask			
	Plazos				Plazos			
	3	5	10	15	3	5	10	15
	*	*	*	*	*	*	*	*
media	-0,005	0,019	-0,004	0,012	-0,005	0,019	-0,004	0,018
desv. típica .	0,008	0,024	0,006	0,015	0,008	0,024	0,006	0,025
	Diferenciales positivos				Diferenciales positivos			
	*	*	*	*	*	*	*	*
%	19 %	70 %	14 %	91 %	19 %	70 %	14 %	91 %
media	0,009	0,029	0,007	0,014	0,009	0,029	0,007	0,021
desv. típica .	0,005	0,022	0,004	0,014	0,005	0,022	0,004	0,024
	Diferenciales negativos				Diferenciales negativos			
	*	*	*	*	*	*	*	*
%	71 %	19 %	86 %	6 %	73 %	19 %	86 %	6 %
media desv .	-0,009	-0,007	-0,006	-0,011	-0,009	-0,007	-0,006	-0,011
típica	0,004	0,003	0,004	0,008	0,004	0,003	0,004	0,008

* Diferencial significativo al nivel de confianza del 95 %.

Asimismo destaca que la media y desviación típica del diferencial de tipos entre PS y CS de igual maduración, en prácticamente todos los plazos, son idénticas para los tipos bid y ask, lo que muestra que el spread bid-ask con el que se están cotizando los CS es el mismo con el que se cotizan los PS (en línea con los requerimientos que impone el Tesoro). En este sentido, si el diferencial bid-ask con el que se cotiza un instrumento es un indicador de liquidez, y dado que ésta es distinta para los cupones y principales segregadas (básicamente por el tamaño del paquete mínimo de negociación de uno y otro y por su distinta sustituibilidad), parece que la formación de precios en el mercado español de strips no está cotizando este diferente grado de liquidez de CS y PS.

Por otra parte, la escasez relativa de los PS en relación a los CS, dado su menor sustituibilidad, no parece estar cotizándose ya que, contrariamente a lo que cabría esperar, y a lo que ha sucedido en otros mercados, en algunos casos, los PS están cotizando más baratos que los CS.

Una de las razones que podría explicar esta evolución es el hecho de que los fondos garantizados deben invertir en más de una referencia para cumplir con la regulación impuesta por la CNMV, con lo que los CS son especialmente atractivos por el carácter de tener las mismas propiedades financieras que los PS pero ser anotaciones distintas.

7. Estudio de las posibilidades de arbitraje

Dado que el proceso de segregación lleva también asociada la autorización para realizar el proceso inverso —reconstitución del bono original con cupones a partir del PS y el CS— debe verificarse (teniendo en cuenta la existencia de costes de segregación y reconstitución) la equivalencia financiera entre el valor de mercado del bono con cupones (o bono segregable) y la cartera de bonos cupón cero equivalente, a fin de valorar las oportunidades de arbitraje.

Así, por ejemplo, si el valor de mercado de un bono segregable es más bajo que el valor de mercado de la cartera de cupones y PS que permitirían reconstruir el bono (cartera equivalente de strips), se genera un incentivo a segregar el bono y vender por separado los cupones y principal del mismo. De este modo, al disminuir la oferta del bono segregable se eleva su precio, ocurriendo lo contrario con el valor de la cartera equivalente de cupones y principales, que caería de precio al incrementarse su oferta. Dicho proceso se produciría hasta el momento en que se logre la equivalencia fi-

nanciera entre el bono segregable y la cartera correspondiente de strips. Procesos similares en sentido contrario se desarrollarían en caso de que el bono segregable tuviera un valor de mercado superior al de la cartera equivalente de strips. En dicho caso se favorecería la reconstitución del bono original, mediante la compra de la cartera de strips equivalente y su venta en forma del bono original.

El análisis anterior efectuado sobre el diferencial entre la curva de strips y la curva de tipos cupón cero teórica estimada a partir del precio de los bonos, en el que observábamos que los diferenciales alternaban sus signos a lo largo de los distintos tramos de la curva es un primer indicio de que no se están produciendo posibilidades de arbitraje en operaciones entre los principales y CS y las referencias de deuda segregables. La prueba definitiva, sin embargo, para detectar si en algún momento se han producido posibilidades de arbitraje es reproducir todas las posibles operaciones para arbitrar. Son dos las operaciones de arbitraje que cabe realizar entre los bonos subyacentes segregables y las carteras de cupones y PS.

En primer lugar se encuentra la operación consistente en la compra de una referencia segregable (a un precio ask), su segregación y la venta simultánea (a un precio bid) de los cupones y principal segregados:

Operación 1 = Valor de venta de la Cartera de strips_{BID} – Valor de compra de la referencia segregable_{ASK}

La segunda operación consiste en la compra del principal y los CS que permiten reconstituir las referencias segregables para la venta posterior del bono subyacente segregable.

Operación 2 = Valor de venta de referencias segregables_{BID} – Valor de compra de la cartera de strips_{ASK}

Hemos podido realizar estas dos operaciones diariamente desde el 28-1-98, fecha desde la que disponíamos de precios bid y ask de las cuatros referencias segregables (B-5.00, B-5.25, O-6.00 y O-6.15, de plazos respectivos a 3, 5, 10 y 15 años), así como de cotizaciones bid y ask de los cupones y PS.

En el período en el que hemos analizado las operaciones señaladas, hasta mayo de 1998, para cada una de las cuatro referencias segregables se han observado posibilidades puntuales que pueden responder bien a cotizaciones «extrañas» de mercado o a oportunidades reales, que no obstante desaparecen en días posteriores de forma casi definitiva.

FIGURA 11
Operación 1: Compra de la referencia segregable
y Venta de la Cartera de Strips

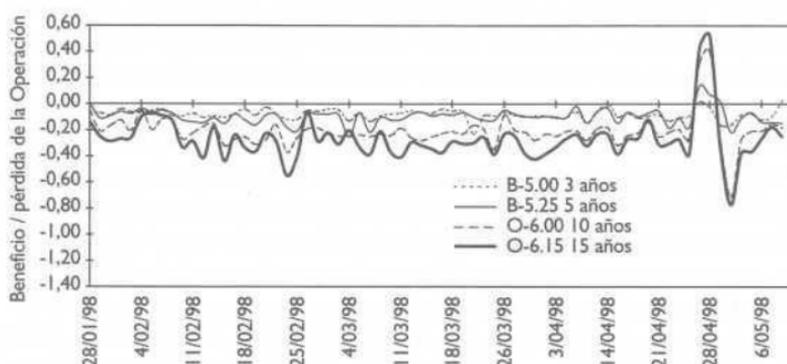
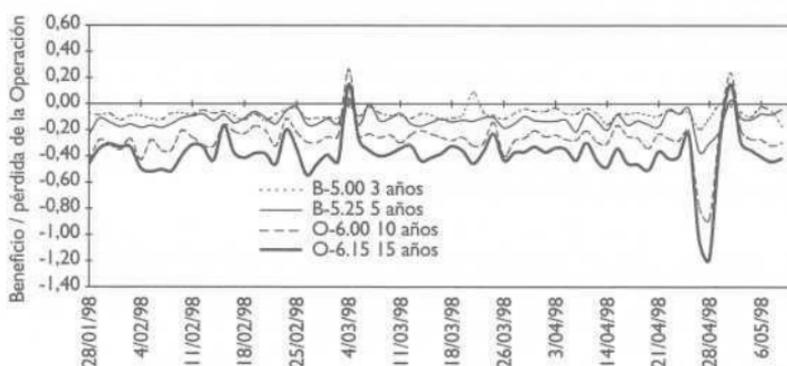


FIGURA 12
Operación 2: Compra de la Cartera de Strips
y Venta de la referencia segregable



8. Conclusión

En este trabajo se ha analizado la formación de precios en el mercado español de strips sobre deuda pública en el período inicial de su desarrollo, en el primer semestre de 1998. En primer lugar se ha generado una referencia teórica para su valoración mediante la estimación de la Estructura temporal de tipos de interés (ETTI) a partir de los precios cotizados de los activos con riesgo Tesoro que cotizan en el mercado español. Dentro de la alternativa de modelos disponibles, se han analizado tres de uso común en el mercado: la estimación a través de la metodología de McCulloch,

Nelson & Siegel y Svensson. Con la estimación de la ETTI a través de la metodología de Nelson y Siegel se ha realizado una comparación de esta curva teórica con la curva real de strips. Esta comparación muestra la existencia de diferenciales alternativamente positivos y negativos en distintos tramos de la curva. Dicho patrón de comportamiento de los diferenciales es signo en primer lugar de una formación adecuada del precio de los strips, en el sentido de que al no estar los strips consistentemente caros o baratos en todos los plazos no parecen anticiparse posibilidades de arbitraje. Dicha evidencia es comprobada reproduciendo todas las operaciones de arbitraje posibles desde el comienzo del mercado de strips, donde apenas se han observado mínimas posibilidades de arbitraje en algunos momentos determinados. En segundo lugar, el signo de estos diferenciales encuentra explicación a la luz de los tramos de la curva en los que se concentra la mayor demanda de strips —los tramos cortos de la curva, por la acción de los fondos garantizados—, así como de la forma actual de la ETTI. El único aspecto de la formación del precio de los strips que resulta menos lógico es la valoración de los PS en relación a los CS del mismo plazo de maduración. A diferencia de lo que cabía esperar, teniendo en cuenta la menor sustituibilidad de los PS y su consiguiente escasez, estos últimos se están cotizando más baratos que los strips de cupón. La regulación que afecta a los fondos garantizados podría estar detrás de esta diferencia. Salvando este aspecto, podemos concluir que la valoración que efectúa el mercado de los strips de deuda pública está siendo correcta en términos generales.

(*) Agradecemos la colaboración de Alfonso Novales y de Alejandro Izaguirre. Sin los comentarios continuos del primero y la labor desarrollada por el segundo en el Departamento de Análisis de AFI, no hubiese sido posible terminar el documento. Agradecemos, asimismo, a AFI la disponibilidad de su base de datos para la elaboración de este trabajo. Los errores son de la exclusiva responsabilidad de los autores.

Apéndice: Modelos de estimación de la estructura temporal de tipos de interés

Modelo de McCulloch (1971, 1975)

El modelo McCulloch se basa en la estimación de ETTI mediante la aproximación a la función de descuento. Para ello considera que la forma exponencial de la función de descuento puede ser reproducida con un polinomio de elevado grado, que a su vez se aproxima por la unión de splines polinomiales, cuadráticos o cúbicos. Cualquier método que estime la ETTI a través de una especificación funcional de la función de descuento, como hace McCulloch, debe procurar que la función empleada cumpla ciertas propiedades. Debe observarse que la función empleada de aproximación a $d(t)$ sea derivable hasta el orden dos, ya que la primera derivada del logaritmo de la función determina los tipos de interés forward instantáneos, y la segunda derivada los cambios en dichos tipos implícitos. Además, es conveniente que la aproximación empleada sea al menos de orden 3, a fin de que la segunda derivada de la función de descuento respecto al tiempo no sea discontinua. Con ello se consigue una forma suave para la senda de los tipos de interés forward implícitos, aunque no necesariamente su convergencia en el largo plazo a un nivel asintótico, propiedad también deseable.

Cada uno de los splines, que se aconseja sea según lo expuesto al menos cúbico, se define, a su vez, como combinación lineal de k polinomios. Además se impone la existencia de un término independiente que ha de adoptar el valor de la unidad con el fin de asegurar que $d(0)=1$, así como la continuidad de la función.

$$d(t_i) = a_0 + \sum_{j=1}^k a_j \cdot f_j(t_i) \quad \text{donde } a_0 = 1 \text{ y } f_j(0) = 0 \quad \forall j$$

A partir de la ecuación de formación del precio de los activos de renta fija:

$$P_i = \sum_{t=1}^n C_t \cdot d(t_i) + \varepsilon_i = \sum_{t=1}^n C_t \cdot e^{-\int_0^{t_i} r(t) dt} + \varepsilon_i = \sum_{t=1}^n C_t \cdot e^{-R(0,t_i) \cdot t_i} + \varepsilon_i$$

sustituyendo la expresión anterior se obtiene:

$$P_i = \sum_{t=1}^n C_{i0} \left[1 + \sum_{j=1}^k a_j f_j(t_{it}) \right] + \varepsilon_i = \sum_{t=1}^n C_{i0} + \sum_{j=1}^k \sum_{t=1}^n C_{ijt} a_j f_j(t_{it}) + \varepsilon_i \quad \forall i = 1, \dots, L$$

donde i designa cada activo empleado en la estimación.

Reorganizando resulta:

$$P_l - \sum_{i=1}^n C_{il} = \sum_{j=1}^k a_j \left[\sum_{i=1}^n C_{il} f_j(\tau_{il}) \right] + \varepsilon_l \quad \forall l=1, \dots, L$$

de donde se obtiene la expresión utilizada para estimar los parámetros del modelo a_j a partir de los precios de los bonos:

$$Y_l = \sum_{j=1}^k a_j X_{jl} + \varepsilon_l \quad \forall l=1, \dots, L$$

donde las variables Y_l y X_{jl} han de ser calculadas para cada valor negociado empleado en la estimación.

Si la estimación es efectuada postulando que la varianza de los errores residuales en precio sea la misma para todos los bonos, buscando un ajuste en precios igualmente bueno en todas las referencias, con independencia de su plazo, la estimación se efectúa por mínimos cuadrados ordinarios, que es la alternativa que hemos adoptado en la aplicación de este modelo a la estimación de la ETTI en el mercado de deuda pública español. Alternativamente, si como proponen otros modelos, como el de Vasicek (1982), se desea postular un comportamiento homocedástico de los errores en tipos de interés, la estimación se realiza por el método de mínimos cuadrados generalizados.

Modelos basados en una especificación funcional de los tipos de interés forward instantáneos (Nelson & Siegel, 1987 y Svensson, 1994)

Estos modelos de estimación de la ETTI se basan en la especificación de una forma funcional que describe el comportamiento de los tipos de interés forward instantáneos.

El modelo de **Nelson y Siegel** describe el comportamiento de los tipos de interés forward instantáneos a partir de una expresión, que es la solución de una ecuación diferencial de segundo orden:

$$r(t) = \beta_0 + \beta_1 e^{-\frac{t}{\tau}} + \beta_2 \frac{t}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

que permite acomodar las distintas formas que en la realidad puede presentar la ETTI, ya sea plana, tenga pendiente positiva o nega-

tiva, y más o menos curvatura, en función de tan sólo cuatro parámetros: β_0 , β_1 , β_2 , y τ .

Esta expresión es la composición de tres funciones:

$$f_1 = 1, \quad f_2 = e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad f_3 = (t/\tau) e^{-\frac{t}{\tau}}$$

cada una de las cuales recoge un tipo de comportamiento de la senda de tipos de interés forward instantáneos.

La función f_1 es el componente de largo plazo, que rige el nivel hacia el que tienden a converger los tipos forward instantáneos. Dicho nivel viene medido por el coeficiente β_0 , que es el límite de la función $r(t)$ cuando t tiende a infinito, de forma que cambios en dicho parámetro inciden en desplazamientos paralelos de la estructura de tipos forward instantáneos.

La función f_2 , monótona decreciente, es el componente de corto plazo, que determina si existe un componente uniforme creciente en la ETTI (lo que ocurre cuando $\beta_1 < 0$), o decreciente (cuando $\beta_1 > 0$). El valor del parámetro τ influye en el ritmo de decrecimiento de la función f_2 de forma que, cuanto más elevado es τ , menor es el decrecimiento de la función f_2 y menor el ritmo de convergencia de los tipos forward a su nivel asintótico.

Por último, la función f_3 es el componente de medio plazo, responsable de la curvatura de la estructura temporal de los tipos de interés, y cuya contribución al perfil de los tipos forward viene medida por el parámetro β_2 . Así, si el parámetro β_2 es positivo, la estructura de tipos forward tiene un máximo interior y por lo tanto, ésta adopta un perfil cóncavo y si, por el contrario, el parámetro β_2 es negativo, la estructura de tipos forward presenta un mínimo, y tiene un perfil convexo.

En el contado, ($t=0$) el componente f_3 se anula y los otros componentes adoptan el valor de la unidad. Por ello el tipo instantáneo en el contado es: $r(0) = \beta_0 + \beta_1$.

Este modelo presenta la limitación de que sólo permite identificar un máximo ó un mínimo interior en la ETTI. Por ello, el modelo de **Svensson** introduce una modificación a la especificación de la estructura de tipos de interés instantáneos que permite una mayor flexibilidad:

$$r(t) = \beta_0 + \beta_1 e^{-\frac{t}{\tau_1}} + \beta_2 \frac{t}{\tau_1} \cdot e^{-\frac{t}{\tau_1}} + \beta_3 \frac{t}{\tau_2} e^{-\frac{t}{\tau_2}}$$

De nuevo, podríamos descomponer la senda de tipos forward en distintos componentes: uno de ello constante f_1 , regido por el parámetro β_0 , uno segundo monótono decreciente f_2 , regido por el parámetro β_1 , y dos componentes de curvatura asociados a los parámetros β_2 y β_3 , que son respectivamente f_3 y f_4 , cuyo perfil se diferencia únicamente por los parámetros τ_1 y τ_2 .

Los parámetros de ambos modelos son estimados a partir de los precios de los bonos cotizados. Empleando L bonos en la estimación, y aplicando el criterio de minimización de los errores cuadráticos en precio, la función que debemos minimizar es:

$$F = \sum_{i=1}^L (P_{M_i} - P_{T_i})^2$$

que depende de los parámetros que estamos estimando.

Esta es una estimación no lineal, que debe efectuarse por medio de algoritmos de búsqueda, frente a la estimación lineal, más sencilla, del modelo de McCulloch.

Referencias

- Clermont-Tonnerre (1993):** «Bond Stripping: The French Experience», *The Journal of International Securities Markets*, IFR, vol. 7, otoño.
- Daves, P. R. y Ehrhardt, M. C. (1993):** «Liquidity, reconstruction and the value of U.S. Treasury strips», *The Journal of Finance*, vol. XLVIII, N. 1, marzo, pp. 315-329.
- Chambers D. R.; Carleton, W. T. y Waldman, D. R. (1984):** «A new approach to estimation of the term structure of interest rates», *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, vol. 19, n.º 3, septiembre, pp. 233-253.
- Ezquiaga, I.; Jara, J. R. y Gómez, I. (1994):** «Una metodología para la estimación de la curva de tipos de interés cupón cero y su aplicación al mercado español», *Moneda y Crédito*, n.º 199, pp. 157-197.
- Gómez, I. (1998):** «Estructura temporal de tipos de interés en el mercado español de deuda del Estado: caracterización, dinámica e implicaciones en nuevas herramientas para la gestión de carte-

ras de renta fija», *Tesis Doctoral*, Universidad de Huelva, septiembre.

Izaguirre, Alejandro (1997): «Estimación de la demanda de strips generada por las necesidades de cobertura de fondos garantizados», *AFI*, documento interno.

Ferrer, R.; Navarro, E. y Nave, J. M., (1995): «La volatilidad de las variaciones de los tipos de interés en la estimación de su estructura temporal», *Revista Europea de Dirección y Economía de la Empresa*, vol. 4, n.º 2, pp. 53-64.

Fong, H. Gifford y Vasicek, O. A. (1982): «Term structure modeling using exponential splines», *The Journal of Finance*, vol. XXXVII, n.º 2, pp. 339-349, mayo.

McCulloch, J. H. (1971): «Measuring the term structure of interest rates», *The Journal of Business*, vol. 44, pp. 19-31.

McCulloch, J. H. (1975): «The tax-adjusted yield curve», *The Journal of Finance*, vol. XXX, n.º 3, pp. 811-830, junio.

Nelson, C. R. y Siegel, A. F. (1987): «Parsimonious modelling of yield curves», *Journal of Business*, vol. 60, n.º 4, pp. 473-489, octubre.

Núñez Ramos, Soledad (1995): «Estimación de la estructura de tipos de interés en España: elección entre métodos alternativos», *Documento de Trabajo del Banco de España*, n.º 95-22.

Urrutia, A. J.; Carranceja, A. y Fernández, C. (1997): «Comparación de varios modelos matemáticos de la Estructura Temporal de los Tipos de Interés para el Mercado Español de Deuda del Estado», presentado en el Congreso *Matemática de las Operaciones Financieras*, Universidad de Barcelona, noviembre 1997.

Svensson, L. E. O. (1994): *Estimating and interpreting forward interest rates: Sweden 1992-1994*, International Monetary Fund Working Paper.

**TRANSMISIÓN DE INFORMACIÓN
Y VOLATILIDAD ENTRE EL
MERCADO DE FUTUROS
SOBRE EL ÍNDICE IBEX 35
Y EL MERCADO AL CONTADO**

Roberto Blanco

Servicio de Estudios del Banco de España

Resumen

En este trabajo se estudian las relaciones dinámicas entre el mercado de futuros sobre el índice Ibex 35 y el mercado al contado. En concreto, las variables que se estudian son: la media y varianza de los precios y el volumen de negociación. La evidencia que se documenta es favorable a la existencia de relaciones causales bidireccionales. La metodología utilizada para especificar el modelo de la media de los precios se diferencia en dos elementos de la mayoría de los trabajos de la literatura; éstos son: la utilización del punto medio de la horquilla de precios en lugar del precio de transacción y la introducción del «cost of carry» en la ecuación de cointegración entre los precios de los dos mercados. Ambas innovaciones tienen efectos muy importantes sobre los resultados. En particular, se encuentra una mayor importancia de los flujos de transmisión de información desde el contado hacia el futuro.

1. Introducción

Los mercados internacionales de futuros sobre índices bursátiles han experimentado una gran expansión desde su aparición en la década de los ochenta y, en muchos casos, su volumen de negociación supera al que se realiza a través de los de contado. La importancia que han adquirido dichos mercados lleva a preguntarse sobre la función que estos desempeñan y sobre su interacción dinámica con los mercados bursátiles.

En ausencia de costes de transacción, la teoría nos dice que se debe verificar una relación de no arbitraje en la que el precio del futuro se iguala con el del contado, una vez que se corrige por los costes de financiación de esta posición (el denominado «cost of carry»). En este contexto, los precios en ambos mercados deberían reaccionar simultáneamente a la llegada de nueva información, de forma que ninguno de los dos ejercerá una función de liderazgo en la formación de precios.

En cambio, con costes de transacción los precios en ambos mercados pueden fluctuar independientemente dentro de un rango sin que existan oportunidades de arbitraje. En estas condiciones, es posible que uno de los dos mercados incorpore la información en los precios más rápidamente que el otro. En efecto, si los agentes prefieren operar en uno de los dos mercados, será en dicho mercado donde los precios se muevan primero cuando aparezca alguna noticia. En cambio, los precios del otro mercado podrían permanecer inalterados mientras los costes de transacción impidan el arbitraje, aunque terminarán moviéndose cuando la variación de los precios del primer mercado sea lo suficientemente elevada como para contrarrestar aquellos costes.

A menudo se argumenta que una de las funciones del mercado de futuros es, precisamente, la de mejorar el proceso por el cual la información se incorpora a los precios («price discovery»). Esta tesis se apoya en el hecho de que en el mercado de futuros los costes de transacción son menores debido, entre otros factores, a la concentración de la negociación de una cesta de valores en un solo activo y a que se trata de un instrumento que incorpora un elevado grado de apalancamiento. Más formalmente, Subrahmanyam (1991) mostró, en un modelo teórico en el contexto de Kyle (1985) y de Admati y Pfleiderer (1988), que los agentes que negocian por motivos de liquidez minimizan sus costes de selección adversa si operan en el mercado de futuros. La preferencia de los agentes por este mercado llevaría a que fuera éste el que liderase la formación de precios.

Sin embargo, también se han propuesto otros argumentos teóricos que motivan un posible liderazgo del mercado al contado en la formación de precios. Así, por ejemplo, Subrahmanyam (1991) y Chan (1992) advirtieron que los agentes que negocian por motivos de información específica sobre algún valor pueden preferir operar en el mercado al contado. En efecto, las estrategias en el mercado de futuros se caracterizan por la menor flexibilidad, en el sentido de que los participantes están restringidos a tomar posiciones del mismo signo (comprador o vendedor) en todos los valores que componen el índice y con unas ponderaciones fijas.

En este contexto, en la segunda sección del trabajo, se muestra que, introduciendo costes de transacción, el mercado al contado puede ser preferido por los agentes informados para explotar la llegada de información específica aunque los costes de transacción en dicho mercado sean superiores a los que prevalecen en el mercado de futuros. En concreto, aproximando los costes de transacción por la horquilla media de precios comprador-vendedor, se encuentra que para todos los valores que componen el índice Ibex 35 existe un rango de variaciones esperadas de precios para los que siempre resultará preferible operar en el mercado al contado.

Así pues, dado que la teoría no proporciona una respuesta exenta de ambigüedad sobre la dirección en la que se transmite la información entre los dos mercados, la relevancia de dichos fenómenos sólo se puede estudiar empíricamente.

El estudio empírico de las relaciones dinámicas de la media de los precios entre el mercado de futuros y el de contado ha recibido, durante la última década, una gran atención en la literatura. La conclusión general de estos trabajos es que la información se transmite principalmente en la dirección futuro-contado. Este resultado minimiza el papel del mercado bursátil en el proceso de formación de precios y enfatiza la función del mercado de futuros como transmisor de información. Sin embargo, la metodología utilizada en los trabajos empíricos presenta algunos puntos débiles que plantean dudas sobre la validez de los resultados. La importancia de estos resultados para el conocimiento del proceso de formación de precios y de la transmisión de información en los mercados financieros justifica que la investigación en este tema se centre en la búsqueda de metodologías que intenten corregir las deficiencias detectadas.

El objetivo de este trabajo es el análisis empírico de las relaciones dinámicas entre el mercado de futuros sobre el índice Ibex 35 y el mercado bursátil español. Las variables objeto de estudio son: la media y la varianza de los precios y el volumen de negociación. La aportación del trabajo reside, en primer lugar, en la introducción simultánea de varias innovaciones en cuanto a la definición de las variables en el modelo de la media de los precios. Aunque algunas de estas nuevas definiciones fueron propuestas anteriormente, la novedad de este trabajo es que se consideran todas simultáneamente, y se comparan con los resultados que se derivan de la metodología tradicional. Las principales innovaciones son la utilización del punto medio de las horquilla de precios comprador-vendedor en lugar de los precios de transacción, y la introducción del «cost of carry» en la especificación del modelo.

Otra de las aportaciones del trabajo es la extensión del análisis a otras variables (volúmenes y volatilidades), mucho menos estudiadas que la media de los rendimientos en la literatura sobre las relaciones temporales entre el mercado de futuros y el mercado al contado. La extensión del análisis a estas dos variables creemos que contribuye a completar el conocimiento de los mecanismos de transmisión de información entre los mercados, ya que la llegada de nueva información también se puede reflejar en dichas variables.

El resto del trabajo está estructurado de la siguiente forma. En la segunda sección se estudia bajo qué condiciones resulta preferible operar en cada uno de los mercados estudiados (futuro o contado), en la tercera se describe la base de datos utilizada y se definen las variables objeto de análisis; posteriormente, en la cuarta sección, se presenta la metodología y se ofrecen los resultados empíricos y, finalmente, en la quinta sección se sintetizan las principales conclusiones.

2. Preferencias de operar en los mercados en presencia de costes de transacción

En esta sección se discuten algunos de los factores que pueden incidir sobre la elección del mercado (contado o futuro) en el que prefieren explotar su ventaja los agentes informados. Para ello, se parte de los siguientes supuestos:

- i) Los agentes reciben una información que afecta al valor esperado de un activo o de un grupo de los activos que forman parte del índice que sirve de subyacente para un contrato de futuros.
- ii) Los agentes hacen frente a unos costes de transacción cada vez que realizan una operación de compra o de venta, los cuales dependen del valor con el que operan y del tamaño de la operación. Concretamente, se supone que dichos costes son, en términos relativos, crecientes con el tamaño de la operación, y que están inferiormente acotados en un nivel no nulo ¹.
- iii) La nueva información no modifica el valor esperado del «cost of carry». Este supuesto garantiza que la variación esperada del futuro coincide con la variación esperada del índice.

¹ En Blanco (1999) se muestra que un componente muy importante de los costes de transacción son los de inmediatez, los cuales se caracterizan por ser crecientes en términos relativos y por estar inferiormente acotados en un nivel no nulo.

La elección del mercado en el que operan los agentes informados dependerá de los beneficios que obtengan por explotar su ventaja informacional en cada uno de ellos. Evidentemente, si los agentes no obtienen beneficios de esta actividad, éstos no explotarán la información en ninguno de los dos mercados. En efecto, nótese que la introducción de costes de transacción solamente garantizará unos beneficios positivos por la realización de este tipo de operaciones si los beneficios brutos de la estrategia derivados de las variaciones esperadas en los precios son superiores a los costes de la operación. Si los beneficios solamente son positivos en uno de los dos mercados, es evidente que los agentes informados elegirán este mercado a la hora de explotar la información. En cambio, si los beneficios son positivos en ambos mercados, resulta, en principio, incierto cuál será el mercado elegido.

A continuación se estudia bajo qué condiciones (suficientes y necesarias) será rentable explotar la información en cada uno de los dos mercados, distinguiendo según que la información sea general o específica. Por información general se entiende que se conoce el impacto sobre el valor del índice, pero no sobre su descomposición por valores. En cambio, cuando la información afecta solamente a uno de los valores se dirá que ésta es específica.

A) Caso 1: Información general

Puesto que no se conoce el impacto de la información sobre cada uno de los valores del índice, la explotación de la información en el mercado al contado requiere la realización de operaciones (compras o ventas) en cada uno de los valores que componen el índice por un importe relativo igual a las ponderaciones del índice, ya que, en otro caso, el beneficio de la estrategia sería incierto. Las operaciones tanto en el contado como con el futuro serán de compra en el caso de que la noticia afecte positivamente al índice, y de venta en el caso contrario.

Dados los supuestos de los que se parte, el beneficio bruto por explotar la información en cada mercado será el mismo en los dos mercados e igual a la variación esperada del índice. Por tanto, el mercado en el que resultará más rentable explotar la información será aquel que presente unos menores costes de transacción.

B) Caso 2: Información específica

Si solamente se modifica el valor esperado de uno de los activos (el j , por ejemplo) en un porcentaje x , la explotación de dicha información en el contado solamente requiere operar con dicho activo.

En estas condiciones, la variación esperada del futuro (y del índice) será el producto de x por la ponderación del valor j en el índice. En consecuencia, el beneficio bruto de la operación en el mercado de futuros será, en este caso, inferior al que se obtendrá en el mercado al contado, lo que implica que para que solamente sea rentable operar en el mercado al contado no es necesario que los costes relativos mínimos asociados a la operativa con el valor j sean inferiores a los costes relativos por operar en el mercado de futuros. Es decir, que si llega al mercado información específica puede ser más rentable explotar ésta en el mercado al contado aunque los costes de transacción en dicho mercado sean superiores.

La relevancia empírica para los mercados españoles de las condiciones anteriores se puede contrastar con los datos disponibles en este trabajo ² si se aproximan los costes relativos mínimos de cada uno de los activos por las horquillas comprador-vendedor ³. Los resultados de este análisis aparecen en el cuadro 1, donde se detalla para qué variaciones esperadas de precios es rentable explotar la llegada de información en cada uno de los mercados, distinguiendo entre información general e información específica sobre cada uno de los valores. Los cálculos se basan en información intradía correspondiente al período 1/07/95 al 27/10/95. Por su parte, las ponderaciones de los 35 valores se han tomado de la situación existente al final de la sesión del 31/08/95.

De los resultados del cuadro 1, se deduce que la información general nunca es óptimo explotarla solamente en el mercado al contado. Además, para las variaciones porcentuales esperadas comprendidas en valor absoluto entre el 0,05 % el 0,26 % este tipo de información sólo será rentable explotarla en el mercado de futuros. Para variaciones superiores al 0,26 % se obtendrá un beneficio positivo en ambos mercados, si bien en la medida en que los costes de transacción del mercado de futuros se mantengan por debajo de los del contado, lo que ocurre con toda probabilidad, será más rentable explotar la información en el mercado de futuros. Estos resultados sugieren que este último mercado es el que primero reacciona a la llegada de información general.

Por el contrario, para todos los valores que componen el índice Ibex 35 existe un margen de variación esperada de precios en el

² En la tercera sección se detalla el contenido de la base de datos disponible.

³ Según los resultados encontrados en Blanco (1999), los costes de inmediatez mínimos son iguales a la mitad de la horquilla. No obstante, dado que la estrategia de los agentes informados requiere de la realización de dos operaciones (compra y venta), los costes de inmediatez relevantes para este ejercicio son iguales a la horquilla.

CUADRO I

Mercado donde resulta rentable explotar la llegada de información, en función del tipo de información y del valor absoluto de la variación porcentual esperada de los precios ($|x|$)

Tipo de información	Ningún mercado	Sólo contado	Sólo futuros	Ambos mercados
Información general:.....	$ x < 0,05$	—	$0,05 < x < 0,26$	$ x > 0,26$
Inf. específica sobre:	$ x < 0,17$	$0,17 < x < 0,39$	—	$ x > 0,39$
Endesa.....	$ x < 0,30$	$0,30 < x < 0,42$	—	$ x > 0,42$
Telefónica.....	$ x < 0,14$	$0,14 < x < 0,56$	—	$ x > 0,56$
Repsol.....	$ x < 0,17$	$0,17 < x < 0,75$	—	$ x > 0,75$
Iberdrola.....	$ x < 0,16$	$0,16 < x < 0,77$	—	$ x > 0,77$
BBV.....	$ x < 0,22$	$0,22 < x < 0,81$	—	$ x > 0,81$
B. Santander.....	$ x < 0,15$	$0,15 < x < 1,10$	—	$ x > 1,10$
Argentaria.....	$ x < 0,39$	$0,39 < x < 1,15$	—	$ x > 1,15$
Gas Natural.....	$ x < 0,15$	$0,15 < x < 1,19$	—	$ x > 1,19$
B. Popular.....	$ x < 0,18$	$0,18 < x < 1,32$	—	$ x > 1,32$
Banesto.....	$ x < 0,49$	$0,49 < x < 1,42$	—	$ x > 1,42$
Pryca.....	$ x < 0,33$	$0,33 < x < 1,55$	—	$ x > 1,55$
BCH.....	$ x < 0,53$	$0,53 < x < 2,23$	—	$ x > 2,23$
Continente.....	$ x < 0,46$	$0,46 < x < 2,51$	—	$ x > 2,51$
Acesa.....	$ x < 0,26$	$0,26 < x < 2,81$	—	$ x > 2,81$
Sevillana.....	$ x < 0,23$	$0,23 < x < 3,55$	—	$ x > 3,55$
Acerinox.....	$ x < 0,48$	$0,48 < x < 3,68$	—	$ x > 3,68$
Corporación Mapfre.....	$ x < 0,62$	$0,62 < x < 3,91$	—	$ x > 3,91$
Tabacalera.....	$ x < 0,25$	$0,25 < x < 3,91$	—	$ x > 3,91$
U. E. Fenosa.....	$ x < 0,30$	$0,30 < x < 3,94$	—	$ x > 3,94$
Bankinter.....	$ x < 0,22$	$0,22 < x < 4,00$	—	$ x > 4,00$
FECSA.....	$ x < 0,42$	$0,42 < x < 4,27$	—	$ x > 4,27$
FCC.....	$ x < 0,33$	$0,33 < x < 4,50$	—	$ x > 4,50$
Hidroel. del Cantábrico.....	$ x < 0,54$	$0,54 < x < 4,59$	—	$ x > 4,59$
Aguas de Barcelona.....	$ x < 0,35$	$0,35 < x < 5,56$	—	$ x > 5,56$
Dragados y Construcciones.....	$ x < 0,41$	$0,41 < x < 5,95$	—	$ x > 5,95$
Corp. Financiera Alba.....	$ x < 0,44$	$0,44 < x < 6,85$	—	$ x > 6,85$
Aumar.....	$ x < 0,38$	$0,38 < x < 6,94$	—	$ x > 6,94$
Vallehermoso.....	$ x < 0,60$	$0,60 < x < 7,46$	—	$ x > 7,46$
Metrovacesa.....	$ x < 0,45$	$0,45 < x < 9,09$	—	$ x > 9,09$
Uralita.....	$ x < 0,40$	$0,40 < x < 9,80$	—	$ x > 9,80$
Emp. Nacional de Celulosa.....	$ x < 0,58$	$0,58 < x < 12,50$	—	$ x > 12,50$
Asturiana del Zinc.....	$ x < 0,51$	$0,51 < x < 15,63$	—	$ x > 15,63$
Viscofán.....	$ x < 0,53$	$0,53 < x < 16,13$	—	$ x > 16,13$
Cubiertas y MZOV.....	$ x < 0,47$	$0,47 < x < 31,25$	—	$ x > 31,25$
Amper.....				

Este cuadro se ha elaborado teniendo en cuenta las horquillas medias de los valores integrantes del índice Ibx 35 y del futuro del período 1/07/95-27/10/95, y la capitalización de las sociedades corresponde al 31/08/95. Se denomina información general cuando se conoce su impacto sobre el índice Ibx 35 pero no se sabe cómo afecta a los valores individuales, mientras que ésta es específica si afecta solamente a un valor individual.

que la información específica sólo resulta rentable si se explota en el mercado al contado. Este resultado sugiere que, al menos en dichas circunstancias, este mercado será el primero en reaccionar a la llegada de información específica. Es interesante observar que la amplitud del margen en el que solamente es rentable explotar la información en el contado tiende a crecer de forma inversa con la ponderación de los valores en el índice.

Tomados en su conjunto, estos resultados muestran que la transmisión de información entre el mercado de futuros y el de contado se

puede realizar en cualquiera de las dos direcciones. Por tanto, tiene interés estudiar este fenómeno desde un punto de vista empírico.

3. Información disponible y variables generadas

La base de datos que se dispone en este trabajo fue facilitada por la CNMV y está compuesta por información intradía, agrupada en intervalos de cinco minutos entre las 11:00 hs. y las 17:00 hs.⁴ para el período comprendido entre el 11/01/95 y el 27/10/95, que comprende un total de 200 sesiones. Para todos los valores que han formado parte del índice Ibex 35 durante ese período y para el contrato de futuros de vencimiento más próximo, la información disponible es la siguiente: día, hora, mejor precio de compra, mejor precio de venta, precio de la última transacción y volumen negociado durante el intervalo. La información sobre los precios del mercado bursátil a las 11:00 hs. refleja el precio de apertura. Los volúmenes de los valores bursátiles están expresados en número de títulos e incluyen la totalidad de operaciones realizadas a través del CATS, mientras que el volumen del mercado de futuros está expresado en número de contratos e incluye tanto las operaciones cruzadas a través del sistema electrónico como las comunicadas dentro de la sesión.

A partir de la información disponible, se generaron dos series de índices: una calculada a partir de los precios de la última operación, forma de cálculo que coincide con la metodología oficial⁵, y otra a partir del punto medio de la horquilla formada por los mejores precios de compra y de venta. En ambos casos, la primera observación de cada sesión coincide con el primer intervalo en el que todos los valores que componen el índice han registrado su operación de apertura. Esto lleva a que no en todas las sesiones la primera observación corresponda a las 11:00 hs, aunque dicha circunstancia solamente se produce en el 4 % de las sesiones de la muestra.

A la hora de comparar las cotizaciones del contrato de futuros con las del índice bursátil debe tenerse en cuenta que la valoración del primero incluye un elemento que no está presente en el segundo,

⁴ Éste es el horario de negociación en el que estaban abiertos simultáneamente el mercado bursátil y el mercado de futuros MEFV RV durante el período de estudio, que coincidía con el horario de funcionamiento del primer mercado, ya que el mercado de futuros abría 15 minutos antes y cerraba 15 más tarde.

⁵ Debe notarse que esta serie no coincide temporalmente con la oficial ya que esta última aparece con unos segundos de retraso debido al tiempo que media entre que se cruza una operación y aparece el mensaje en el sistema. La preocupación por contar con series de precios lo más simultáneas posible llevó a recalcular el índice.

al cual se le suele denominar «cost of carry». En ausencia de información sobre los dividendos futuros estimados por el mercado y los tipos de interés dicho coste se puede estimar a partir de la relación entre la valoración del contrato de futuros y del índice. En efecto, suponiendo que dicho coste es constante dentro de una sesión, éste se puede estimar como la diferencia media entre las cotizaciones del futuro y del contado. Una vez estimado el «cost of carry», la valoración del índice corregida de dicho elemento se obtiene sumando éste al precio del contado. Según la relación teórica de no arbitraje, la cotización del índice corregida y la del futuro no pueden alejarse significativamente la una de la otra durante mucho tiempo ya que la existencia de operaciones de arbitraje anularía dicha diferencia. En este trabajo, a dicha diferencia se la denominará sobrevaloración del contado.

En cuanto a los volúmenes, la contratación bursátil se transformó para expresarla en términos de contratos de futuro con el fin de homogeneizar la medición de dicha variable en los dos mercados. Como un contrato de futuro equivalía al valor del índice multiplicado por 100 pesetas, el volumen del mercado bursátil homogeneizado se calculó como el cociente entre el valor monetario de los volúmenes negociados (valorados con el punto medio de la horquilla de precios al final de cada intervalo) y 100 veces el nivel del índice Ibex 35 (valorado con el punto medio de la horquilla de precios al final de cada intervalo). Para cada sesión la primera observación que se toma es el primer intervalo de cinco minutos posterior al instante en el que todos los valores han realizado su operación de apertura. De esta manera el número de observaciones coincide exactamente con el que se utiliza en los contrastes de precios.

Finalmente, se generaron unas medidas de volatilidad de los rendimientos en los dos mercados siguiendo el procedimiento que se describe a continuación⁶. En primer lugar, se contrasta la presencia de estacionalidades intradía en las series de rendimientos, calculados como la primera diferencia de los logaritmos de las series obtenidas a partir del punto medio de la horquilla de precios comprador-vendedor. Con este fin se regresan los rendimientos sobre 72 variables ficticias indicativas de los intervalos de cinco minutos de los que se compone cada sesión. En caso de encontrarse algún intervalo de la sesión en el que los rendimientos sean significativamente diferentes de cero, se descuenta de la serie original el rendi-

⁶ Esta medida de volatilidad se utiliza solamente para realizar un análisis preliminar, ya que el análisis de las relaciones temporales de la volatilidad se realiza a partir de un modelo de la familia GARCH.

miento medio en esos intervalos⁷. Posteriormente, las series desestacionalizadas se regresan sobre retardos de estas. Por último, la volatilidad de cada mercado se define como el valor absoluto de los residuos de la última regresión.

4. Resultados empíricos

4.1. Análisis preliminar de la información

En el cuadro 2 aparecen algunos estadísticos descriptivos de las variables estudiadas en este trabajo. La primera característica relevante que se observa es que los rendimientos del futuro presentan mayor volatilidad que los del contado. A esta conclusión se llega tanto si se comparan las desviaciones típicas de las series originales como si se observan las medias de las volatilidades.

CUADRO 2
Estadística descriptiva de variables

	Media	Desv. típica	Mínimo	Máximo
Rendimientos (%)				
Contado.....	0,00	0,06	-0,64	0,73
Futuro.....	0,00	0,08	-0,79	0,72
Volúmenes (n.º contratos)				
Contado.....	1.008,71	1.792,60	9,56	57.236,29
Futuro.....	934,94	1.319,66	0,00	23.402,00
Volatilidades (%)				
Contado.....	0,04	0,05	0,00	0,73
Futuro.....	0,06	0,06	0,00	0,79
Sobrevaloración contado (%)	0,00	0,10	-0,51	0,70

Los rendimientos se definen como la primera diferencia logarítmica del punto medio de la horquilla de precios.

El volumen del mercado al contado está expresado en términos equivalentes a contratos de futuros. Para ello se ha dividido el volumen efectivo de los 35 valores que componen el índice Ibex 35 por 100 veces el valor de dicho índice al final de cada intervalo. La valoración de los volúmenes y del índice se ha realizado con el punto medio de la horquilla de precios.

La volatilidad de cada mercado se define como el valor absoluto de los residuos de la regresión de los rendimientos desestacionalizados sobre varios retardos de éstos, donde el número de retardos se especifica según un contraste de razón de verosimilitudes.

La sobrevaloración del contado se mide como la diferencia logarítmica entre el índice Ibex 35 corregido del efecto del «cost of carry» y la cotización del futuro. Dicha corrección se ha realizado sumando al logaritmo del índice una estimación del «cost of carry», que se calcula como la diferencia de la media diaria de los logaritmos del futuro y del índice.

Por otra parte, se observa que los volúmenes medios acumulados de los valores que componen el índice Ibex 35 superan a los volúmenes medios de negociación con futuros. No obstante, debe te-

⁷ Tal como se comenta más adelante, solamente se encuentra evidencia de estacionalidad en el primero y en el último intervalos del mercado al contado.

nerse en cuenta que en el período horario del análisis se excluye la parte de la negociación con futuros que tiene lugar cuando el mercado al contado está cerrado.

En cuanto a la sobrevaloración del contado, destaca el reducido valor que toma su desviación típica (0,10 %), lo que sugiere que la aproximación que se utiliza para estimar el «cost of carry» es razonablemente buena ya que, suponiendo normalidad, en el 95 % de las observaciones la relación de precios contado-futuro no sería arbitrable ya que la sobrevaloración estaría dentro de una banda (-0,2 %,0,2 %) que es inferior a los costes de transacción (éstos suelen representar, en términos medios, aproximadamente el 0,3 %). Un análisis más detallado de la serie de sobrevaloración indica que en el 91,6 % de las observaciones el valor absoluto de aquella serie era inferior a los costes de transacción asociados a los diferenciales de precios, aproximados como la semisuma de las horquillas relativas de los precios del índice⁸ y del futuro. Este resultado indica que, por lo menos, en el 91,6 % de las observaciones de la muestra el arbitraje no era posible.

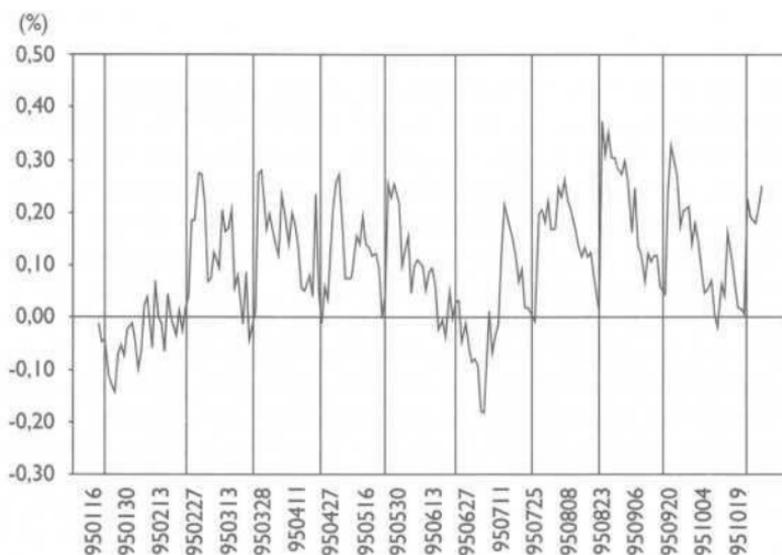
En el gráfico 1, se representa la evolución del «cost of carry» estimado. Las principales características de esta serie son las siguientes:

- i) Oscila en un rango comprendido entre -0,4 % y 0,8 %.
- ii) Presenta unos valores positivos durante la mayor parte del período, con la excepción de los meses de enero, febrero y junio.
- iii) En las fechas de vencimiento la serie se encuentra próxima a cero.

Todas estas características están en línea con las propiedades que debe tener el «cost of carry» de acuerdo con la teoría. En efecto, el «cost of carry» está formado por dos componentes con distinto signo: el efecto de la financiación, cuyo impacto es positivo y depende del nivel de los tipos de interés, y la rentabilidad por dividendos, cuyo impacto es negativo. Tomando los tipos de interés del período estudiado y el importe de los dividendos pagados por las compañías que forman parte del índice se obtienen unos valores del «cost of carry» que se encuentran dentro del rango estimado. El hecho de que el «cost of carry» tome un valor positivo durante la mayor parte del período se explica porque el impacto de la

⁸ La horquilla de precios del índice se calculó como la diferencia entre las capitalizaciones del índice evaluadas a los precios de compra y de venta, respectivamente, sobre el punto medio, y la horquilla del futuro se calculó como la diferencia entre las cotizaciones de compra y de venta sobre el punto medio de ambas.

GRÁFICO I Cost of carry estimado



Las líneas verticales representan las fechas de vencimiento de los contratos de futuro.

financiación es, en el período estudiado, superior al de los dividendos, con la excepción de los meses de enero y junio, durante los cuales se concentra el pago de la mayor parte de los dividendos. Finalmente, de acuerdo con la teoría, en las fechas de los vencimientos el «cost of carry» debe ser igual a cero.

El análisis del comportamiento estadístico de las series se completa con un estudio sobre la presencia de estacionalidades intradía. En otros mercados existe una amplia evidencia sobre este tipo de comportamiento para algunas de estas series⁹. El procedimiento seguido para el estudio de las estacionalidades consiste en introducir variables ficticias indicativas de los intervalos de cinco minutos de los que se compone una sesión.

Por lo que respecta a los rendimientos, se detecta un comportamiento estacional en el mercado al contado en el primer y último intervalos de la sesión, si bien la importancia cuantitativa de este efecto es muy pequeña (0,02 % de rentabilidad media en el primer intervalo y 0,06 % en el último). En cambio, este tipo de comportamiento no aparece con los rendimientos del futuro. La asimetría

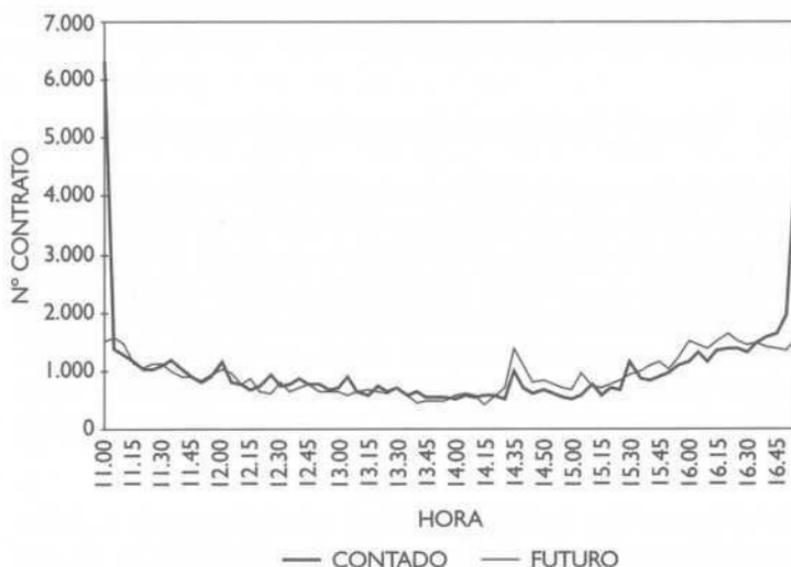
⁹ Véase, por ejemplo, Wood, McInish y Ord (1985).

entre las dos series de rendimientos en cuanto a las estacionalidades diarias se explica, probablemente, por el hecho de que el primer y último intervalos diarios coinciden con la apertura y el cierre del mercado bursátil, pero no con la apertura y cierre del mercado de futuros.

En cuanto a la sobrevaloración del contado, solamente se encuentra un comportamiento estacional durante el último intervalo diario, en el que dicha variable toma un valor medio positivo.

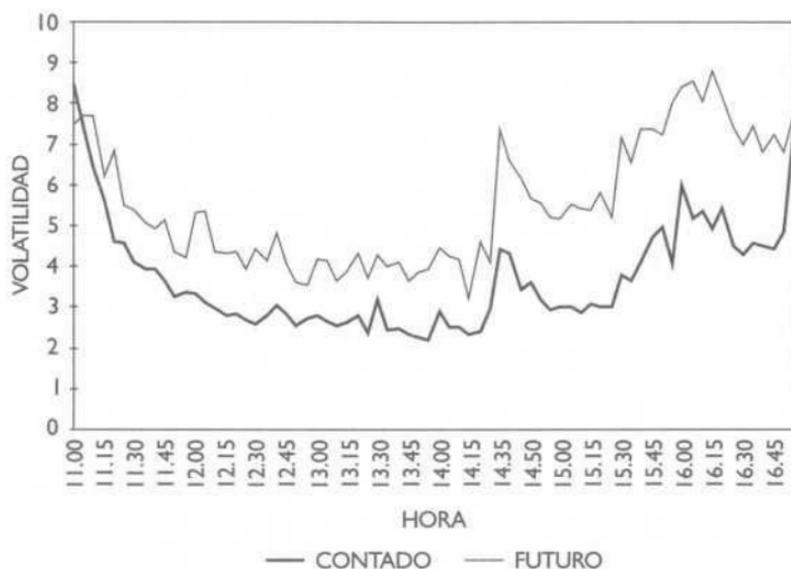
Finalmente, por lo que respecta a los volúmenes y las volatilidades, tal como se puede apreciar en los gráficos 2 y 3, estas series presentan un perfil diario en forma de U. El brusco aumento de las volatilidades y volúmenes en el intervalo entre 14:30 y 14:35 está relacionado, probablemente, con el hecho de que a esa hora se suelen anunciar las estadísticas económicas más importantes de la economía americana.

GRÁFICO 2
Evolución intradía de los volúmenes



El volumen del mercado al contado está expresado en términos equivalentes a contratos de futuros. Para ello se ha dividido el volumen de los 35 valores que componen el índice Ibox 35 por 100 veces el valor de dicho índice al final de cada intervalo. La valoración de los volúmenes y del índice se ha realizado con el punto medio de la horquilla de precios.

GRÁFICO 3
Evolución intradía de la volatilidad



La volatilidad de cada mercado se ha calculado como el valor absoluto de los residuos de la regresión de los rendimientos corregidos de estacionalidad sobre varios retardos de éstos, donde el número de retardos se especifica según un contraste de razón de verosimilitudes.

4.2. Relación dinámica de las medias de los precios

La metodología que se utiliza para estudiar la dinámica de los precios es la estimación de un modelo VAR con las variables (el logaritmo de los precios) en primeras diferencias y con un mecanismo de corrección del error¹⁰. En otras palabras, los rendimientos¹¹ de cada mercado se regresan sobre varios retardos de los rendimientos del propio mercado y de los rendimientos del otro mercado y sobre un término [el término de corrección del error (TCE)] que recoge los desajustes a corto plazo en la relación de largo plazo en el nivel de los precios.

Antes de presentar los resultados de la estimación de los modelos, conviene advertir que la definición de las variables que aparecen en dichos modelos no coincide con la que se utiliza en otros trabajos de la literatura. En primer lugar, los rendimientos se han calculado

¹⁰ Esta especificación de las relaciones dinámicas entre los precios en ambos mercados se justifica por el hecho de que las series de precios presentan una raíz unitaria y están cointegradas. Para detalles de estos contrastes puede consultarse Blanco (1999).

¹¹ Nótese que la primera diferencia del logaritmo de los precios es aproximadamente igual que el rendimiento o variación en términos relativos.

a partir del punto medio de las horquillas comprador-vendedor en lugar de los precios de transacción y, en segundo lugar, el TCE se define como la sobrevaloración del contado, estimada siguiendo el procedimiento descrito en la tercera sección, mientras que en otros trabajos dicho término se define como el error de la ecuación de cointegración.

La utilización del punto medio de las horquillas de precios en lugar de los precios de transacción cabría esperar que redujera el problema de la contratación infrecuente ya que, por definición, las órdenes de precios aparecen con una frecuencia superior a la de las transacciones, ya que sólo un subconjunto de las órdenes introducidas en el sistema terminan cruzándose¹². En este sentido, la información que proporcionan las órdenes y, en particular, las horquillas es más actualizada que la que contienen las transacciones.

Por lo que respecta al TCE, la definición que se utiliza en este trabajo es equivalente a introducir en la ecuación de cointegración el «cost of carry»¹³. En definitiva, la ventaja de la aproximación que se sigue es que enriquece el análisis estadístico de la dinámica de las dos series de precios (contado y futuro) con un elemento sugerido por la teoría. Al tratarse de un modelo que incorpora más información cabría esperar que este modelo capturase mejor las relaciones dinámicas entre los dos mercados.

Los principales resultados de la estimación de los modelos que recogen la relación dinámica de los dos mercados aparecen en el cuadro 3. Según se puede apreciar, los dos contrastes de causalidad permiten rechazar al 1 % la hipótesis nula de ausencia de causalidad. En consecuencia, la evidencia es favorable a la existencia de una relación de causalidad bidireccional entre el precio del futuro y el índice.

El estudio individualizado de la significatividad de los coeficientes muestra que la interacción entre los dos mercados se produce a través de una doble vía. Por una parte, ésta se produce a través del TCE, ya que el coeficiente de dicha variable es estadísticamente significativo y, además, aparece con el signo esperado: negativo en la ecuación del contado y positivo en la ecuación del futuro. Es decir, que si el contado está sobrevalorado en relación al futuro el índice tiende a decrecer y el futuro tiende a crecer. En otras palabras, siempre que no se cumpla la relación a largo plazo (igualdad

¹² A modo de ejemplo, según los datos publicados por la Sociedad de Bolsas, en 1996 el número de órdenes introducidas en el mercado continuo fue de 23.515 y el número de operaciones fue de 13.410.

¹³ Para más detalles puede consultarse Blanco (1999).

CUADRO 3**Relación dinámica de las medias de los precios en los dos mercados (contado y futuro)**

Ecuación contado. Variable endógena: Δi_t		Ec. futuro. Variable endógena: Δf_t
Variable independiente	coeficiente	coeficiente
Δi_{t-1}	0,003	0,116 *
Δi_{t-2}	-0,058 *	-0,049 **
Δi_{t-3}	-0,022	0,008
Δf_{t-1}	0,217 *	0,046 *
Δf_{t-2}	0,064 *	-0,003
Δf_{t-3}	0,038 *	-0,001
s_{t-1}	-0,094 *	0,075 *
	Valor	Valor
Contraste LR causalidad	1.740,67 *	193,29 *

Las dos ecuaciones se han estimado por MCO. El futuro y el índice Ibx 35 se han calculado a partir del punto medio de la horquilla de precios.

Δi_{t-j} para $j=0, \dots, 3$ es la primera diferencia del logaritmo del índice desestacionalizada y retardada j periodos, Δf_{t-j} para $j=0, \dots, 3$ es la primera diferencia del logaritmo del futuro retardada j periodos, s_{t-1} es la sobrevaloración del contado retarda un periodo, y se define como la diferencia logarítmica entre el índice Ibx 35 corregido del efecto del «cost of carry» y la cotización del futuro. Dicha corrección se ha realizado sumando al logaritmo del índice una estimación del «cost of carry», que se calcula como la diferencia de la media diaria de los logaritmos del futuro y del índice. Contraste LR de causalidad: El estadístico $LR=2(l_{sr}-l_r)$, donde l_{sr} y l_r son el logaritmo de la función de verosimilitud en el modelo sin restringir y en el modelo restringido, que bajo la H_0 se distribuye como una χ^2 con 4 grados de libertad. En la ecuación de contado la H_0 es la no significatividad conjunta de los coeficientes de las variables Δf_{t-j} para $j=1, \dots, 3$ y de la variable s_{t-1} . En la ecuación del futuro la H_0 es la no significatividad conjunta de los coeficientes de las variables Δi_{t-j} para $j=1, \dots, 3$ y de la variable s_{t-1} .

*: significativo al 1 %. **: significativo al 5 %.

entre los precios, corregidos del «cost of carry») los precios se moverán en ambos mercados para restablecer el equilibrio.

En segundo lugar, la interacción entre los dos mercados se captura a través de los retardos de los rendimientos del «otro» mercado. En efecto, tal como se observa en el cuadro 3, los coeficientes de algunos de los rendimientos retardados de cada uno de los dos mercados son significativos en la ecuación del otro mercado. El signo de estos coeficientes es, con la excepción del segundo retardo del rendimiento del índice en la ecuación del futuro, positivo. Es decir, que los movimientos en los precios de un mercado tienden a ir seguidos por movimientos en la misma dirección en los precios del otro mercado.

Aunque las dos vías de interacción que se acaban de describir aparecen en los dos mercados, se puede apreciar una asimetría en su importancia cuantitativa. Así, se observa que tanto el valor absoluto del coeficiente del TCE como el de los coeficientes de los rendi-

mientos retardados del «otro» mercado son superiores en la ecuación del contado. Asimismo, se encuentra que, en dicha ecuación, un mayor número de estos últimos coeficientes son significativos. Todas estas características parecen apuntar a que la transmisión de información desde el futuro hacia el contado tiene mayor importancia que la que se produce en el sentido contrario.

Comparando los resultados que se acaban de presentar con los de otros trabajos de la literatura, la primera característica que se aprecia es que, en nuestros resultados, el TCE juega un papel más importante a la hora de explicar la interacción entre los dos mercados, característica que se refleja en el menor número de retardos que aparecen en la relación dinámica. Por otra parte, la velocidad con la que se ajustan los precios a los desequilibrios es más alta en nuestro caso, ya que el valor absoluto del coeficiente del TCE es sustancialmente mayor. Esta característica no es sorprendente puesto que, bajo nuestra modelización, la relación de equilibrio recoge una condición de arbitraje, mientras que con la metodología tradicional aquella relación capta la convergencia al vencimiento entre los dos precios. Finalmente, en nuestros resultados, la asimetría de los coeficientes que capturan la interacción entre los mercados parece ser menor.

En Lafuente (1995), por ejemplo, se estiman unos coeficientes del TCE que son, en valores absolutos, más de cinco veces inferiores a los nuestros. Asimismo, la especificación del modelo incluye un total de ocho retardos frente a sólo tres en nuestro caso. Dado que el mercado objeto de análisis en Lafuente (1995) es el mismo que en este trabajo, se podría pensar que la novedad de nuestros resultados debe ser atribuible a los cambios metodológicos introducidos. Precisamente, con el fin de validar esta impresión se estudia el impacto sobre los resultados de las innovaciones metodológicas introducidas en este trabajo. Para ello se reestiman los modelos, primeramente, relajando conjuntamente las dos innovaciones introducidas y, posteriormente, relajando cada una de ellas por separado, lo que permite conocer el impacto marginal de cada una de ellas.

La comparación de las relaciones dinámicas que se derivan de los diferentes modelos estimados se lleva a cabo utilizando la función de reacción a un impulso. Los coeficientes de esta función miden los efectos de un shock en los precios de un mercado sobre el nivel de precios del otro mercado para diferentes horizontes temporales. En el cuadro 4 aparecen los efectos a largo plazo que se derivan de la función de reacción ortogonalizada¹⁴, los cuales recogen el impacto de las perturbaciones ortogonalizadas normalizadas por su desviación típica.

¹⁴ En Blanco (1999) se describe cómo se deriva esta función.

CUADRO 4**Comparación de las funciones de reacción a un impulso en las cuatro modelizaciones alternativas de los precios. Efectos a largo plazo**

	Identificación 1	Identificación 2
Modelo 1		
Impulso contado	0,640	0,240
Impulso futuro	0,433	0,734
Modelo 2		
Impulso contado	0,532	0,075
Impulso futuro	0,668	0,850
Modelo 3		
Impulso contado	0,576	0,095
Impulso futuro	0,612	0,835
Modelo 4		
Impulso contado	0,619	0,205
Impulso futuro	0,535	0,792

Modelo 1: Precios calculados a partir del punto medio de la horquilla de precios y corrigiendo el índice por el «cost of carry».

Modelo 2: Precios de la última transacción y sin corregir el índice por el «cost of carry».

Modelo 3: Precios calculados a partir del punto medio de la horquilla de precios y sin corregir el índice por el «cost of carry».

Modelo 4: Precios de la última transacción y corrigiendo el índice por el «cost of carry».

En este cuadro se estima el impacto a largo plazo de un movimiento de 10 veces la desviación típica en % en los precios de un mercado sobre el nivel de precios del otro mercado. Se entiende por efecto a largo plazo el efecto acumulado hasta que se restablece el equilibrio. Las perturbaciones se ortogonalizan imponiendo alguna restricción sobre la siguiente transformación lineal: $\varepsilon_{10} = v_{10} + b v_{20}$; $\varepsilon_{20} = c v_{10} + v_{20}$. En el esquema primero de identificación (primera columna) las perturbaciones se ortogonalizan imponiendo $b=0$, mientras que en el segundo esquema las perturbaciones se ortogonalizan imponiendo $c=0$.

La primera característica que se observa en los resultados de todas las modelizaciones que aparecen en el cuadro 4 es que los impactos más importantes aparecen en la dirección futuro-contado, confirmando las conclusiones que se habían anticipado al estudiar los coeficientes de las dos ecuaciones estimadas.

Por otra parte, la comparación del modelo en el que se introducen las dos innovaciones (modelo 1) con el que se relajan éstas (modelo 2) revela que, independientemente del esquema de identificación utilizado, el mayor impacto del contado sobre el futuro y el menor impacto del futuro sobre el contado aparece con el modelo 1. La comparación del modelo 1 con los modelos en los que se relajan por separado las dos innovaciones (modelos 3 y 4), pone de manifiesto que el efecto de cada una de estas innovaciones va en la dirección de reducir la asimetría en la bidireccionalidad de la relación de causalidad que se deriva del modelo tradicionalmente esti-

mado en la literatura (modelo 2); es decir, que refuerzan la causalidad en la dirección contado a futuro.

En conclusión, la comparación de las funciones de reacción a un impulso de los diferentes modelos estimados permite concluir que la asimetría que se documenta en la literatura, en lo relativo al liderazgo en la formación de precios del mercado de futuros sobre el de contado, es en parte atribuible a que con la metodología de estimación seguida no se controla el problema de la contratación infrecuente ni se tiene en cuenta que las dos series de precios están relacionadas por el «cost of carry».

4.3. *Relación dinámica de los volúmenes*

La relación dinámica de los volúmenes se estudia siguiendo la misma metodología que se ha utilizado con los rendimientos. Sin embargo, en el caso de los volúmenes los contrastes estadísticos permiten rechazar la presencia de raíces unitarias en las series, por lo que la modelización correcta es un VAR con las variables expresadas en niveles y sin la inclusión del TCE. Es decir, que se estima, para cada mercado, un modelo en el que los volúmenes se regresan sobre varios retardos de los volúmenes del propio mercado y retardos de los del otro mercado. En los modelos estimados las variables se corrigen de los efectos estacionales.

La hipótesis nula de ausencia de causalidad en el sentido de Granger desde el futuro hacia el contado se contrasta a partir del estudio de la significatividad estadística conjunta de los coeficientes de los volúmenes retardados del mercado de futuros en la ecuación del contado, mientras que para contrastar la existencia de causalidad en el sentido contrario se estudia la significatividad conjunta de los coeficientes de los volúmenes retardados del mercado al contado en la ecuación del futuro.

Los principales resultados de la estimación de estos modelos aparecen en el cuadro 5, en el cual se puede observar que el modelo se especifica con 11 retardos, lo que es indicativo de la elevada persistencia de los volúmenes. Por otra parte, la evidencia es favorable a una causalidad bidireccional. No obstante, y al igual que ocurría con los rendimientos, se detecta una asimetría en el tamaño de los coeficientes que recogen la interacción entre los dos mercados. En concreto, se encuentra que los coeficientes que recogen la causalidad en la dirección futuro-contado son mayores que los coeficientes que capturan la causalidad en la otra dirección. Es decir, la influencia de los volúmenes del mercado de futuros sobre los del mercado al contado parece ser más importante que la que se produce en sentido contrario.

CUADRO 5
Relación dinámica entre los volúmenes de los dos mercados (contado y futuro)

Ecuación contado. Variable endógena: VC_t^d		Ec. futuro. Variable endógena: VF_t^d
Var. independiente	coeficiente	coeficiente
VC_{t-1}^d	0,085 *	0,034 *
VC_{t-2}^d	0,040 *	0,005
VC_{t-3}^d	0,041 *	0,004
VC_{t-4}^d	0,031 *	-0,005
VC_{t-5}^d	0,016 *	-0,005
VC_{t-6}^d	0,019 **	0,002
VC_{t-7}^d	0,024 **	0,009
VC_{t-8}^d	0,001	-0,012 **
VC_{t-9}^d	0,012 **	-0,006
VC_{t-10}^d	0,024 *	-0,003
VC_{t-11}^d	0,015	0,002
VF_{t-1}^d	0,076 *	0,207 *
VF_{t-2}^d	0,028 **	0,093 *
VF_{t-3}^d	0,013	0,062 *
VF_{t-4}^d	0,006	0,036 *
VF_{t-5}^d	0,002	0,059 *
VF_{t-6}^d	0,007	0,025 **
VF_{t-7}^d	-0,011	0,015
VF_{t-8}^d	0,000	0,032 *
VF_{t-9}^d	0,015	0,036 **
VF_{t-10}^d	-0,010	0,020
VF_{t-11}^d	0,012	0,029 **
	Valor	Valor
Contraste LR causalidad.	86,73 *	37,94 *

Las dos ecuaciones se han estimado por MCO. El volumen del mercado al contado está expresado en términos equivalentes a contratos de futuros. Para ello se ha dividido el volumen efectivo de los 35 valores que componen el índice Ibex 35 por 100 veces el valor de dicho índice al final de cada intervalo. La valoración de los volúmenes y del índice se ha realizado con el punto medio de la horquilla de precios. El volumen del mercado de futuros se mide en número de contratos. VC_{t-j}^d para $j=0, \dots, 11$ es el volumen desestacionalizado del contado retardado j periodos, VF_{t-j}^d para $j=0, \dots, 11$ es el volumen del futuro desestacionalizado y retardado j periodos. Contraste LR de causalidad: El estadístico $LR=2(l_{lr}-l_r)$, donde l_{lr} y l_r son el logaritmo de la función de verosimilitud en el modelo sin restringir y en el modelo restringido, que bajo la H_0 se distribuye como una χ^2 con 11 grados de libertad. En la ecuación de contado la H_0 es la no significatividad conjunta de los coeficientes de las variables VF_{t-j}^d para $j=1, \dots, 11$. En la ecuación del futuro la H_0 es la no significatividad conjunta de los coeficientes de las variables VC_{t-j}^d para $j=1, \dots, 11$.
 *: significativo al 1 %. **: significativo al 5 %.

Así pues, estos resultados confirman la evidencia encontrada con la media de los precios en el sentido de que la información se transmite en las dos direcciones, si bien los efectos más importantes se localizan en la dirección futuro a contado.

4.4. Relación dinámica de las volatilidades

El estudio de la transmisión de volatilidad entre el mercado de futuros y el mercado al contado se realiza en el marco de los modelos GARCH. En concreto, se especifica un modelo GARCH (1,1) para la varianza condicional de los rendimientos de cada mercado en el que se incluye el cuadrado de la innovación retardada del otro mercado. El coeficiente de esta última variable recoge la transmisión de volatilidad desde el último mercado hacia el primero. Esta forma de estudiar la transmisión de volatilidad entre mercados fue originalmente propuesta por Engle *et al.* (1990) y aplicada a los principales mercados internacionales de divisas, y posteriormente ha sido seguida en otros trabajos para el estudio de la transmisión de volatilidad entre mercados bursátiles.

Las variables que definen la relación lineal del modelo GARCH(1,1) se desestacionalizan aplicando la metodología propuesta por Taylor y Xu (1995) y se supone que la distribución condicional de las innovaciones viene dada por una función exponencial generalizada con parámetro de densidad ν ¹⁵.

En cuanto a los resultados de las estimaciones de los parámetros, en el cuadro 6 se aprecia que los dos coeficientes que recogen la transmisión de volatilidad entre mercados son positivos y estadísticamente significativos, lo que significa que las innovaciones en cualquiera de los dos mercados no sólo afectan a la volatilidad del propio mercado sino que también afectan a la del otro. Este resultado, que va en la misma línea que el que se ha encontrado previamente en las relaciones temporales entre las medias de los precios y los volúmenes, refuerza las conclusiones anteriores en el sentido de que ambos mercados se influyen mutuamente sin que exista uno de los dos que ejerza un papel de liderazgo sobre el otro.

Asimismo, se encuentra nuevamente una cierta asimetría en las relaciones temporales entre ambos mercados ya que el coeficiente que recoge la transmisión de volatilidad desde el futuro hacia el contado (0,047) es mayor que el que captura la transmisión de volatilidad en el otro sentido (0,026).

¹⁵ En Hamilton (1994) puede consultarse la forma funcional de esta distribución.

CUADRO 6**Relación dinámica entre las volatilidades de los dos mercados (contado y futuro)**

Modelización de la volatilidad del contado (i=1)		Modelización de la volatilidad del futuro (i=2)
Parámetro	estimación	estimación
α_{i0}	$1,2 \cdot 10^{-4} *$	$7,1 \cdot 10^{-5} *$
β_i	0,785 *	0,910 *
α_{i1}	0,084 *	0,026 *
α_{i2}	0,047 *	0,071 *
v	1,044 *	1,137 *

El modelo estimado en cada mercado es el siguiente:

$$\varepsilon_{it} | \Phi_{t-1} \sim D(0, h_{it})$$

$$e_{it} = \sum \varepsilon_{ik} Dk_t$$

$$h_{it}/e_{it} = \alpha_{i0} + \beta_i h_{it-1}/e_{it-1} + \alpha_{i1} \varepsilon_{1t-1}^2 / e_{1t-1} + \alpha_{i2} \varepsilon_{2t-1}^2 / e_{2t-1}$$

donde el subíndice i indica el mercado ($i=1$: contado, $i=2$: futuro), ε_{it-1}^2 es el cuadrado del rendimiento inesperado en el mercado i , h_{it} es la varianza condicional del rendimiento inesperado del mercado i y ε_{ik} son parámetros estacionales previamente estimados y Dk_t son 72 variables ficticias que toman valor unitario para aquellas observaciones t pertenecientes al intervalo k ($k=\{1, \dots, 72\}$).

La función de distribución D es una exponencial generalizada con parámetro de densidad v . El modelo se ha estimado por máxima verosimilitud.

*: significativo al 1 %.

5. Conclusiones

En este trabajo se ha documentado evidencia favorable a una causalidad bidireccional entre los precios de los futuros sobre el índice Ibex 35 y los precios del mercado al contado, aunque la transmisión de información desde el futuro hacia el contado parece ser más importante que la que se observa en el sentido contrario. Estos resultados indican que la información que contienen los precios de cualquiera de los dos mercados es de utilidad para los agentes que participan en el otro mercado. En este contexto, con la creación del mercado de futuros, los participantes en el mercado al contado han visto ampliado su conjunto de información, por lo que debe de haber aumentado la velocidad a la que la información se incorpora a los precios, contribuyendo así a la mejora de la eficiencia del mercado de renta variable.

Una posible interpretación de los resultados es que la información se incorpora primeramente en los precios del mercado donde resulta más barato explotarla. En este sentido, el primer mercado que reacciona depende de la liquidez relativa de los mercados y del tipo de información que llega. Teniendo en cuenta la liquidez relativa de los dos mercados, se ha encontrado que resulta mucho más rentable explotar la información general en el mercado de futuros, mientras que la información específica puede ser más rentable explotarla en el mercado al contado.

La metodología utilizada en este trabajo para estudiar la relación dinámica del primer momento de los precios presenta dos innovaciones en comparación con la mayoría de los trabajos de la literatura; éstas son: la utilización del punto medio de las horquillas de precios comprador-vendedor en lugar de los precios de transacción, y la introducción del «cost of carry» en la relación a largo plazo entre los precios de los dos mercados. La primera se introduce con el fin de controlar el problema de la negociación infrecuente, y la segunda para enriquecer el modelo con un elemento sugerido por la teoría. Ambas innovaciones tienen efectos muy importantes sobre las estimaciones. En concreto, se encuentra como efecto conjunto de ambas una reducción de la asimetría en la transmisión de información entre los mercados. Esta evidencia sugiere que los resultados de la literatura pueden estar sesgando al alza la importancia que ejerce el futuro sobre el contado.

Finalmente, el análisis se ha extendido a las relaciones dinámicas de las volatilidades de los precios y de los volúmenes por ser variables que también recogen la llegada de nueva información. Los resultados de dicho análisis refuerzan las conclusiones obtenidas con el primer momento de los precios; es decir, se encuentra evidencia de una interacción en las dos direcciones, siendo más importante la que se produce en la dirección futuro a contado.

* Este texto es una versión reducida del capítulo III de la tesis doctoral que defendí, en octubre de 1998, en el Departamento de Fundamentos de Ciencias Económicas de la Universidad del País Vasco. Agradezco a Gonzalo Rubio su labor como director y a todos aquellos que me han realizado comentarios o propuesto sugerencias, como los miembros del Tribunal y los asistentes a los seminarios organizados en la Universidad Calos III de Madrid y en el Servicio de Estudios del Banco de España, especialmente a Soledad Núñez. Finalmente, agradezco a la CNMV los datos que me ha facilitado.

Referencias

- Abhyankar, A. H. (1955):** «Return and volatility dynamics in the FT-SE 100 stock index and stock index futures markets», *The Journal of Futures Markets*, 15, pp. 457-488.
- Admati, A. R. y Pfleiderer, P. (1988):** «A theory of intraday patterns: volume and price variability», *The Review of Financial Studies*, 1, pp. 3-40.

- Andersen, T. G. y Bollerslev, T. (1994):** «Intraday seasonality and volatility persistence in financial markets», *Working Paper 193*, Department of Finance, Northwestern University.
- Antoniou, A. y Holmes, P. (1995):** «Futures trading, information and spot price volatility: evidence for the FTSE-100 stock index futures contract using GARCH», *Journal of Banking and Finance* 19, pp. 117-129.
- Bhattacharya, A. K.; Ramjee, A. y Ramjee, B. (1986):** «The causal relationship between futures price volatility and the cash price volatility of GNMA securities», *The Journal of Futures Markets*, 6, pp. 29-39.
- Blanco, R. (1999):** «El mercado español de renta variable. Análisis de la liquidez e influencia del mercado de derivados», *Estudios Económicos*, 66, Servicio de Estudios, Banco de España.
- Caballero, J. M. y Novales, A. (1995):** *The Spanish stock market futures contract: a first analysis*, mimeo.
- Chan, K. (1992):** «A further analysis of the lead-lag relationship between the cash market and stock index futures market», *The Review of Financial Studies*, 5 pp. 123-152.
- Chan, K.; Chan, K. C. y Karolyi, A. (1991):** «Intraday volatility in the stock index and stock index futures markets», *The Review of Financial Studies*, 4 pp. 657-684.
- Chan, K.; Chung, Y. P. y Johnson, H. (1993):** «Why option prices lag stock prices: a trading-based explanation», *The Journal of Finance*, 48, pp. 1957-1967.
- Cheung, Y. W. y Ng, L. K. (1991):** «The dynamics of S&P500 index and S&P 500 futures intraday price volatilities», *The Review of Futures Markets*, 9, pp. 458-486.
- Climent, F. J. y Pardo, A. (1996):** «Estudio de las relaciones entre el contrato de futuro sobre IBEX-35 y su activo subyacente», *Instituto Valenciano de Investigaciones Económicas*, WP-EC 96-13.
- Crain, S. J. y Lee, J. H. (1995):** «Intraday volatility in interest rate and foreign exchange spot and futures markets», *The Journal of Futures Markets*, 15, pp. 395-421.
- Dwyer, G. P., Jr.; Locke, P. y Yu, W. (1996):** «Index arbitrage and nonlinear dynamics between the S&P 500 futures and cash», *The Review of Financial Studies*, 9, pp. 301-332.

- Engle, R. F. y Granger, C. W. J. (1987):** «Co-integration and error correction: representation, estimation, and testing», *Econometrica*, 55, pp. 251-276.
- Engle, R. F.; Ito, T. y Lin, W. L. (1990):** «Meteor shower or heat waves. Heteroskedastic intra-daily volatility in the foreign exchange market», *Econometrica*, 58.
- Granger, C. (1969):** «Investigating causal relations by econometric models and cross spectral methods», *Econometrica*, 37, pp. 424-438.
- Granger, C. (1986):** «Developments in the study of cointegrated economic variables», *Oxford Bulletin of Economics and Statistics*, 48, pp. 213-228.
- Hamilton, J. D. (1994):** «Time series analysis», Princeton University.
- Kawaller, I. G.; Koch, P. D. y Koch, T. W. (1987):** «The temporal price relationship between S&P 500 futures and the S&P 500 index», *The Journal of Finance*, 42, pp. 1309-1329.
- Kawaller, I. G.; Koch, P. D. y Koch, T. W. (1990):** «Intraday relationship between volatility in S&P500 futures prices and volatility in the S&P500 index», *Journal of Banking and Finance*, 14, pp. 373-397.
- Kyle, A. (1985):** «Continuous auctions and insider trading», *Econometrica*, 53, pp. 1315-1335.
- Lafuente, J. A. (1995):** «Rendimientos y volatilidad en el mercado español de futuros sobre el Ibex 35», mimeo.
- Lashgari, M. y Wahab, M. (1993):** «Price dynamics and error correction in stock index and stock index futures markets: a cointegration approach», *The Journal of Futures Markets*, 13, pp. 711-742.
- MacKinlay, A. C. y Ramaswamy, K. (1988):** «Index-futures arbitrage and the behavior of stock index futures prices», *The Review of Financial Studies*, 1, pp. 137-158.
- MacKinnon, J. G. (1991):** «Critical values for cointegration test», in *Long Run Economic Relationships: Readings in Cointegration*, Engle, R. F. y Granger, C. W. J. (eds.), Oxford University Press, pp. 267-276.

- Martikainen, T. y Puttonen, V. (1994):** «Internacional price discovery in Finish stock index futures and cash markets», *Journal of Banking & Finance*, 18, pp. 809-822.
- McInish, T. y Wood, R. (1992):** «An analysis of intraday patterns in bid-ask spreads for NYSE stocks», *The Journal of Finance*, 48, pp. 753-764.
- Muñoz, M. J.; Fernández, A. y Nieto, L. (1997):** «Análisis de causalidad entre el IBEX-35 y el futuro sobre el índice en un contexto de cointegración», *Análisis Financiero*, 71, pp. 16-26.
- Newey, W. K. y West, K. D. (1987):** «A simple positive semi-definite heteroskedasticity and autocorrelation consistent covariance matrix», *Econometrica*, 55, pp. 703-708.
- Puttonen, V. (1993):** «Short sale restrictions and the temporal relationships between stock index cash and derivatives markets», *The Journal of Futures Markets*, 13, pp. 645-664.
- Sims, C. A. (1972):** «Money, income and causality», *American Economic Review*, 62, pp. 540-552.
- Stephan, J. A. y Whaley, R. E. (1990):** «Intraday price change and trading volume relations in the stock and stock option markets», *The Journal of Finance*, 45, pp. 191-220.
- Stoll, H. R. y Whaley, R. E. (1990):** «The dynamics of stock index and stock index futures returns», *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 25, pp. 441-468.
- Subrahmanyam, A. (1991):** «A theory of trading in stock index futures», *The Review of Financial Studies*, 4, pp. 17-51.
- Susmel, R. y Engle, R. F. (1992):** «Hourly volatility spillovers between international equity markets», *Discussion Papers*, 92-08, University of California.
- Taylor, S. J. y Xu, X. (1995):** «The incremental volatility information in one million foreign exchange quotations», *Working Paper*, n.º 95/008, The Management School, Lancaster University.
- White, H. (1980):** «A heteroskedasticity-consistent covariance matrix and a direct test for heteroskedasticity», *Econometrica*, 48, pp. 721-746.
- Wood, R. A.; McInish, T. H. y Ord, J. K. (1985):** «An investigation of transactions data for NYSE stocks», *Journal of Finance*, 40, pp. 723-739.

**INTEGRACIÓN Y ARBITRAJE
EN LOS MERCADOS FINANCIEROS
ESPAÑOLES.
UN ANÁLISIS EMPÍRICO**

Alejandro Balbás

Universidad Carlos III. Departamento de Economía de la Empresa

Iñaki R. Longarela

Universidad Carlos III. Departamento de Economía de la Empresa

Ángel Pardo

Universidad de Valencia. Departamento de Economía Financiera y
Matemática

Resumen

Varios autores han desarrollado nuevos procedimientos para medir el nivel de integración entre diferentes mercados financieros. Muchos de estos procedimientos se fundamentan en los principios básicos de valoración de activos como, por ejemplo, la ley de precio único o la ausencia de oportunidades de arbitraje. Dos mercados perfectamente integrados asignarán idéntico precio a cualquier par de carteras que sean réplica una de la otra, pese a que cada cartera pueda estar compuesta por activos negociables en uno solo de los mercados. Además, ambos mercados deben compartir al menos una familia de factores de descuento estrictamente positivos. Cuando estas propiedades fallan se puede medir su grado de incumplimiento, que puede ser considerado para introducir una medida de integración.

Este artículo contrasta empíricamente el nivel de integración que alcanzan algunos mercados financieros españoles, y utiliza para ello las medidas basadas en los principios de valoración. Consecuentemente, se obtienen los valores numéricos de variables muy importantes, como pueden ser los precios de estado, o las reglas de valoración neutrales al riesgo. Además, cuando hay oportunidades reales de arbitraje entre mercados, las estrategias concretas son determinadas con precisión.

Los resultados obtenidos en la contrastación sorprenden por diferentes motivos. Primero, porque el arbitraje aparece con un nivel de frecuencia significativo y, segundo, porque medidas de integración, que analizan aspectos diferentes y no tienen nece-

sariamente que estar relacionadas, muestran una evolución absolutamente análoga a lo largo de los periodos analizados.

Es interesante resaltar también que los argumentos que se suelen utilizar en contra de aquellos trabajos empíricos que ponen en evidencia la existencia de arbitraje en los mercados financieros (argumentos fundamentalmente basados en las imperfecciones del mercado) no parecen tener cabida en este caso. El análisis se ha implementado utilizando datos de alta frecuencia perfectamente sincronizados, y la horquilla de precios u otros costes de transacción siempre se han descontado.

Introducción

La ausencia de oportunidades de arbitraje es un supuesto básico, común a todos los modelos de valoración de activos, normalmente caracterizado mediante la existencia de precios de estado positivos [Ingersoll (1987)] o de reglas lineales de valoración neutral al riesgo [Harrison y Kreps (1979), Hansen y Richard (1987) o Back y Pliska (1991)].

Aplicando diferentes procedimientos, y con diversos objetivos, la literatura financiera se ha ocupado muy frecuentemente de contrastar empíricamente la ausencia de arbitraje. Algunas veces los autores se interesan por el grado de eficiencia de los mercados de capitales, mientras que en otras ocasiones, el nivel de integración de dos o más mercados financieros es el objeto central del análisis [Chen y Knez (1995) o Kempf y Korn (1996)].

Cuando los trabajos empíricos analizan la eficiencia de mercados, estudian normalmente una serie de reglas de inversión o estrategias de arbitraje concretas y bien conocidas. Por ejemplo, Hudson *et al.* (1996) contrastan estrategias propias del análisis técnico, y Sternberg (1994) o Kamara y Miller (1995) examinan la existencia de violaciones para la relación de paridad entre opciones de compra y venta europeas. Por otro lado, el análisis empírico del nivel de integración de mercados se suele efectuar mediante la comparación del precio de un mismo activo o cartera en mercados diferentes [Harris *et al.* (1995)] o, de nuevo, contrastando conocidas estrategias de arbitraje [Lee y Nayar (1993)] que suelen estar relacionadas con la *ley de precio único* cuando se involucran a la vez mercados de contado y futuro [Protopapadakis y Stoll (1983) o Kempf y Korn (1996)].

Con relación al problema de la integración, el artículo de Chen y Knez (1995) desarrolla un nuevo enfoque con aportaciones muy sig-

nificativas. Estos autores utilizan los precios de estado para introducir una nueva medida de integración. La medida es siempre mayor o igual a cero, y debe anularse para que haya total ausencia de arbitraje entre mercados. Por consiguiente, contrastando su medida se analiza el problema del arbitraje de manera global, yendo mucho más allá del contraste de estrategias específicas y conocidas. Las ventajas de la nueva metodología son evidentes. Primero, aunque pudiéramos asegurar que dos (o más) mercados están dando el mismo precio a algunos valores específicos, carteras concretas o conocidas réplicas, estaríamos lejos de poder garantizar la ausencia de arbitraje entre mercados. Segundo, calculando la frecuencia con la que la medida de Chen y Knez toma valores positivos, estamos observando el número de veces que los mercados reales violan los principios teóricos que fundamentan la valoración de activos.

Chen y Knez analizaron el comportamiento de su medida cuando se comparan los mercados norteamericanos NYSE y NASDAQ, y obtuvieron resultados que parecen reflejar cierta falta de integración (es decir, el arbitraje entre mercados podría ser posible). También comprobaron una alta sensibilidad de la medida con respecto a los supuestos sobre los niveles de imperfección de los mercados (horquilla de precios, otros costes de transacción, etc.), razón por la que sugieren la conveniencia de extender los desarrollos teóricos de forma que éstos puedan incorporar diferentes tipos de imperfecciones.

En Balbás y Muñoz (1998) se introduce una nueva medida, no negativa, que también debe anularse para garantizar plena integración, y que puede ser calculada en la práctica mediante la resolución de un par dual de problemas de optimización. El problema dual proporciona las reglas de valoración neutrales al riesgo, o una aproximación de éstas en el caso de que aparezca el arbitraje. El problema primal permite determinar estrategias de arbitraje óptimas. La medida (simbolizada por m en lo sucesivo) representa el máximo valor alcanzado por el cociente entre los beneficios obtenidos por arbitraje y el precio de mercado de los activos vendidos. Al medir el arbitraje en términos monetarios, diferentes imperfecciones pueden descontarse para observar si son éstas las causantes de la falta de integración, o bien, si el arbitraje puede implementarse a pesar de las mismas. Balbás y Muñoz prueban la existencia de cierta relación entre la medida de Chen y Knez (denotada por a a partir de ahora) y m , pero ambas medidas reflejan aspectos diferentes, alcanzan en general valores muy distintos y son complementarias cuando se trata de analizar niveles de integración.

Las ideas anteriores permiten justificar y motivar el objeto fundamental de este artículo. Estamos interesados en contrastar niveles

de eficiencia e integración de mercados de capitales. Para ello, nos centraremos en los mercados españoles, y aplicaremos metodologías generadas por las medidas de integración que hemos citado. Por consiguiente, siempre tendremos en cuenta todas las estrategias de arbitraje que aparezcan en el mercado, y determinaremos la óptima. Esto es una diferencia importante respecto a la literatura previa de carácter empírico. Además, obtendremos las probabilidades neutrales al riesgo, o una aproximación de éstas cuando aparezca el arbitraje.

Se han tomado ciertas precauciones que permiten garantizar la posibilidad práctica de implementar las estrategias de arbitraje detectadas. Primero, los precios de los activos serán tomados de bases de datos de alta frecuencia perfectamente sincronizados. Segundo, se ha tenido siempre en cuenta la horquilla de precios, y se ha supuesto, además, que los agentes compran al precio más alto y venden al más reducido. Tercero, las hipótesis de partida son excepcionalmente simples y compatibles con cualquier modelo de valoración de activos. De hecho, nuestro análisis involucrará a los derivados sobre el *IBEX35* (opciones y contratos de futuro) junto con bonos cupón cero, y sólo se incorporarán supuestos evidentes sobre el valor de los derivados al expirar. Cuarto, los costes de transacción y otras imperfecciones del mercado también serán estimadas y descontadas de los beneficios generados por el arbitraje.

Aunque sólo trabajemos con bonos y con derivados sobre el índice, también es interesante analizar qué ocurre si el propio índice es incorporado como un activo negociable más. Esto genera complicaciones técnicas, dado que el índice es un valor «complejo» al que afectan de forma muy especial multitud de imperfecciones del mercado (negociación infrecuente, costes de transacción especiales, simultaneidad de los datos, etc.). Consecuentemente, hemos preferido un estudio inicial más sencillo para comparar el índice con su réplica usual, compuesta por un bono y un contrato de futuro. Hemos determinado el valor de las medidas de Chen y Knez y de Balbás y Muñoz, y la conclusión fundamental es que el arbitraje apenas aparece si se tienen en cuenta los costes de transacción. No obstante, sí sorprende el hecho de que ambas medidas muestren una evolución absolutamente análoga, hecho que parece sugerir (como ya veremos) la existencia de algún tipo de relación entre las medidas que podría verificarse bajo ciertas restricciones iniciales. En cualquier caso, el resultado del contraste motiva la necesidad de una investigación más profunda sobre este asunto.

El segundo estudio incorpora los ya mencionados bonos y derivados, y hemos calculado el valor de la medida de Balbás y Muñoz. Nos hemos centrado en dos períodos diferentes. El primero, fe-

brero-marzo del 97, puede ser considerado como un período convencional caracterizado por la estabilidad de los mercados. El segundo, octubre del 97, es altamente convulsivo, muestra volatilidades extraordinariamente elevadas y, en definitiva, incorpora todos los efectos que generó la crisis asiática. Es importante analizar el comportamiento de los mercados en épocas convulsivas, por cuanto ello puede implicar sobre cuestiones estructurales o de regulación, además de otros aspectos [véase Kleidon y Whaley (1992)].

Las conclusiones del segundo estudio vuelven a sorprender. Incluso en el período estable se han detectado varias fechas para las que no hubo ni precios de estado positivos, ni factores de descuento positivos ni probabilidades neutrales al riesgo. Por tanto, después de descontar costes de transacción, el arbitraje entre mercados parece posible. Además, las ventajas de nuestra metodología parecen claras, ya que al variar la estrategia de arbitraje de unos momentos a otros, esta conclusión no habría sido posible si se hubieran contrastado estrategias de arbitraje concretas. Cuando se analiza el período convulsivo la conclusión aparece muy significativamente reforzada, dado que la medida de integración alcanza valores demasiado elevados (los beneficios por arbitraje son muy altos). Esto revela clara ineficiencia a lo largo de este período.

Para terminar esta introducción exponemos cómo se ha organizado el artículo. La metodología y los supuestos y contenidos teóricos esenciales son presentados en la primera sección. En la segunda se describen los datos utilizados. Los resultados empíricos se encuentran en la sección tercera, y la cuarta realiza un breve análisis de cómo los creadores de mercado actúan para valorar los diferentes activos o contratos. La sección quinta muestra algunas estrategias de arbitraje concretas que aparecieron en los mercados, y la última destaca las conclusiones más relevantes que se han obtenido.

I. Metodología y fundamentos teóricos

En esta sección presentaremos un resumen de los fundamentos teóricos sobre los que se apoya la metodología seguida en la contrastación empírica. Aceptaremos los supuestos comunes a todos los modelos estáticos de valoración de activos (Ingersoll (1987) capítulo segundo) y, por consiguiente, consideraremos fijados un instante futuro T , y n activos financieros. Con objeto de incorporar al análisis la horquilla de precios, para cada uno de los activos vamos a considerar un mejor precio de compra (bid, en terminología anglosajona) y un mejor precio de venta (ask). Ambos se suponen co-

nocidos aunque aceptamos que alguno de ellos pueda no estar disponible en el mercado. El pago (o precio) de cada activo en T es aleatorio, y dependerá de una familia finita de estados de la naturaleza. Supondremos conocida la relación entre cada estado de la naturaleza y el pago de cada uno de los activos, que será no negativo por hipótesis. Las carteras estarán representadas por vectores $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ cuyas componentes pueden ser positivas, cero o negativas, según el activo sea comprado, no negociado o vendido. Cuando no esté disponible el mejor precio de compra (de venta) del activo k -ésimo, aceptaremos la restricción $x_k \geq 0$ ($x_k \leq 0$). El precio actual de la cartera anterior se obtiene de la manera habitual (suma de los productos de cantidades por precio unitario), pero considerando que los agentes compran al mejor precio de venta y venden al de compra (es decir, compran más caro que venden). Finalmente, el precio o pago de x en T es una variable aleatoria que se obtiene como combinación lineal de las variables correspondientes a los activos individuales. Evidentemente, la relación entre el resultado final en el estado de la naturaleza y el pago final de x es conocida.

Para cada cartera factible x representaremos por x^+ y x^- a las carteras formadas por los activos comprados y vendidos respectivamente. Formalmente,

$$x^+_k = \text{Max} \{x_k, 0\} \text{ y } x^-_k = \text{Max} \{-x_k, 0\}$$

para $k = 1, 2, \dots, n$, y es obvia la relación $x = x^+ - x^-$. Los precios de x , x^+ y $-x^-$ (precio total, precio de los activos comprados, y precio de los activos vendidos) serán representados por $P(x)$, $C(x)$ y $V(x)$ respectivamente, y es clara la relación $P(x) = C(x) + V(x)$.

Para definir el concepto de arbitraje seguiremos el enfoque de Prisman (1986) o Ingersoll (1987).

Definición *La cartera factible x es una estrategia de arbitraje del segundo tipo (en lo sucesivo diremos simplemente «estrategia de arbitraje») si su precio actual es negativo y su pago en T es una variable aleatoria que no toma valores negativos en ningún estado de la naturaleza.*

Para simplificar la exposición vamos a incorporar un supuesto adicional que no supone ninguna restricción respecto al análisis empírico que se quiere realizar. Concretamente, admitiremos que uno de los n valores considerados es un activo libre de riesgo cuyo pago final (en T) es fijo y no depende del estado de la naturaleza. En estas condiciones la ausencia de arbitraje se caracteriza a través de la existencia de un sistema de probabilidades neutrales al riesgo para los estados de la naturaleza. En concreto, una sencilla adapta-

ción de la demostración del teorema 2 pp. 55 de Ingersoll (1987), permite probar el siguiente resultado que ya incorpora la horquilla [véase también Jouini y Kallal (1995)].

Teorema 1 *No existen oportunidades de arbitraje si y sólo si se puede encontrar un sistema de probabilidades para los estados de la naturaleza de tal manera que el valor actual del pago esperado de cada uno de los n activos se encuentre siempre entre los mejores precios de compra y venta.*

Para que el teorema anterior tenga sentido en los casos en los que falta algún precio de compra (venta), aceptamos el convenio de que en tal caso este precio es cero (infinito).

Nos ocuparemos ahora de analizar qué ocurre cuando la ausencia de arbitraje falla. En tal caso, buscamos una medida que refleje «el tamaño» de las estrategias de arbitraje, y para ello, vamos a buscar beneficios de arbitraje relativos. Concretamente, nos interesaremos por dos proporciones. La primera compara los beneficios por arbitraje frente al valor de los activos vendidos, mientras que la segunda cambia el precio de los activos vendidos por el de los intercambiados (comprados o vendidos). Una pequeña readaptación (que incorpore horquilla de precios) de las pruebas de los teoremas 3 y 4 de Balbás y Muñoz (1998), permite establecer el siguiente enunciado:

Teorema 2 *Supóngase que existen oportunidades de arbitraje. Entonces, las proporciones*

$$P(x)/V(x) \text{ y } -P(x)/[-V(x) + C(x)]$$

alcanzan el valor máximo en la misma estrategia de arbitraje x^* .

Las medidas m y l se introducen mediante

$$m = P(x^*)/V(x^*) \text{ y } l = -P(x^*)/[-V(x^*) + C(x^*)]$$

o cero cuando no haya oportunidades de arbitraje. Las desigualdades

$$0 \leq l \leq m \leq 1$$

son consecuencia de que ambas medidas están dadas por proporciones óptimas. Se puede probar la relación

$$l = m/(2-m)$$

[Balbás y Muñoz (1998)], lo que indica que determinada una de ellas queda determinada la otra. Además, cada medida tiene un carácter creciente respecto a la otra, y ambas alcanzan los valores extremos (0 o 1) de forma simultánea. Consecuentemente, ambas medidas aportan información similar respecto al «tamaño» de las oportunidades de arbitraje.

Obsérvese que m y I proporcionan información en términos monetarios, lo que permite analizar mercados imperfectos o con fricciones, al poderse descontar los costes de transacción. Cuando se considera que los n valores se negocian en más de un mercado, m y I pueden representar su nivel de integración. Es claro entonces que este nivel decrece al crecer las medidas, y que la total integración (la ausencia de arbitraje entre mercados) sólo se verifica si las medidas se anulan.

La medida de integración de Chen y Knez (1995) se introduce mediante las probabilidades neutrales al riesgo (o conceptos equivalentes como es el de vector de factores de descuento o vector de precios de estado). Así, supóngase que los s primeros valores se negocian en un primer mercado M_1 , y que los $n-s$ últimos se negocian en un segundo mercado M_2 . Entonces, bajo el supuesto de que ninguno de los mercados permite estrategias de arbitraje, el teorema 1 nos permite garantizar la existencia de sistemas de probabilidades neutrales al riesgo en ambos mercados. La medida de Chen y Knez coincide con la mínima distancia euclídea entre las probabilidades neutrales al riesgo de uno y otro mercado. Formalmente, si representamos mediante D_z la familia de probabilidades neutrales al riesgo de M_z ($z=1,2$), entonces la medida está dada por

$$\text{Inf} \{ \|d - d'\|^2 : d \in D_1 \text{ y } d' \in D_2 \}$$

donde $\| \cdot \|$ representa la norma euclídea. Denotando por a esta medida (o $a(M_1, M_2)$ si es necesario), el teorema 1 permite asegurar que $a = 0$ si no hay arbitraje entre mercados, y el recíproco se prueba readaptando la correspondiente demostración de Chen y Knez (1995). Por tanto, los mercados están perfectamente integrados si y sólo si $a = 0$. Cuando a no se anula pero es muy pequeña las probabilidades riesgo neutrales de ambos mercados están «muy próximas» y los mercados están «próximos» a una perfecta integración. Si a alcanza valores altos los mercados ponen precio a los activos mediante la aplicación de criterios muy diferentes (las probabilidades neutrales al riesgo están «lejanas») y el nivel de integración es escaso.

Como prueban Balbás y Muñoz (1998), las medidas m (o I) y a son diferentes y aportan información complementaria, aunque se pue-

de establecer alguna relación entre ellas. Es importante resaltar que se pueden poner ejemplos muy simples que muestran cómo las medidas pueden tomar valores bastante distintos y, por consiguiente, las distancia de probabilidades neutrales al riesgo (**a**) y los beneficios relativos de arbitraje (**m**) están lejos de ser criterios equivalentes. La razón es clara: **m** determina la discrepancia de mercados cuando se valoran activos reales y carteras que se pueden formar con ellos, mientras **a** determina discrepancia entre las reglas de valoración. Reglas de valoración muy distintas pueden, algunas veces, conducir a precios similares para los activos reales, lo que provoca que **m** pueda tomar valores pequeños aunque **a** alcance cotas significativas. Por tanto, si **a** y **m** no se anulan, reflejan cosas semejantes sólo cuando la cartera x^* del teorema 2, tiene asociado un vector de pagos finales muy similar al vector normalizado $(d - d') / \|d - d'\|$, siendo $(d - d')$ la diferencia que conduce al valor de **a**.

Como ya hemos dicho, se van a contrastar los mercados españoles y, dentro de ellos, vamos a considerar un bono de cupón cero, el índice *IBEX35*, contratos de futuro sobre el *IBEX35* y contratos de opción sobre el futuro. Primero calcularemos las medidas **a** y **m** cuando comparamos los valores presentes del índice con los precios de su réplica usual compuesta por el activo sin riesgo y el contrato de futuro. Los estados de la naturaleza en T serán 1.200 posibles valores finales (en T) del índice (desde $I_1 - 600$ hasta $I_1 + 600$, siendo I_1 el valor que el índice alcanza en el instante inicial $t=0$).

En una segunda etapa incorporaremos todos los derivados mencionados, pero no utilizaremos el propio índice, que será sustituido por su réplica. En este caso sólo se ha calculado la medida **m**. La fecha inicial ($t=0$) será arbitraria (depende del instante bajo análisis) mientras que T coincidirá con la fecha de expiración de todos los derivados. Los estados de la naturaleza dependerán del valor (aleatorio) del índice en T , valor que representaremos por I_2 . Aceptaremos que I_2 no será inferior al 60 % ni superior al 140 % de I_1 , siendo I_1 , según cada caso, el valor que en el instante inicial tiene el índice, o el promedio del precio inicial de los contratos de futuro¹. Aceptaremos también que I_2 va a coincidir con sus valores máximo o mínimo, o con el precio de ejercicio de alguna de las opciones. El lema 3 garantiza que este supuesto no modifica el valor de **m**.

Como es usual, el pago final de una opción de compra (venta) es $\text{Max}\{I_2 - E, 0\}$ ($\text{Max}\{E - I_2, 0\}$) siendo E el precio de ejercicio de la

¹ El supuesto es muy realista dado que T nunca es superior a un mes.

opción. El activo sombra² tiene un pago final igual a I_2 , y el bono pagará un punto del IBEX35 independientemente del estado de la naturaleza. Consecuentemente, si la sucesión creciente $E_1 \leq E_2 \leq \dots \leq E_s$ representa los precios de ejercicio de las diferentes opciones, y se verifican las desigualdades $0,6I_1 \leq E_1$ y $E_s \leq 1,4I_1$, entonces se puede probar lo siguiente:

Lema 3 *Cualquier cartera factible x tiene asociado un pago final no negativo para cualquier valor de I_2 tal que $0,6I_1 \leq I_2 \leq 1,4I_1$ si y sólo si x tiene un pago final no negativo cuando I_2 alcanza alguno de los valores $\{0,6 I_1, E_1, E_2, \dots, E_s, 1,4 I_1\}$.*

El lema garantiza que la simplificación hecha sobre los estados de la naturaleza no afecta a los resultados del análisis. Evidentemente, los estados de la naturaleza pueden cambiar (las opciones disponibles o el valor de I_1 puede cambiar) si cambia el instante analizado. Por tanto m dependerá del instante, y una vez fijado éste, el proceso consta de dos etapas. Primero se estudia la ausencia de arbitraje mediante el teorema 1 y, más tarde, si el arbitraje es posible, se determina la estrategia óptima de arbitraje cuya existencia está asegurada por el teorema 2.

II. Descripción de los datos

Analizaremos el nivel de integración del Sistema de Interconexión Bursátil Español (SIBE), el Mercado Español de Futuros Financieros sobre Renta Variable (MEFF-RV) y el Mercado de Deuda Anotada (MDA). Recordemos que MEFF-RV es uno de los más importantes mercados europeos de opciones y futuros, e incluso está considerado entre los primeros del mundo. Concretamente, el futuro sobre el IBEX-35 fue el contrato más negociado en todo el mundo durante 1994 y 1995 (Sutcliffe (1997), p. 59).

Es importante recordar que el valor de liquidación de los derivados se obtiene mediante la media aritmética de los valores que toma el índice entre las 16:15 y las 16:45 el día de expiración. Respecto al activo libre de riesgo, para cada uno de los minutos de un mismo día se ha considerado el bono de cupón cero (negociado en MDA) con maduración más cercana a la fecha de expiración de los derivados.

Como es sabido, el horario del SIBE abarca desde las 10:00 a.m. hasta las 5:00 p.m., mientras que MEFF-RV está abierto desde las

² El activo sombra es la réplica usual del índice, formada por el contrato de futuro y el bono.

10:00 a.m. hasta las 5:15 p.m. En este estudio se han utilizado los mejores precios de compra y venta de todos los valores incorporados minuto a minuto. Se han analizado dos períodos diferentes: uno estable que abarca desde el 24 de febrero hasta el 21 de marzo de 1997, y otro convulsivo e inestable que abarca desde el 22 hasta el 30 de octubre del mismo año. En cada minuto se han aplicado los principios sobre valoración de activos que son comunes a los modelos estáticos, y que hemos resumido en la sección primera. El instante inicial ($t=0$) ha coincidido siempre con el minuto analizado, mientras que T ha sido siempre la fecha de expiración de opciones y futuros. Esta ha coincidido con el 21 de marzo o con el 21 de noviembre de 1997, dependiendo del período.

Hay dos críticas que se suelen realizar cuando trabajos empíricos muestran la existencia de arbitraje en los mercados de capitales. Primero, los datos deben estar perfectamente sincronizados y, segundo, los costes de transacción deben ser tenidos en cuenta. Estas dos circunstancias se han cuidado especialmente en este análisis, y se han utilizado precios, proporcionados por *MEFF-RV*, que proceden de bases de datos de alta frecuencia. Con ello se han podido evitar, además, los precios de las transacciones reales, y se ha supuesto que los inversores compran al mejor precio de venta y venden (más barato) al mejor precio de compra. Otros costes de transacción se han descontado igualmente. Con ello hemos pretendido incorporar la máxima precisión posible al análisis, lo que ha motivado el que hayamos eliminado el propio índice como activo negociable. De no haberlo hecho, habríamos tenido que renunciar al nivel de precisión que proponemos, dada la multitud de imperfecciones (negociación infrecuente de algunos activos, dificultades para determinar costes de transacción, etc.) que no se pueden eludir. El lugar del índice ha sido ocupado por su réplica habitual, y así, si F (F' con $F' \geq F$) es el mejor precio de compra (venta) del contrato de futuro, y r es el tipo libre de riesgo hasta el vencimiento del contrato, hemos utilizado las cantidades $F/(1+r)$ y $F'/(1+r)$ como mejores precios del subyacente de compra y venta respectivamente. Consecuentemente, el análisis ha incorporado bonos, opciones y futuros sobre el *IBEX35*, y para observar si la réplica del índice refleja bien el comportamiento de éste, se ha hecho un estudio previo analizando la integración entre ambos.

III. Resultados empíricos

Como ya se ha mencionado, comenzaremos examinando un período estable de 19 días, lo que implica un total de 7980 minutos para el período completo, dado que hay 420 minutos de negociación por día. Todos los derivados expiraron en marzo de 1997 y el va-

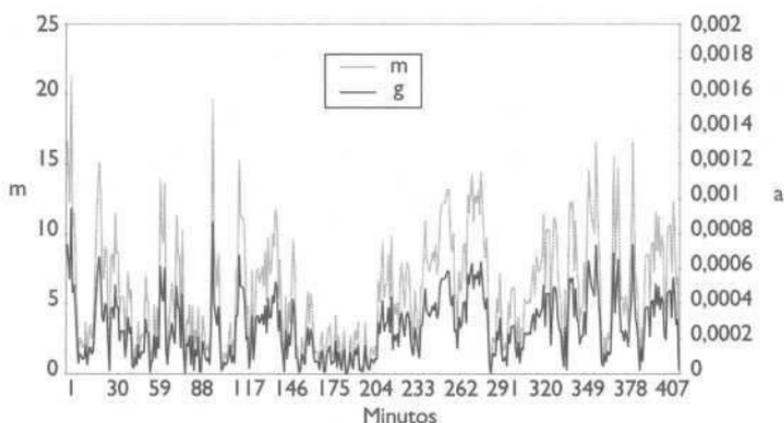
lor (aleatorio inicialmente) del *IBEX-35* en esta fecha es la base para fijar los estados de la naturaleza, de acuerdo al procedimiento descrito en la sección primera.

Respecto a los resultados obtenidos al analizar el nivel de integración entre el contrato de futuro sobre el *IBEX-35* y su activo subyacente, representamos en la figura 1 la evolución de las medidas de Chen y Knez y de Balbás y Muñoz a lo largo del día 4 de marzo de 1997. Éste es un día absolutamente genérico, y los resultados son totalmente análogos en cualquiera de los demás, aunque hacemos notar aquí que el contraste no se ha implementado para el período inestable.

FIGURA 1

Evolución de las medidas de Chen y Knez (a) y de Balbás y Muñoz (m en puntos básicos) cuando contrastamos el nivel de integración entre el mercado continuo y el de futuros sobre el *IBEX-35*.

Resultados del 4 de marzo de 1997



Pese a que *a* se introduce a través de probabilidades neutrales al riesgo (o, equivalentemente, reglas de valoración) y *m* se deriva de estrategias de arbitraje que maximizan beneficios relativos, es evidente el paralelismo mostrado por ambas respecto al nivel de integración. Este sorprendente hecho abre nuevas vías de investigación para el futuro, ya que, más que pensar en una coincidencia casual altamente improbable (téngase en cuenta que el paralelismo aparece absolutamente todos los días estudiados), deberíamos considerar la posibilidad de que en un contexto restringido, como el que ahora nos ocupa, pudiera haber algún tipo de relación analítica entre ambas medidas. El efecto de los costes de transacción se puede

incorporar mediante la sustracción de 32,58 puntos básicos de la medida m^3 . Por tanto, tras examinar los resultados se puede concluir muy alta integración y muy serias dificultades para implementar estrategias de arbitraje.

Para el mismo período, hemos estudiado eficiencia e integración entre el IBEX-35 (sustituido por su réplica), el contrato de futuro sobre el mismo, el tipo libre de riesgo y las opciones europeas de compra y venta sobre el contrato de futuro. La tabla I proporciona el número de minutos en los que apareció arbitraje en cada uno de los días estudiados, y se presenta también al valor máximo alcanzado por m . El número medio de activos negociables fue 26 (véase la columna 2). Excepto en la primera semana, los resultados muestran que en prácticamente todos los días aparecieron oportunidades de arbitraje, incluso después de descontar los costes de transacción (véanse las columnas 3 y 4). Hubo estrategias de arbi-

TABLA I

Día	Activos	Sin CT	Con CT	Máxima m	Volatilidad
24-02-97	27	0	0	0,00	11,60 %
25-02-97	24	0	0	0,00	17,66 %
26-02-97	28	1	0	1,52	12,79 %
27-02-97	25	0	0	0,00	10,30 %
28-02-97	25	1	1	29,63	15,69 %
04-03-97	26	0	0	0,00	9,80 %
05-03-97	26	10	10	45,01	14,28 %
06-03-97	31	2	1	3,53	11,17 %
07-03-97	24	4	3	64,05	12,24 %
10-03-97	24	10	5	15,78	11,56 %
11-03-97	32	26	8	8,33	11,97 %
12-03-97	29	5	4	17,58	10,75 %
13-03-97	28	2	1	3,45	14,38 %
14-03-97	31	6	6	4.704,30	15,02 %
17-03-97	27	6	4	5,40	12,78 %
18-03-97	21	12	6	7,34	12,15 %
19-03-97	24	1	1	42,27	10,78 %
20-03-97	25	6	5	12,92	11,64 %
21-03-97	15	4	4	3.025,18	12,68 %
Total/Media	26	96	59	—	12,59 %

La primera columna representa el día correspondiente. La segunda aporta el máximo número de activos considerados. La tercera da el número de minutos en los que aparece el arbitraje si no se consideran los costes de transacción. La cuarta considera estos costes. La quinta columna presenta el máximo valor de m en puntos básicos, y la volatilidad intradía anualizada es proporcionada por la sexta. Todos los derivados expiraron el 21 de marzo de 1997.

³ La medida de integración I permite descontar los costes de transacción (CT). Si CT es proporcional al volumen total de dinero intercambiado, $-V(x)+C(x)$, lo cual es fácil de asumir en este caso, tenemos que m debe ser menor que el cociente $2CT/(1+CT)$ para que el mercado esté integrado. Este cociente alcanza los 32,58 puntos básicos en nuestro contexto.

traje durante el 1,2 % de los minutos, cantidad que desciende hasta el 0,46 % si se consideran los costes de transacción⁴. Hay dos valores de *m* anormalmente elevados que aparecen el 14 y el 21 de marzo, pero probablemente puedan atribuirse a algún serio error cometido por algún agente (la correspondiente estrategia de arbitraje sólo duró un minuto). De hecho, son las únicas estrategias que incorporan opciones exclusivamente.

En la tabla 2 se han agrupado las oportunidades de arbitraje por intervalos de 30 minutos, y la en la figura 2 se presenta un pequeño histograma para reflejar las horas donde el arbitraje es más frecuente. La forma de U del histograma, que alcanza mínimos entre las 13:30 y las 14:30, hace pensar que estas horas se corresponden con momentos de menor actividad en el mercado⁵. Mas de la mitad de las oportunidades de arbitraje (51,05 % y 55,92 % sin y con costes de transacción respectivamente) tienen lugar en las dos últimas horas de negociación.

TABLA 2

Intervalo	Número de minutos		Porcentaje	
	Sin CT	Con CT	Sin CT	Con CT
1001-1030	1	1	1,04 %	1,69 %
1031-1100	5	2	5,21 %	3,39 %
1101-1130	6	5	6,25 %	8,47 %
1131-1200	1	1	1,04 %	1,69 %
1201-1230	15	3	15,63 %	5,08 %
1231-1300	9	6	9,38 %	10,17 %
1301-1330	4	4	4,17 %	6,78 %
1331-1400	1	0	1,04 %	0,00 %
1401-1430	1	0	1,04 %	0,00 %
1431-1500	4	4	4,17 %	6,78 %
1501-1530	7	3	7,29 %	5,08 %
1531-1600	9	5	9,38 %	8,47 %
1601-1630	17	15	17,71 %	25,42 %
1631-1700	16	10	16,67 %	16,95 %
Total	96	59		

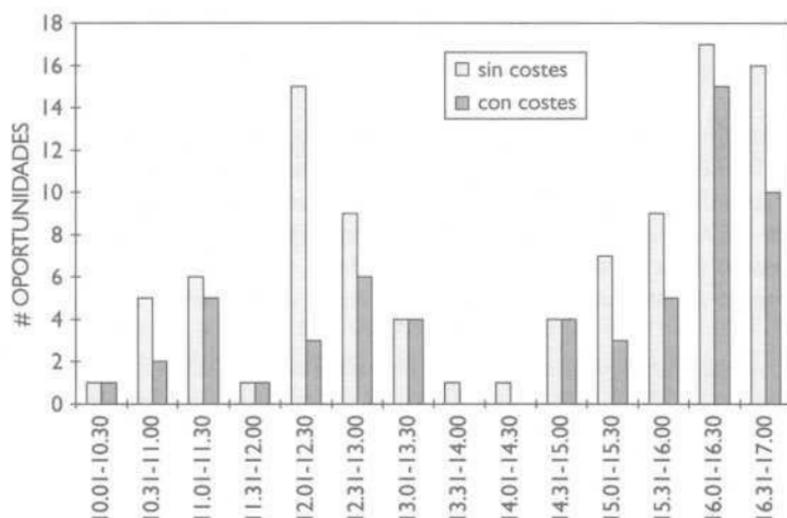
En la primera columna se representan intervalos temporales de 30 minutos. En la segunda se encuentra el número de oportunidades de arbitraje encontradas. En la tercera se ofrece la misma variable tras descontar costes de transacción, y la cuarta y quinta representan estas cantidades en términos relativos. Todos los derivados expiraron el 21 de marzo de 1997.

⁴ Los costes de transacción se sitúan en las 500 pesetas por contrato. Si suponemos un valor promedio del índice de 5.400 puntos, entonces *m* debe superar los 1,8 puntos básicos para que haya arbitraje tras descontar estos costes de transacción.

⁵ ¿Es por la hora de comer? *No free lunch at lunch time?*

FIGURA 2

Número de oportunidades de arbitraje encontradas en cada intervalo de 30 minutos



Debemos llamar la atención sobre varias cuestiones importantes antes de elaborar conclusiones sobre la posible ineficiencia de los mercados estudiados. Las estrategias óptimas de arbitraje se obtienen cuando no hay probabilidades neutrales al riesgo comunes a todos los mercados involucrados en el análisis. Por tanto, si queremos analizar la existencia de arbitraje en cada mercado individual, debemos averiguar si cada uno de ellos por separado acepta reglas de valoración riesgo-neutrales. Este argumento nos invitó a calcular el valor de m tras eliminar del conjunto de activos al bono y a la réplica del índice. Sólo dos oportunidades de arbitraje existieron, y coinciden con las encontradas el 14 y el 21 de marzo. Por consiguiente, podemos considerar que el mercado de opciones mantiene un alto nivel de eficiencia, y que es la falta de integración la que provoca cierta segmentación y la aparición de las irregularidades encontradas. En cualquier caso, la posibilidad de implementar el arbitraje entre mercados parece muy difícil de discutir.

Para contrastar eficiencia e integración en periodos de alta volatilidad, elegimos el mes de octubre de 1997, dado el efecto que sobre los mercados de todo el mundo provocó la crisis asiática. Durante varios días hubo tremendas convulsiones afectando a los mercados, con las consecuentes volatilidades intradía anormalmente grandes. Desde el 27 hasta el 29 de octubre (ambos inclusive) la volatilidad intradía (una vez anualizada) alcanzó un promedio del 48,34 %. Se alcanzaron volúmenes de contratación sin preceden-

tes, ni en el mercado de opciones (27 de octubre) ni en el de acciones o el de futuros (28 de octubre). Además, el mercado continuo cayó de forma espectacular el día 27 (por tamaño fue la caída que ocupó el décimo lugar de los últimos seis años) y alcanzó también una subida insólita el 28 (la más alta en los últimos seis años). Los movimientos fueron del 4,40 % y del 5,66 % respectivamente.

Debido al elevado número de ordenes a la espera de ser ejecutadas al final de la sesión de ajuste, la apertura del SIBE fue retrasada. Además, a lo largo del día se produjeron retrasos en la difusión del índice IBEX-35. Ambos hechos nos han forzado a tomar I_1 (parámetro básico para determinar los estados de la naturaleza) como el promedio de los precios de compra y venta del contrato de futuro.

Los resultados del contraste se encuentran en la tabla 3. El número medio de activos disponibles (50) es prácticamente el doble que en fechas más estables. Nótese que el número de minutos en los que faltan reglas de valoración neutrales al riesgo es más alto los días 27, 28 y 29 (el 9,15 % del total de minutos) y también los valores de m (especialmente el 27 y el 28) son importantes por el tamaño. Hay que enfatizar el hecho de que 20 de las 143 oportunidades de arbitraje conciernen exclusivamente al mercado de opciones, de forma que, aunque segmentación y desintegración pueden ser clave importante para explicar los desajustes, ahora sí hay clara ineficiencia del mercado de opciones. Éste es un hecho muy importante, pues no hay más que mirar varios trabajos relevantes de la literatura previa para comprender que el comportamiento de los mercados en épocas de crisis debe ser tenido muy en cuenta a la hora de estudiar aspectos sobre su estructura o regulación, por ejemplo [véase, entre otros, Kleidon y Whaley (1992)].

TABLA 3

Día	Activos	Sin CT	Con CT	Máxima m	Volatilidad
22-10-97	40	2	2	7,21	16,02 %
23-10-97	45	6	4	476,19	22,47 %
24-10-97	44	4	2	626,78	15,40 %
27-10-97	47	11	6	1.785,71	27,84 %
28-10-97	55	21	18	4.199,82	79,43 %
29-10-97	59	94	79	357,14	37,75 %
30-10-97	63	5	4	208,33	38,17 %
Total/Media	50	143	115		33,87 %

La fecha se encuentra en la primera columna. La segunda indica el número máximo de activos considerados. La tercera presenta el número de minutos en los que se detecta arbitraje, y la cuarta aporta la misma variable tras descontar los costes de transacción. La quinta columna presenta el máximo valor de m en puntos básicos, y la volatilidad intradía, una vez anualizada, está en la sexta. Todos los derivados expiraron el 21 de noviembre de 1997.

Para enfatizar la firmeza conclusiones, creemos importante volver a incidir sobre la generalidad y precisión del análisis realizado. Todos los precios están perfectamente sincronizados y las fricciones e imperfecciones detectadas se han considerado e incluso, en algunos casos, amplificado. Las hipótesis del modelo aplicado son muy débiles y elementales, y comunes a cualquier modelo de valoración. Por tanto, los resultados parecen validar la existencia de posibles beneficios de arbitraje en períodos estables, hecho extraordinariamente amplificado en los períodos de alta volatilidad.

IV. Sobre la horquilla de precios

La ausencia de arbitraje ha sido contrastada bajo supuestos restrictivos que se pueden relajar en muchas situaciones prácticas. En primer lugar, sólo se han considerado estrategias estáticas, pese a que en la literatura se han desarrollado medidas dinámicas del arbitraje entre mercados [véase Balbás *et al.* (1998)]. Segundo, los precios son mayores cuando los inversores compran que cuando venden. Tercero, la proporción entre los valores finales e iniciales del índice se ha supuesto siempre entre 0,6 y 1,4, valores demasiado alejados de la unidad si el plazo hasta la expiración de los derivados es corto. Por ejemplo, dos o tres días antes de la fecha de expiración podríamos haber tomado una relación entre 0,8 y 1,2, y horas antes de la expiración este intervalo podría haber sido mucho menor.

Estos supuestos aportan claras ventajas, puesto que al ser tan débiles, hacen difícil una crítica a la conclusión fundamental y el arbitraje entre mercados parece posible. Pero puede resultar interesante calcular la medida de integración tras relajar los supuestos, y es lo que haremos parcialmente en esta sección.

Nos centraremos en el período estable y en la horquilla de precios. Esta horquilla es amplia y tiene un efecto importante sobre nuestro análisis debido a que nunca se ha trabajado con los precios de las transacciones reales. La horquilla ha sido eliminada solamente para el activo más negociado. Naturalmente, este activo (que depende del día analizado) con frecuencia presenta la ratio compra/venta más próxima a uno y, por consiguiente, m habría alcanzado cotas mayores si hubiéramos realizado el mismo cambio para otro valor. Los resultados obtenidos aparecen en las tablas 4 y 5.

Las diferencias entre las tablas 4 o 5 y la tabla 1 son evidentes, y prueban que los creadores de mercado ofrecen precios que frecuentemente generan arbitraje. Además, los beneficios por arbitraje (el valor de la medida) son demasiado elevados en bastantes momentos (especialmente cuando el mejor precio de venta es uti-

TABLA 4

Fecha	Sin costes	Con costes	Máxima m
24-02-97	37	37	275
25-02-97	3	3	303
26-02-97	2	1	18
27-02-97	26	11	6
28-02-97	1	1	32
04-03-97	29	12	463
05-03-97	76	76	719
06-03-97	2	1	4
07-03-97	5	4	64
10-03-97	10	5	16
11-03-97	97	66	1.860
12-03-97	10	5	18
13-03-97	140	114	1.750
14-03-97	62	49	4.803
17-03-97	10	8	5
18-03-97	12	6	7
19-03-97	6	6	249
20-03-97	7	7	28
21-03-97	10	10	4.420
Total	545	422	

La horquilla de precios ha sido eliminada para la opción más negociada, y se ha supuesto que los agentes pueden comprar esta opción al mejor precio de compra. La primera columna refleja el día correspondiente, la segunda da el número de oportunidades de arbitraje antes de descontar costes de transacción, la tercera descuenta los costes, y la cuarta muestra el máximo valor en puntos básicos alcanzado por *m*. El 21 de marzo de 1997 expiraron todos los derivados.

TABLA 5

Fecha	Sin costes	Con costes	Máxima m
24-02-97	0	0	0
25-02-97	0	0	0
26-02-97	24	23	238
27-02-97	92	75	2.591
28-02-97	22	22	234
04-03-97	78	40	183
05-03-97	109	101	515
06-03-97	72	71	500
07-03-97	14	13	1.042
10-03-97	10	5	16
11-03-97	152	125	210
12-03-97	44	22	18
13-03-97	402	401	6.756
14-03-97	76	61	4.704
17-03-97	139	118	1.053
18-03-97	36	30	1.000
19-03-97	241	241	5.417
20-03-97	11	11	2.105
21-03-97	33	33	3.025
Total	1.555	1.392	

La horquilla de precios ha sido eliminada para la opción más negociada, y se ha supuesto que los agentes pueden vender esta opción al mejor precio de venta. La primera columna refleja el día correspondiente, la segunda da el número de oportunidades de arbitraje antes de descontar costes de transacción, la tercera descuenta los costes, y la cuarta muestra el máximo valor en puntos básicos alcanzado por *m*. El 21 de marzo de 1997 expiraron todos los derivados.

lizado también para vender) lo que debería ser utilizado por otros agentes para ofertar precios mejores. Habría cobertura mediante estrategias de arbitraje si un nuevo inversor aceptara estos nuevos precios.

De nuevo nos encontramos ante una realidad que parece sorprender. La horquilla es elevada, lo que invita a nuevas estrategias de inversión. En muchos momentos los agentes pueden ofertar mejores precios que están cubiertos por estrategias de arbitraje, y esto debería conducir a horquillas significativamente menores. Si embargo, esto no es lo que parecen reflejar los resultados del análisis empírico.

V. Ejemplos de arbitraje

A continuación, y con intención meramente ilustrativa, vamos a presentar alguno de los ejemplos de arbitraje que se detectaron. En primer lugar analizaremos una estrategia que pudo implementarse en plena crisis provocada por el efecto de los mercados asiáticos, y después veremos qué ocurre si nos colocamos en la posición de los creadores de mercado.

El ejemplo corresponde al 29 de octubre de 1997. Este día se negociaron 59 activos diferentes, y 40 de ellos mostraban precio de compra o venta a las 17:05, hora a la que aparece la estrategia que hemos elegido. La tabla 6 proporciona los mejores precios de compra y venta en este instante. No hay probabilidades neutrales al riesgo compatibles con los mismos, de forma que existe arbitraje. m alcanza un valor de 56 puntos básicos, y la correspondiente estrategia de arbitraje está formada por las siguientes posiciones: compra de 200 unidades del bono, compra de una opción de compra con precio de ejercicio de 6500 puntos, compra de dos opciones de venta con precio de ejercicio de 6300 puntos, venta de dos opciones de venta con precio de ejercicio de 6400 puntos y, finalmente, venta de una opción de compra con precio de ejercicio de 6300 puntos. Nótese que la estrategia no es trivial, pero es en efecto arbitraje, dado que su precio es negativo y sus pagos finales no son nunca inferiores a cero, tal y como se muestra en la figura 3. Observando esta figura queda claro que, junto a los beneficios iniciales determinados por m , los inversores, dependiendo de que el valor de liquidación del *IBEX35* se sitúe entre 6300 y 6500 puntos, pueden volver a tener pago positivo en la fecha de expiración de los derivados.

Ahora, si eliminamos la horquilla de precios para la opción más negociada (la opción de venta con precio de ejercicio de 6.400 puntos), y consideramos que se puede vender al mejor precio

TABLA 6

Opciones de compra			Opciones de venta		
Precio de ejercicio	Mejor precio de compra	Mejor precio de venta	Precio de ejercicio	Mejor precio de compra	Mejor precio de venta
5.700	400	N.D.*	7.350	N.D.	40
5.800	N.D.	800	7.400	N.D.	50
6.300	355 (1)	375	7.500	5	N.D.
6.350	325	345	5.500	65	N.D.
6.400	295	315	5.600	50	N.D.
6.450	270	290	5.700	85	N.D.
6.500	240	250 (1)	5.800	N.D.	160
6.550	220	240	6.100	190	210
6.600	190	210	6.150	200	220
6.700	N.D.	198	6.200	220	240
6.800	51	N.D.	6.250	235	255
6.850	15	120	6.300	255	275 (2)
6.900	40	105	6.400	325 (2)	350
6.950	10	N.D.	6.450	N.D.	450
7.000	33	83	6.500	N.D.	400
7.050	18	N.D.	6.600	350	430
7.100	25	50	6.700	N.D.	650
7.200	N.D.	40	7.300	603	N.D.
7.250	10	45	7.500	800	N.D.
			Activo	Precio compra	Precio venta
			IBEX-35	6.375,86	6.378,85.
			Bono**	0,997	0,997 (200)

* No disponible

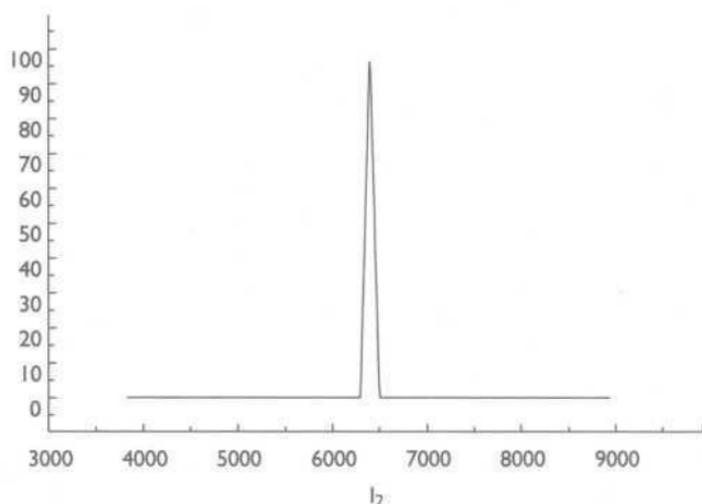
** El pago final de una unidad del bono es un punto del índice, y su precio es $1/(1+r)$ siendo r el tipo de interés de 0 a T

Mejores precios de compra y venta correspondientes a las 17:05 del 29 de octubre de 1997. Los valores que aparecen en la estrategia de arbitraje óptima están representados con negrita, y entre paréntesis se muestran las unidades que hay que comprar o vender. Todos los derivados expiraron el 21 de noviembre de 1997.

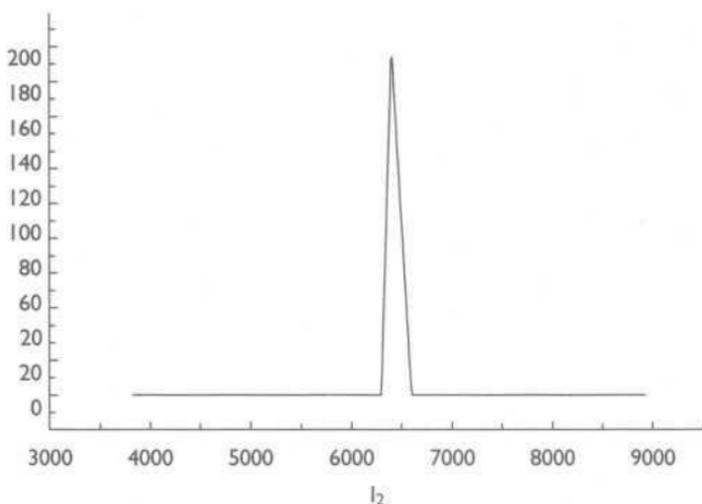
de venta, los beneficios de arbitraje se incrementan considerablemente. La estrategia óptima de arbitraje es ahora la siguiente: comprar a 275 puntos del índice dos opciones de venta con precio de ejercicio de 6300 puntos, comprar a 430 puntos una opción de venta con precio de ejercicio de 6.600 puntos y, finalmente, vender a 350 puntos tres opciones de venta con precio de ejercicio de 6.400 puntos. Esta estrategia implica un ingreso inicial de 70 puntos del índice (m es igual a 667 puntos básicos). De nuevo, dependiendo del valor final de liquidación que alcance el índice, se pueden obtener beneficios de arbitraje en la fecha de expiración de los derivados. El valor de este beneficio final está representado en la figura 4.

FIGURA 3

En el eje horizontal representamos el posible valor del IBEX35 al expirar los derivados, y en el eje vertical, el pago final de la estrategia de arbitraje óptima correspondiente al 29 de octubre de 1997 a las 17:05

**FIGURA 4**

Pagos finales de la estrategia de arbitraje óptima correspondiente al 29 de octubre de 1997 a las 17:05, tras haber supuesto que el activo más negociado (la opción de venta con precio de ejercicio igual a 6.400 puntos) podía ser vendida al mejor precio de venta



VI. Conclusiones

A lo largo del artículo se han contrastado los niveles de integración entre diferentes mercados financieros españoles, y se ha calculado el valor concreto alcanzado por diferentes medidas de integración desarrolladas recientemente en la literatura financiera. Estas medidas se introducen a través de los supuestos básicos comunes a todos los modelos de valoración de activos, como por ejemplo, la ley de precio único o la ausencia de oportunidades de arbitraje. Pese a fundamentarse en principios tan básicos, las medidas proporcionan nuevos métodos de contrastación respecto a la literatura previa de carácter empírico, dado que los mercados y las estrategias de arbitraje se analizan de forma global, y se va mucho más allá de la contrastación de estrategias de arbitraje concretas y bien conocidas.

Se ha trabajado con la máxima precisión posible. En particular, se utilizan datos de alta frecuencia perfectamente sincronizados, y la horquilla de precios y otros costes de transacción se han descontado. Además, los supuestos utilizados son extremadamente simples y generales, y compatibles con cualquier modelo de valoración. Estos supuestos se reducen a propiedades elementales sobre el valor de una opción o un bono al expirar.

Los resultados sorprenden por varias razones. Primero, cuando se trabaja con el *IBEX35* y su réplica usual, diferentes medidas de integración muestran evolución similar, lo que implica que criterios muy diferentes conducen a resultados análogos. Segundo, y quizá más importante, la evidencia empírica parece confirmar la existencia de beneficios de arbitraje libres de riesgo. Más aún, los beneficios por arbitraje crecen muy significativamente cuando se analizan periodos convulsivos y con alta volatilidad.

También se ha realizado un análisis parcial del modo en el que los creadores de mercado ofertan los precios. Se ha probado que los precios ofertados generan cobertura mediante estrategias de arbitraje con bastante frecuencia, y los beneficios de arbitraje obtenidos parecen alcanzar niveles importantes.

Finalmente, la metodología aplicada nos proporciona también las medidas de probabilidad neutrales al riesgo, o una estimación de las mismas si la ausencia de arbitraje no se verifica.

Agradecimientos

Esta investigación ha sido financiada mediante un proyecto de la DGICYT (Referencia PB95-0729-C02-02) y la *Fundación Caja de Madrid*.

Nuestro más sincero agradecimiento para Remedios Romeo (*MEFF-RV Market Information System*) y Jorge Yzaguirre (*Universidad Carlos III*) por la ayuda y las bases de datos que nos han proporcionado.

Este trabajo es una versión no técnica y escrita en castellano del que se presentó en las *III Jornadas de Economía Financiera* (Bilbao, junio de 1998) bajo el título «*Integration and Arbitrage in the Spanish Financial Markets: an Empirical Approach*». Quisiéramos expresar nuestra gratitud hacia el *Comité Organizador de las Jornadas* y hacia la *Fundación BBV* por haber seleccionado nuestro artículo para que se publique esta versión especial.

Todos los contenidos del artículo son responsabilidad exclusiva de los autores y, especialmente, aquellos resultados que pudieran incorporar algún tipo de error.

Referencias

Back, K. y Pliska, S. R. (1991): «On the Fundamental Theorem of Asset Pricing with an Infinite State Space», *Journal of Mathematical Economics*, 20: 1-18.

Balbás, A. y Muñoz, M. J. (1998): «Measuring the Degree of Fulfillment of the Law of One Price. Applications to Financial Market Integration», *Investigaciones Económicas*, vol. 22, n.º 2, 153-177.

Balbás, A.; Guerra, P. J. y Muñoz, M. J. (1998): «Measuring the Arbitrage Opportunities in an Intertemporal Dynamic Asset Pricing Model», *Applied Decision Analysis*, Kluwer, Boston, pp. 159-172.

Brenner, R. J. y Kroner, K. F. (1995): «Arbitrage, Cointegration, and Testing the Unbiasedness Hypothesis in Financial Markets», *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, vol. 30, n.º 1, 23-42.

- Chen, Z. y Knez, P. J. (1995):** «Measurement of Market Integration and Arbitrage», *The Review of Financial Studies*, vol. 8, n.º 2, 563-79.
- Hansen, L. P. y Richard, S. F. (1987):** «The Role of Conditioning Information in Deducing Testable Restrictions Implied by Dynamic Asset Pricing Models», *Econometrica*, vol. 55, n.º 3, 587-613.
- Hansen, L. P.; Heaton, J. y Luttner, E. G. J. (1995):** «Econometric Evaluation of Asset Pricing Models», *The Review of Financial Studies*, vol. 8, n.º 2, 237-74.
- Harris, F. H.; McInish, T. H.; Shoesmith, G. L. y Wood, R. A. (1995):** «Cointegration, Error Correction, and Price Discovery on Informatically Linked Security Markets», *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, vol. 30, n.º 4, 563-79.
- Harrison, J. y Kreps, D. (1979):** «Martingales and Arbitrage in Multiperiod Security Markets», *Journal of Economic Theory*, vol. 20, 381-408.
- Hudson, R.; Dempsey, M. y Keasey, K. (1996):** «A Note on the Weak Efficiency of Capital Markets: The Application of Simple Technical Trading Rules to U.K. Stock Prices 1935 to 1994», *Journal of Banking and Finance*, 20: 1121-32.
- Ingersoll, J. E. (1987):** *Theory of Financial Decision Making*, Rowman & Littlefield Publishers Inc.
- Jouini, E. y Kallal, H. (1995):** «Martingales and Arbitrage in Securities Markets with Transaction Costs», *Journal of Economic Theory*, 66: 178-197.
- Kamara, A. y Miller, T. W. (1995):** «Daily and Intradaily Tests of European Put-Call Parity», *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, vol. 30, n.º 4, 519-41.
- Kempf, A. y Korn, O. (1996):** «Trading System and Market Integration», *Proceedings of the 6th AFIR-Colloquium*, Nuremberg, october 1-3, 1709-28.
- Kleidon, A. W. y Whaley, R. E. (1992):** «One market? stocks, futures and options during October 1987», *The Journal of Finance*, vol. 47, n.º 3, 851-877.

Lee, J. H. y Nayar, N. (1993): «A Transactions Data Analysis of Arbitrage between Index Options and Index Futures», *Journal of Futures Markets*, 13, n.º 8, 889-902.

Prisman, E. J. (1986): «Valuation of Risky Assets in Arbitrage Free Economies with Frictions», *The Journal of Finance*, vol. 41, n.º 3, 545-56.

Protopapadakis, A. y Stoll, H. R. (1983): «Spot and Futures Prices and the Law of One Price», *The Journal of Finance*, vol. 38, n.º 5, 1431-55.

Sternberg, J. S. (1994): «A reexamination of put-call parity on index futures», *Journal of Futures Markets*, 14, n.º 1, 79-101.

Sutcliffe, Charles (1997): *Stock Index Futures: Theories and International Evidence*, International Thomson Business.

Desde que inició sus actividades, la Fundación BBV ha sido la respuesta institucional del Grupo BBV a la voluntad y al compromiso de complementar una sólida estrategia económica y financiera de su gestión con un firme programa de sensibilidad social y de creación cultural, orientados a la mejora del entorno en el que desarrolla su actividad.

La Fundación BBV trabaja en proyectos de investigación para detectar los problemas que más afectan a la sociedad española, a través de los estudios multidisciplinarios, la reflexión y el debate posterior. Pretende, incluso, ir más allá, analizando los problemas desde el contexto europeo y desde la perspectiva internacional.

En sus cerca de diez años de existencia, la Fundación BBV ha desarrollado rigurosas investigaciones sobre cuestiones como la sanidad y la salud, el Estado de Bienestar, el futuro del trabajo y la inactividad laboral, la ética financiera o la movilidad urbana. Es importante destacar otro conjunto de estudios llevados a cabo por la Fundación, tales como la identidad cultural y nacional y el nuevo orden mundial, las alternativas a la sociedad competitiva, y Visiones de Europa.

La Fundación ha hecho también una notable contribución al campo del conocimiento económico y de la realidad social, con investigaciones sobre magnitudes como el *stock* de capital, inversión, renta, producción, etc., de España y sus provincias y comunidades, con datos que cubren ya los últimos cuarenta años de la economía española.

En resumen, hasta el momento la Fundación BBV ha organizado 170 encuentros, realizado cerca de 500 investigaciones, 270 seminarios y más de 450 conferencias. Su Programa Cátedra ha posibilitado la estancia y trabajo en centros españoles de científicos extranjeros de más de 40 universidades, y de científicos españoles en la Universidad de Cambridge; y se sitúa ya en 4.250 su red de colaboradores.

La Fundación BBV mantiene el compromiso de dar a conocer a la sociedad los resultados alcanzados en el marco de sus proyectos y actividades. Documenta, centro editorial de la Fundación, tiene como misión la edición de las publicaciones derivadas de las actuaciones de la Fundación BBV, cuyo catálogo de publicaciones contiene 175 títulos.



FUNDACION BBV

Es evidente que las interrelaciones entre las aportaciones provenientes del complejo mundo académico y los sofisticados conocimientos que los profesionales del mundo financiero necesitan para gestionar eficientemente los recursos bajo su responsabilidad aumentan día a día.

La globalización de los mercados financieros exige una elevadísima preparación a toda persona relacionada con el proceso de toma de decisiones financieras.

La Fundación BBV cree que este volumen puede ser de gran utilidad a aquellas personas que necesiten conocer los avances más recientes de las técnicas de valoración de los productos derivados de renta fija, las posibilidades que ofrecen para la gestión de carteras los bonos segregables y que necesiten, además, entender las complejas relaciones entre los mercados de derivados y los mercados de sus activos subyacentes. Todos los trabajos se han escrito con un considerable esfuerzo divulgativo, con el fin de no entorpecer la lectura a los profesionales que demandan una sencilla presentación de los productos derivados en España.

ISBN 84-95163-24-1



9 788495 163240

DERIVADOS SOBRENDA REENTA FIJAY REBLE ENTA VARIATA FUNDACIONOM DAWA

